Zweiteilchen System

Definiere:

$$\vec{r} = \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad = \text{Relativkoordinate}$$

$$M = m_1 + m_2 = \text{Gesamtmasse} \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \text{"reduzierte Masse"}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\left(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2\right) \quad = \text{Schwerpunkt}$$

Dann

$$\vec{F}(\vec{r}) := \vec{F}_{12} = \underbrace{F(r)\,\hat{r}}_{\text{Zentralkraft}}$$

Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \qquad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}$$

$\Rightarrow$ $\ddot{\vec{R}} = 0$ wie im N-Körpersystem

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1}\vec{F}_{12} - \frac{1}{m_2}\vec{F}_{21} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad \mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$$

Ferner

$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_S + \vec{L}$$

$$\vec{L}_S = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} = \vec{R} \times \vec{P} \quad = \text{Drehimpuls der Schwerpunktsbewegung}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu\, \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad = \text{Relativdrehimpuls}$$

denn:

Zentralkraft-Felder

Zentral-symmetrisches System $\quad V(\vec{r}) = V(r)$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r) = -\frac{dV}{dr}\,\vec{e}_r$$

Erhaltungsgrößen:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + V(\vec{r}) \qquad \text{Energie}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \qquad \text{Drehimpuls}$$

$[\dot{\vec{L}} = m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} = -\frac{dV}{dr}\vec{r} \times \vec{e}_r = 0$ Wiederholung$]$

In ebenen Polarkoordinaten ist $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\right)^2 + V(r) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r)$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\right) = m r^2 \dot{\varphi}\, \underset{\text{senkrecht zur Bahnebene}}{\vec{e}_z}$$

Mit $L^2 = (mr^2\dot{\varphi})^2 = \text{const.}$ kann man die Energie schreiben als

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \qquad V_{eff}(r) = V(r) + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{\text{Drehimpulsbarriere}}$$

$\rightarrow$ effektiv eindimensionales Problem

$$\Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}$$

$$\Rightarrow \quad t(r) - t(r_0) = \int_{t(r_0)}^{t(r)} dt' = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\dot{r}(r')} = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r')\right)}}$$

Ähnlich kann man den Azimuthwinkel φ als Funktion von r ausdrücken:

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \int_{\varphi(r_0)}^{\varphi(r)} d\varphi' = \int_{r_0}^{r} \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{dr}\,dr' = \int_{r_0}^{r} \dot{\varphi}\,\frac{1}{\dot{r}(r')}\,dr'$$

$$\underset{L = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}}{=} \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$

Im allgemeinen $\lim_{r \to \infty} V(r) = 0$, also auch $V_{eff}(r) \to 0$ für $r \to \infty$

$\Rightarrow$ Für ungebundene Bahnen ist $E \geq 0$

Für gebundene Bahnen $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ und die Umlaufzeit ist

$$T = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r'))}}$$

Nur wenn der ~~dabei~~ durchlaufene Azimuthwinkel

$$\Delta\varphi = \frac{2L}{\sqrt{2m}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$

ein Vielfaches von 2π ist, $\Delta\varphi = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$, ist die Bahn geschlossen

Typische Potentiale:

$$V(r) = \alpha \left[\underbrace{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}}_{\text{Abstoßender Kern}} - 2 \underbrace{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}}_{\text{Anziehung}} \right]$$

Lennard-Jones Potential für Wechselwirkung zwischen Atomen

$$V(r) = -\frac{G_N M m}{r}$$

Gravitationspotential zwischen zwei Massen M und m

$$V(r) = \frac{e_1 e_2}{4\pi r}$$

Elektrostatische Wechselwirkung zwischen zwei Ladungen e_1 und e_2

Keplerproblem

Zwei Massen M, m (i.a. $M \gg m$)

Wähle Inertialsystem in welchem der Schwerpunkt ruht:

$$\vec{R} = \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M+m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_1 = -\frac{m\vec{r}_2}{M}$$

$$\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \frac{M+m}{M}\vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_2 = \frac{M}{M+m}\vec{r} \qquad \vec{r}_1 = \frac{m}{M+m}\vec{r}$$

$$V(r) = -\frac{G_N M m}{r} = -\frac{G_N (M+m)\mu}{r} \qquad \mu = \frac{Mm}{M+m} \text{ reduzierte Masse}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \text{const.} \qquad V_{eff}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{const.}$$