Allgemeine Form der Newton'schen Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, t) \quad \rightarrow \text{ gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung}$$

$$m\ddot{x}_i = F_i(x_1, x_2, x_3, t) \qquad i = 1,2,3$$

Mehrteilchensysteme für N Teilchen

$$m_j \ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j(\vec{r}_1, .., \vec{r}_N, t) \qquad j = 1, .., N$$

$\rightarrow$ 3N Differentialgleichungen 2ter Ordnung $\rightarrow$ 3N "Freiheitsgrade"

<u>Phasenraum</u>

Für n Freiheitsgrade hat man den n-dimensionalen Ortsvektor $\vec{r} = (y_1, .. y_n)$; Der von $\vec{u} = (\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ aufgespannte 2n dimensionale Vektorraum heißt Phasenraum. Definiere

$$u_j = y_j \qquad j = 1, .., n$$
$$u_{j+n} = \dot{y}_j \qquad j = 1, .., n$$

$$\Rightarrow \quad \dot{u}_j = \dot{y}_j = u_{n+j}$$
$$\dot{u}_{j+n} = \ddot{y}_j = f_j(u_1, .., u_{2n}, t) \qquad j = 1, .., n$$

Kraft kann auch von Geschwindigkeiten abhängen, z.B. Reibung, Lorentz-Kraft

hat die Form

$$\dot{\vec{u}} = \vec{g}(\vec{u}, t) \quad \rightarrow \text{ 2n gewöhnliche Differentialgleichungen } \underline{\text{erster}} \text{ Ordnung}$$

Symmetrien dieser Gleichungen führen i.a. zu Erhaltungsgrößen z.B. führt Zeit-unabhängigkeit i.a. zu Energieerhaltung

$\breve{F}$ heißt konservative oder Gradienten-Kraft wenn

$$\breve{F}(\breve{r}) = -\breve{\nabla} V(\breve{r})$$

mit $V(\breve{r})$ eine Skalarfunktion genannt "Potential"

Dann ist

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2}\dot{\breve{r}}^2 + V(\breve{r})$$

erhalten:

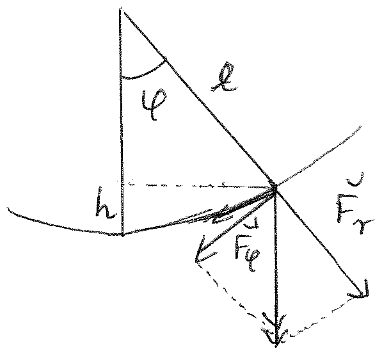
$$\frac{dE}{dt} = m\dot{\breve{r}}\cdot\ddot{\breve{r}} + \dot{\breve{r}}\cdot\breve{\nabla} V = \dot{\breve{r}}\cdot\left(m\ddot{\breve{r}} + \breve{\nabla} V\right)$$

$$= \dot{\breve{r}}\cdot\left(m\ddot{\breve{r}} - F(\breve{r})\right) = 0$$

Beispiele

Schräger Wurf $\rightarrow$ siehe experimenteller Teil

mathematisches Pendel:



$$\breve{F} = -mg\,\breve{e}_z$$

$$= -\breve{\nabla} E_{pot}$$

mit $E_{pot} = mgh = mg\ell(1-\cos\varphi)$

wenn $\ell = $ const. ist $\breve{F}_\varphi = m\,a_\varphi$ in Polarkoordinaten

$F_\varphi = -mg\sin\varphi \qquad a_\varphi = \ell\ddot{\varphi}$

$\Rightarrow \quad m\ell\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \qquad$ oder $\qquad \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$

Energie-Erhaltung:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2 + mg\ell(1-\cos\varphi) = \text{const.} = mg\ell(1-\cos\varphi_0)$$

$\varphi_0 = $ maximale Auslenkung ; Falls $\varphi_0 \leq \pi$

$$\Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$$

damit kann man die Schwingungsperiode berechnen:

$$T = \int_0^T dt = 4\int_0^{T/4} dt = 4\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}$$

Verwende $\cos\varphi - \cos\varphi_0 = 2\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$

definiere $k = \sin^2\frac{\varphi_0}{2}$ und transformiere auf neue Variable

ξ mit $\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{k}\,\sin\xi$ so daß $0 \le \xi \le \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{d\xi}\,\frac{d\xi}{\sqrt{k-k\sin^2\xi}}$$

nun ist $\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \sqrt{k}\cos\xi\,d\xi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = 2\sqrt{k}\,\frac{\cos\xi}{\cos\varphi/2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{2\sqrt{k}\cos\xi\,d\xi}{\sqrt{k}\cos\xi\,\cos\varphi/2} = \int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi/2}} =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k\sin^2\xi}} = K(k) \quad = \text{vollständiges elliptisches Integral}$$

$$\Rightarrow \quad T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,K\!\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

Taylor Entwicklung von $K(k)$ um $k=0$:

$$K(k) \simeq \int_0^{\pi/2} d\xi\left(1+\frac{k}{2}\sin^2\xi\right) = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{k}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\frac{k}{4}\right)$$

Für $k\to 0$ ist $T \to 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$. Das entspricht der harmonischen Näherung $\sin\varphi \simeq \varphi$:

$$\ddot\varphi + \frac{g}{\ell}\sin\varphi \simeq \ddot\varphi + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$$

Lösungen sind

$$\varphi(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$$

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, also $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

Dies entspricht dem Federpendel

$$m\ddot x + kx = 0 \qquad \text{mit } E_{pot} = \frac{k}{2}x^2 \qquad F = -\frac{dE_{pot}}{dx} = -kx$$