

Stoßprobleme

Eine Masse m_1 mit Geschwindigkeit $\vec{u}_1$ stößt auf eine Masse m_2 in Ruhe

Dann gilt:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \text{Energieerhaltung} \quad (1)$$

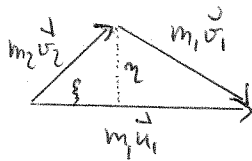
Energy halting (1)

$$m_1 \vec{u}_1 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad \text{Impulserhaltung, (2)}$$

Impulserhaltung, (2)

wobei $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ die Endgeschwindigkeiten von m_1 und m_2 sind

Wobei $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ die Endgeschwindigkeiten von m_1 und m_2 sind.
Wähle Koordinatensystem so daß Stoß in xy -Ebene stattfindet mit
 $\vec{u}_1 = u_1 \vec{e}_x$, $\xi := p_{2x} = m_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{e}_x$; $\eta := p_{2y} = m_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{e}_y$



$$\Rightarrow \xi^2 + \eta^2 = m_2^2 u_2^2 \quad (3); \quad (m_1 u_1 - \xi)^2 + \eta^2 = m_1^2 c_1^2 \quad (4)$$

$$(m_1 u_1 - \xi)^2 + \eta^2 = m_1^2 \sigma_1^2 \quad (4)$$

Nun ist $m_1^2 u_1^2 = m_1^2 \left(u_1^2 - \frac{m_2}{m_1} v_2^2 \right) = m_1^2 u_1^2 - \frac{m_1}{m_2} (\xi^2 + \eta^2)$

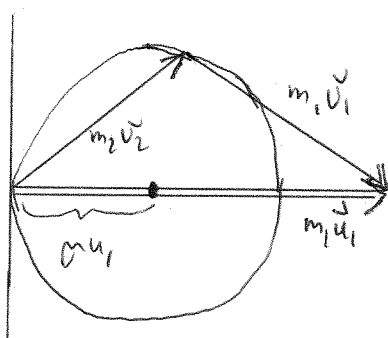
Einsetzen in (4) liefert

$$(\xi^2 + \eta^2) \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) - 2m_1 u_1 \xi = 0$$

Multiplikation mit $\frac{m_2}{m_1+m_2}$ gibt $\xi^2 + \eta^2 - 2m u_1 \xi = 0$ oder

$$(\xi - ru_1)^2 + \eta^2 = (ru_1)^2$$

wobei $\sigma = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ die reduzierte Masse ist



alle Lösungen liegen auf
einem Kreis mit Radius ρ_4
um den Punkt
 $(x, y) = (\rho_4, 0)$

1. zentraler Stoß: Alle Impulse liegen auf der x-Achse; so daß

$$m_1 u_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Anwendung von 1. Figur ergibt (abgesehen von der trivialen Lösung $v_1 = u_1, v_2 = 0$)

$$m_2 v_2 = 2 m_1 u_1 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} u_1$$

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 - m_2 v_2 = (m_1 - 2 m_1) u_1 = \frac{m_1^2 + m_1 m_2 - 2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} m_1 u_1$$

In der Tat sind Energie- und Impulserhaltung erfüllt:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{m_1}{2(m_1 + m_2)^2} \left((m_1 - m_2)^2 + 4 m_1 m_2 \right) u_1^2 = \frac{m_1}{2} u_1^2$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1^2 - m_1 m_2 + 2 m_1 m_2) u_1 = m_1 u_1$$

2. $m_1 = m_2 = m$ (gleiche Massen)

$$\Rightarrow v = \frac{m}{2} \quad m u_1 = \frac{m}{2} u_1 = \frac{m_1 u_1}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

für einen zentralen Stoß gilt damit $v_2 = u_1, v_1 = 0$

$\rightarrow$ stoßender Körper kommt zur Ruhe $\rightarrow$ z.B. Billardkugeln

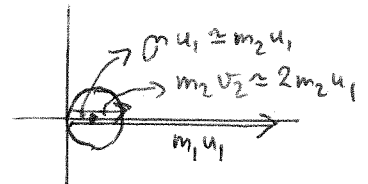
3. $m_1 \gg m_2$

$$\Rightarrow v \approx m_2 \quad m u_1 \approx m_2 u_1 \ll m_1 u_1$$

für einen zentralen Stoß hat man $m_2 v_2 \approx 2 m_2 u_1 \Rightarrow v_2 \approx 2 u_1$

$$m_1 v_1 \approx m_1 u_1 - m_2 2 u_1 \Rightarrow v_1 \approx u_1$$

$$\text{Der Energie-Übertrag ist } \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_1 u_1^2} \approx 4 \frac{m_2}{m_1} \ll 1$$



4. $m_1 \ll m_2$

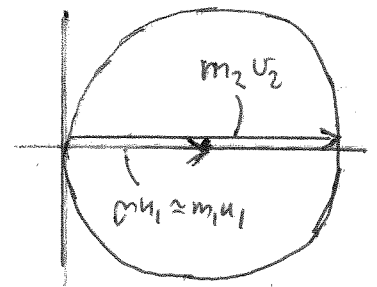
$$\Rightarrow v \approx m_1 \quad m u_1 \approx m_1 u_1$$

für einen zentralen Stoß ist $m_2 v_2 \approx 2 m_1 u_1 \Rightarrow v_2 \approx 2 \frac{m_1}{m_2} u_1$

$$m_1 v_1 \approx m_1 u_1 - 2 m_1 u_1 \Rightarrow v_1 \approx -u_1 \Rightarrow \text{Reflexion mit Impulsübertrag}$$

$\Delta p \approx -2 m_1 u_1 \rightarrow$ wichtig in der kinetischen Gastheorie

$$\text{Energieüberschuss} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_1 u_1^2} \approx 4 \frac{m_1}{m_2} \ll 1$$



Zentrale inelastische Stoß zweier gleicher Massen

→ Wärme

$$\frac{m}{2} u_1^2 = \frac{m}{2} v_1^2 + \frac{m}{2} v_2^2 + Q \quad (1) \quad ; \quad u_1 = v_1 + v_2$$

Einsetzen von $v_1 = u_1 - v_2$ in ~~die~~ (1) ergibt

$$v_2^2 - v_2 u_1 + \frac{Q}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{u_1}{2} + \sqrt{\frac{u_1^2}{4} - \frac{Q}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \frac{u_1}{2} - \sqrt{\frac{u_1^2}{4} - \frac{Q}{m}}$$

Aus der Wurzel folgt auch

$$Q \leq \frac{m}{4} u_1^2 \quad \text{und im Maximalfall gilt } v_1 = v_2 = \frac{u_1}{2}$$