Vektoren

Vektoren sind gerichtete Größen deren Komponenten bei Drehung oder allgemein bei Änderung des Koordinaten-Systems gewisse Transformationseigenschaften besitzen

"Skalare" sind dabei invariant unter Koordinaten-transformationen

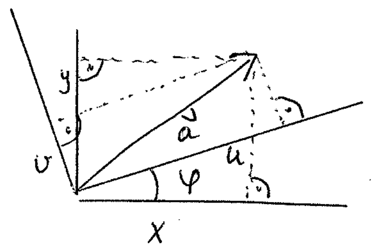
Beispiele:

Temperatur, Masse, Ladung sind Skalare

Ortsvektor $\check{r}$, Geschwindigkeit $\check{v} = \frac{d\check{r}}{dt}$,
Beschleunigung $\check{a} = \frac{d^2\check{r}}{dt^2} = \frac{d\check{v}}{dt}$, Kraft, Impuls,
Drehimpuls sind Vektoren

Vektoren haben eine Richtung und eine Länge

Drehung:



$$u = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$
$$v = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

$\Rightarrow$ Länge $(u^2+v^2)^{1/2} = \left[(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 + (-x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2\right]^{1/2}$

$= \left[x^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + y^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\right]^{1/2} =$

$= (x^2+y^2)^{1/2}$ bleibt erhalten !

Läßt sich als Matrix schreiben:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ausblick:

Vektoren in Komponentendarstellung

$\breve{a} = (a_1, \ldots, a_n) = "a_i"$

Dann kann man ein Längenquadrat bilden

$$|\breve{a}|^2 = \breve{a} \cdot \breve{a} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j g^{ij} \quad \text{wo} \quad g^{ij}$$

metrischer Tensor heißt

Tensoren sind Vektoren mit mehreren Indizes, z.B. der metrische Tensor

Mathematisch abstrakt ist ein linearer oder Vektorraum ein "Körper" von Elementen $\breve{a}, \breve{b}, \breve{c}, \ldots$ in dem eine Addition $\breve{a} + \breve{b}$ und eine Multiplikation mit Skalaren α definiert ist so daß

Abelsche Gruppe
$$\left\{ \begin{array}{ll} \breve{a} + (\breve{b} + \breve{c}) = (\breve{a} + \breve{b}) + \breve{c} & \text{Assoziativität} \\ \exists\, \breve{0} \text{ "Nullvektor" so daß } \breve{0} + \breve{a} = \breve{a} \quad \forall \breve{a} & \\ \forall\, \breve{a} \ \exists \text{ "inverse Vektor" } \breve{b} = -\breve{a} \text{ mit } \breve{a} + \breve{b} = \breve{a} - \breve{a} = \breve{0} & \\ \breve{a} + \breve{b} = \breve{b} + \breve{a} & \text{Kommutativität} \end{array} \right.$$

$$(\breve{a} + \breve{b})\alpha = \alpha(\breve{a} + \breve{b}) = \alpha\breve{a} + \alpha\beta \qquad \text{Distributivität}$$

$$\alpha(\beta\breve{a}) = (\alpha\beta)\breve{a} \qquad \text{Assoziativität}$$

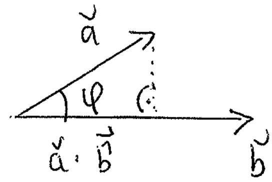
$\exists$ Skalar 1 "Einselement" so daß $1\breve{a} = \breve{a} \quad \forall \breve{a}$

Beispiele: Die Menge aller Verschiebungen im Euklidischen Raum
die Menge aller Polynome vom Grad n

Wenn es für n Vektoren $\vec{a}_i$ n Skalare α_i existieren die nicht alle Null sind, so daß $\sum_{i=1}^{n} \breve{a}_i \cdot \alpha_i = 0$, dann heißen $\breve{a}_1, \ldots, \breve{a}_n$ "linear abhängig"

Skalarprodukt

$$\check{a}\cdot\check{b} = |\check{a}||\check{b}|\cos\varphi = ab\cos\varphi$$



Eigenschaften:

$\check{a}\cdot\check{b} = \check{b}\cdot\check{a}$ Kommutativität

$\check{a}\cdot(\check{b}+\check{c}) = \check{a}\cdot\check{b}+\check{a}\cdot\check{c}$ Distributivität

$\alpha(\check{a}\cdot\check{b}) = (\alpha\check{a})\cdot\check{b} = \check{a}\cdot(\alpha\check{b})$ Homogenität

Spezialfälle:

$\check{a}\perp\check{b} \Leftrightarrow \check{a}\cdot\check{b}=0$

$\check{a}$ parallel $\check{b}$ $\Leftrightarrow$ $\check{a}\cdot\check{b} = |\check{a}||\check{b}| = ab$

$\check{a}$ antiparallel $\check{b}$ $\Leftrightarrow$ $\check{a}\cdot\check{b} = -ab$

$\check{a}=\check{b} \Rightarrow \check{a}\cdot\check{a} = |\check{a}|^2 = a^2$ Längenquadrat

$\check{a}=0$ oder $\check{b}=0 \Rightarrow \check{a}\cdot\check{b}=0$

Schwarzsche Ungleichung:

$$|\check{a}\cdot\check{b}| \le |\check{a}||\check{b}|$$

Projektion auf die Richtung $\check{b}$

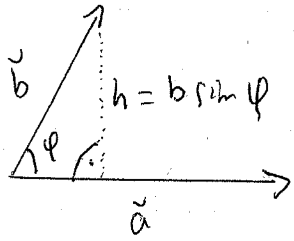
$a_b := a\cos\varphi = \check{a}\cdot\hat{\check{b}}$ wo $\hat{\check{b}} := \frac{\check{b}}{|\check{b}|}$ der Einheitsvektor in $\check{b}$-Richtung ist

Abstrakte Definition eines Skalarprodukts mit obigen Eigenschaften und zusätzlich $\check{a}\cdot\check{a}>0 \ \forall\ \check{a}\neq 0$ (positiv definit)

Ausblick: Es gibt auch indefinite Skalarprodukte, d.h. für die $\exists\, \check{a}\neq 0$ mit $\check{a}\cdot\check{a}>0$ und $\exists\, \check{b}\neq 0$ mit $\check{b}\cdot\check{b}<0$
z.B. in der speziellen Relativitätstheorie + Lorentz-Metrik

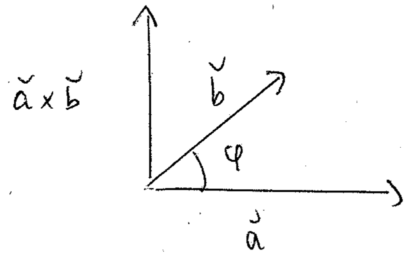
Vektorprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad |\vec{c}| = c = ab\,|\sin\varphi|$$



$\Rightarrow$ c = Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

Richtung bestimmt durch Rechtsschraubenregel: Drehe $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$



Eigenschaften:

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ Antikommutativität

~~$\vec{a}$ anti-$\parallel$ $\vec{b}$ oder $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$~~

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$ Distributivität

$\alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\alpha\vec{b})$ Homogenität

Spezialfälle:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = ab$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$

$\vec{a}$ anti-$\parallel$ $\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$

$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{a} = 0$

$\vec{0}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{0} = \vec{0}$

Komponentendarstellung

Definiere 3 "orthonormale" d.h. orthogonale Einheitsvektoren

$\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}, \hat{\vec{z}}$

im 3-d Euklidischen Raum, mit

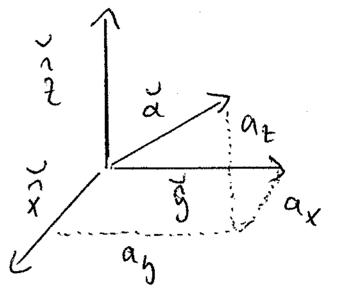
$$\hat{\vec{x}} \cdot \hat{\vec{x}} = \hat{\vec{y}} \cdot \hat{\vec{y}} = \hat{\vec{z}} \cdot \hat{\vec{z}} = 1 \quad ; \quad \hat{\vec{x}} \cdot \hat{\vec{y}} = \hat{\vec{x}} \cdot \hat{\vec{z}} = \hat{\vec{y}} \cdot \hat{\vec{z}} = 0$$

und

$$\hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{y}} = \hat{\vec{z}} \,, \quad \hat{\vec{y}} \times \hat{\vec{z}} = \hat{\vec{x}} \,, \quad \hat{\vec{z}} \times \hat{\vec{x}} = \hat{\vec{y}}$$

andere häufige Schreibweisen:

$$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \quad ; \quad \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \quad ; \quad \hat{\vec{e}}_1, \hat{\vec{e}}_2, \hat{\vec{e}}_3$$



$$\vec{a} = a_x \hat{\vec{x}} + a_y \hat{\vec{y}} + a_z \hat{\vec{z}} = (a_x, a_y, a_z)$$

mit $a_x = \vec{a} \cdot \hat{\vec{x}}$, $a_y = \vec{a} \cdot \hat{\vec{y}}$, $a_z = \vec{a} \cdot \hat{\vec{z}}$

$$\hat{\vec{e}}_i \cdot \hat{\vec{e}}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

$$\hat{\vec{e}}_i \times \hat{\vec{e}}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \hat{\vec{e}}_k$$

wobei das "Levi-Civita-Symbol"

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i,j,k \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{wenn } i,j,k \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anwendungen:

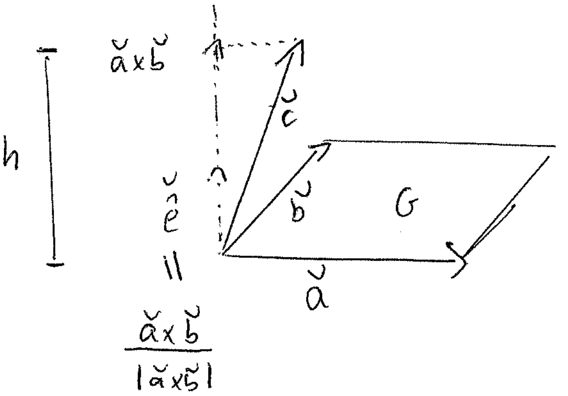
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \hat{\vec{e}}_k \quad \text{oder} \quad (\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j$$

z.B. $(\check{a}\times\check{b})_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$

Spatprodukt

$$(\check{a}\times\check{b})\cdot\check{c}$$



$$\text{Volumen} = G\cdot h = |\check{a}\times\check{b}|\cdot h$$

$$= |\check{a}\times\check{b}|\,\Big|\underbrace{\check{c}\cdot\frac{\check{a}\times\check{b}}{|\check{a}\times\check{b}|}}_{=\check{c}\cdot\check{e}=h}\Big| = |(\check{a}\times\check{b})\cdot\check{c}|$$

Eigenschaften:

Invarianz unter zyklischer Vertauschung:

$$(\check{a}\times\check{b})\cdot\check{c} = (\check{b}\times\check{c})\cdot\check{a} = (\check{c}\times\check{a})\cdot\check{b}$$

In 3D:

$$(\check{a}\times\check{b})\cdot\check{c} = \det\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)c_x + (a_z b_x - a_x b_z)c_y + (a_x b_y - a_y b_x)c_z$$

Doppeltes Vektorprodukt:

im allgemeinen nicht assoziativ: $(\check{a}\times\check{b})\times\check{c} \neq \check{a}\times(\check{b}\times\check{c})$

bac-cab-Regel:

$$\check{a}\times(\check{b}\times\check{c}) = \check{b}(\check{a}\cdot\check{c}) - \check{c}(\check{a}\cdot\check{b})$$

Daraus folgt auch die "Jacobi-Identität"

$$\check{a}\times(\check{b}+\check{c}) + \text{zyklisch} = \check{a}\times(\check{b}\times\check{c}) + \check{b}\times(\check{c}\times\check{a}) + \check{c}\times(\check{a}\times\check{b}) = 0$$

Das Differential

Ist $f(x)$ differenzierbar bei x, so nennt man $f'(x)h$ für beliebiges h "Differential" von $f(x)$. Man schreibt oft

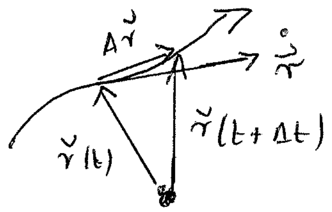
$$dy = df(x) = f'(x)\,dx$$

In der Mathematik wird dies Differentialform genannt, die man formal als dual zum Vektorraum bestehend aus Koordinaten $x, \ldots$ definiert

Vektorfunktionen

z.B. Kurve eines Massenpunktes wird beschrieben durch

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad t = \text{Zeit}$$



$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \text{Geschwindigkeit } \vec{v}$$

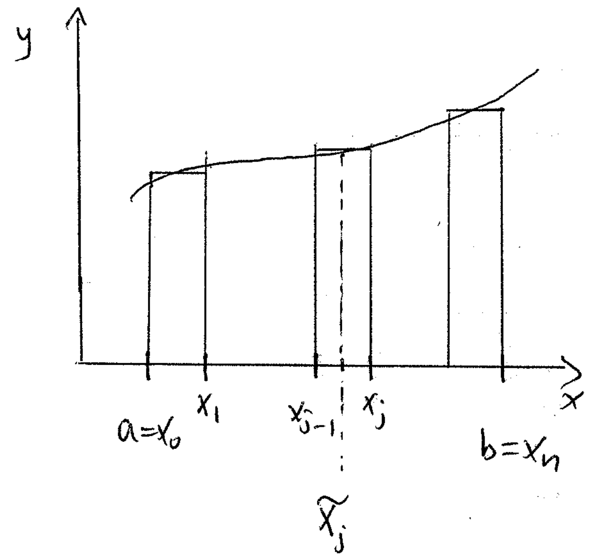
Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Kettenregel, Produktregel etc. gelten auch für Vektorfunktionen; z.B.

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt'}\vec{r}(f(t')) = \frac{d\vec{r}}{dt}(f(t')) \cdot \frac{df}{dt'}(t')$$

Integration



$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

$\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$

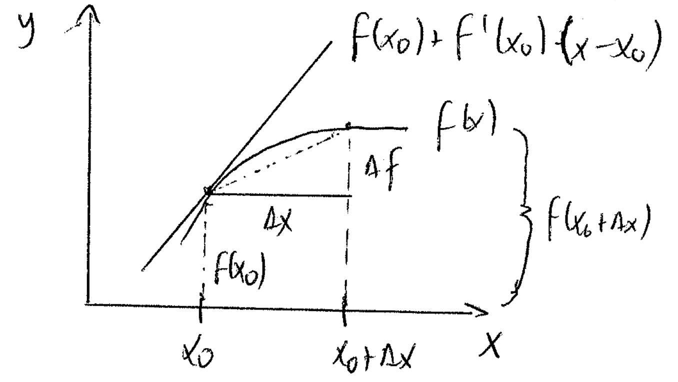
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f(\tilde{x}_j)\Delta x_j$$

wobei alle $\Delta x_j \to 0$

$F(x) := \int_a^x f(x)dx$ ist eine Stammfunktion von f, d.h.

$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$: Integration und Differentiation sind Umkehrungen voneinander

Differentiation



$$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = $$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Taylor Entwicklung:

in 1. Ordnung: $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

"ungefähr gleich"

Verallgemeinerung:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \\ + \ldots$$

Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ und damit auch jede Taylor-Reihe hat einen "Konvergenzradius" r, so daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ für alle $|x-x_0|<r$ konvergiert. Im allgemeinen ist r durch den Abstand zur nächsten Singularität von $f(x)$ gegeben, diese Tatsache gilt aber nur allgemein im Raum der komplexen Zahlen

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$ hat den Konvergenzradius $r=1$ da $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = -x^2$

obwohl $\frac{1}{1+x^2}$ für alle $x\in\mathbb{R}$ wohldefiniert und unendlich oft differenzierbar ist

Der tiefere Grund ist daß $\frac{1}{1+x^2}$ bei $x=\pm i$ singulär ist

Partielle Differentiation

Funktionen mehrerer Variablen, z.B. $f(x,y,z)$, können nach den einzelnen Variablen differenziert werden, wobei man sich die anderen Variablen konstant vorstellt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$

und analog für die anderen ~~Koo~~ Variablen

Kurzschreibweise:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Höhere Ableitungen

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

übrigens gilt: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (Symmetrie)

Man kann leicht die erweiterte Kettenregel zeigen:

Für $f(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ gilt

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

oder als Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Kann auch für die 1. Ordnung einer multi-dimensionalen Taylor-Entwicklung verwendet werden:

~~$f(x) = f$~~

$$f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) + \dots$$

Vektoranalysis: Gradient, Divergenz, Rotation

Ein <u>Vektorfeld</u> ist eine Vektor-wertige Funktion mehrerer Variablen:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(F_x(x,y,z),\ F_y(x,y,z),\ F_z(x,y,z)\right)$$

Beispiele: Geschwindigkeitsfeld (e.g. Windgeschwindigkeit), Kraftfeld

Ein <u>Skalarfeld</u> hat nur eine (skalare) Komponente:

$$f(\vec{r}) = f(x,y,z)$$

Gradient:

$$\operatorname{grad} f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \qquad \text{Skalarfeld} \rightarrow \text{Vektorfeld}$$

Es gelten die üblichen Produkt- und Summenregeln:

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g \quad ; \quad \vec{\nabla}(f\cdot g) = g\,\vec{\nabla} f + f\,\vec{\nabla} g$$

Beispiel: f sei Funktion des Abstands $|\vec{r}-\vec{r}_0|$ von einem Punkt $\vec{r}_0$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(|\vec{r}-\vec{r}_0|)}{\partial x} = \frac{df}{dr}(|\vec{r}-\vec{r}_0|)\,\frac{\partial|\vec{r}-\vec{r}_0|}{\partial x} \underset{\downarrow}{=} f'(|\vec{r}-\vec{r}_0|)\frac{x-x_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} =$$

$$|\vec{r}-\vec{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(\vec{r}) = f'(|\vec{r}-\vec{r}_0|)\underbrace{\overrightarrow{\widehat{r-r_0}}}_{\text{Einheitsvektor}} = f'(|\vec{r}-\vec{r}_0|)\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

z.B. $f(\vec{r}) = |\vec{r}-\vec{r}_0|^\alpha \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \alpha\,|\vec{r}-\vec{r}_0|^{\alpha-2}(\vec{r}-\vec{r}_0)$

z.B. Potentialfeld $\quad f(\vec{r}) = \dfrac{c}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(\vec{r}) = -\dfrac{c(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$

$$= -\frac{c}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\,\overrightarrow{\widehat{r-r_0}}$$

→ Zentralkraftfeld: Kraft zeigt auf Quelle
oder von Quelle weg → Radialfeld

d) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f(\vec{r})) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv \Delta f$

Δ = Laplace Operator → spielt wichtige Rolle in Newton'scher Gravitation, Elektrodynamik, Wellengleichungs, Diffusionsgleichung

Rotation

$$\text{rot}\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \vec{e}_k \underset{\text{in 3D}}{=} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Vektorfeld → Vektorfeld , "Wirbelstärke"

Es gelten Summen- und Produktregeln:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{F}+\vec{G}) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G} \; ; \; \vec{\nabla}\times(f\vec{F}) = f\vec{\nabla}\times\vec{F} + (\vec{\nabla}f)\times\vec{F}$$

Beispiele:

a) $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{r} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{\nabla}\times\vec{r} + (\vec{\nabla}f)\times\vec{r} =$

$\underset{\vec{\nabla}\times\vec{r}=0}{=} (\vec{\nabla}f)\times\vec{r} = \frac{f'(r)}{r}\vec{r}\times\vec{r} = 0$

b) $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\omega}\times\vec{r}$ ($\vec{\omega}$ = const.) $\Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}))_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} =$

$= \frac{\partial}{\partial y}(\omega_x y - \omega_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega_z x - \omega_x z) = \omega_x - (-\omega_x) = 2\omega_x$

analog durch zyklisches Vertauschen für die anderen Koordinaten

$\Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = 2\vec{\omega}$

Das totale Differential einer Skalarfunktion kann man nun schreiben als

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

und nach der Kettenregel

$$\frac{df}{dt} = \vec{\nabla} f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Anwendung: $f(\vec{r}) = \text{const.}$ definiert eine Fläche, also $df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = 0$ auf der Fläche $\Rightarrow$ $\vec{\nabla} f$ steht senkrecht auf dieser Fläche

Brennstrahl gesetz, Taylorentwicklung von Potential später

Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F_x, F_y, F_z) =$$

formales Skalarprodukt

$$= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Vektorfunktion $\to$ Skalarfunktion

Summen- und Produktregeln gelten:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G} \quad ; \quad \vec{\nabla}(f \cdot \vec{F}) = f \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{F}$$

Beispiele:

a) $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$

b) $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$ mit $\vec{\omega} = \text{const.}$ Wähle o.E. $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0$$

c) $\vec{F}(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)\, \vec{r} \to$ Radialfeld

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (f(|\vec{r}|)\, \vec{r}) = f(|\vec{r}|)\, \vec{\nabla} \cdot \vec{r} + (\vec{\nabla} f(r)) \cdot \vec{r}$$

$$= 3f(r) + \frac{\vec{r}}{r} f'(r) \cdot \vec{r} = 3f(r) + r f'(r)$$

e.g. $F(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\hat{r}}{r^2}$ (Gravitationsfeld oder Coulombfeld)

$$\Rightarrow f(r) = r^{-3} \Rightarrow f'(r) = -3r^{-4} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0 \text{ für } r \neq 0$$

Rechenregeln

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}) - \vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{G})$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{F}\times\vec{G}) = (\vec{G}\cdot\vec{\nabla})\vec{F} - \vec{G}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - (\vec{F}\cdot\vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F}(\vec{\nabla}\cdot\vec{G})$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \vec{\nabla}^2\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \Delta\vec{F}$$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f) = 0$ "Gradientenfelder sind wirbelfrei"

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = 0$ "Wirbelfelder sind quellenfrei"

1. Integrale über Vektorfelder

1.1. Kurvenintegrale über Vektorfelder

Integrale Eigenschaften sind verknüpft mit lokalen (differentiellen) Eigenschaften:

$$\mathrm{div}\,\breve{F} = \breve{\nabla}\cdot\breve{F} \qquad \text{"Quellstärke"}$$

$$\mathrm{rot}\,\breve{F} = \breve{\nabla}\times\breve{F} \qquad \text{"Verwirbelung"}$$

Gegeben sei $\breve{F}(\breve{r})$ und Kurve C von $\breve{r} = \breve{r}_A$ nach $\breve{r} = \breve{r}_B$:

$$C = \{\breve{r} = \breve{r}(t) \mid t_A \le t \le t_B \text{ wobei } \breve{r}(t_A) = \breve{r}_A, \breve{r}(t_B) = \breve{r}_B\}$$

Sei $t_A = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_N = t_B$,

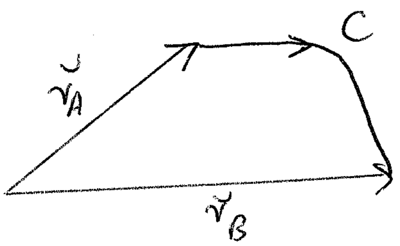
$\breve{r}_i := \breve{r}(t_i)$, $\Delta\breve{r}_i = \breve{r}_i - \breve{r}_{i-1}$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

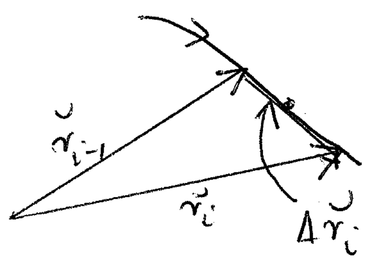
dann ist

$$\int_C \breve{F}(\breve{r})\cdot d\breve{r} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\breve{F}(\breve{r}_i)\cdot\Delta\breve{r}_i = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\breve{F}(\breve{r}_i)\frac{\Delta\breve{r}_i}{\Delta t_i}\Delta t_i$$

$$= \int_{t_A}^{t_B}\breve{F}(\breve{r}(t))\cdot\frac{d\breve{r}}{dt}\cdot dt$$

wobei im Grenzübergang $\lim_{N\to\infty}\Delta t_i = \lim_{N\to\infty}\Delta\breve{r}_i = 0$

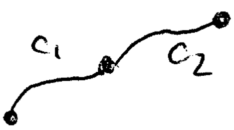




Eigenschaften:

a) $$\int_{-C} \check{F}\cdot d\check{r} = -\int_{C} \check{F}\cdot d\check{r}$$

b) $$C = C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad \int_{C} \check{F}\cdot d\check{r} = \int_{C_1} \check{F}\cdot d\check{r} + \int_{C_2} \check{F}\cdot d\check{r}$$



(Additivität)

physikalische Beispiele:

a) Arbeit entlang einer Wegstrecke von $\check{r}_0$ nach $\check{r}_1$, die gegen eine Kraft $\check{F}(\check{r})$ verrichtet wird:

$$W_{\check{r}_0 \to \check{r}_1} \equiv -\int_{\check{r}_0}^{\check{r}_1} \check{F}\cdot d\check{r}$$

b) elektrische Spannung zwischen $\check{r}_0$ und $\check{r}_1$

$$U_{\check{r}_0, \check{r}_1} = \int_{\check{r}_0}^{\check{r}_1} \check{E}\cdot d\check{r}$$

$\check{E}$: elektrische Feld

Das Kurvenintegral $\int_{\check{r}_0}^{\check{r}_1} \check{F}\cdot d\check{r}$ ist genau dann wegunabhängig

Falls sich $\check{F}$ als Gradient schreiben läßt, d.h. $\check{F} = \check{\nabla} f$.

Dann hängt

$$\int_{\check{r}_0}^{\check{r}_1} \check{F}\cdot d\check{r} = \int_{\check{r}_0}^{\check{r}_1} (\check{\nabla} f)\cdot d\check{r} = f(\check{r}_1) - f(\check{r}_0)$$

von den Werten von f an den Endpunkten ab.

Dies ist auch äquivalent zu $\check{\nabla} \times \check{F} = \text{rot}\, \check{F} = 0$