Spezielle Relativitätstheorie – Lorentztransformation

Galilei-Transformationen in der Newton'schen Mechanik führen zur Vektoraddition von Geschwindigkeiten:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0$$

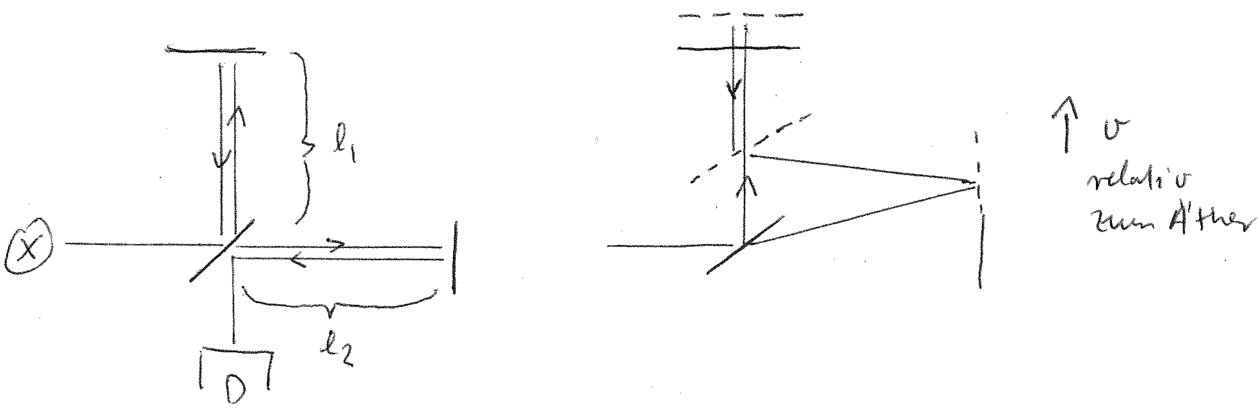
$$\Rightarrow \vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{v}_0$$

universelle Zeit

insbesondere hängt Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem (Inertialsystem) ab. $\exists$ bevorzugtes Inertialsystem in welchem Lichtgeschwindigkeit $= c_0$

$\rightarrow$ Äther ? Für den Schall ist der Äther die Luft

Michelson-Versuch:



Lichtlaufzeit in Arm 1 $= \dfrac{l_1}{c_0 - v} + \cancel{\dfrac{l_1}{c + v}}\ \dfrac{l_1}{c_0 + v} = t_1 = \dfrac{2 l_1}{c_0} \dfrac{1}{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}$

" " Arm 2 : $\left(v \frac{t_2}{2}\right)^2 + l_2^2 = \left(c_0 \frac{t_2}{2}\right)^2 \Rightarrow t_2 = \dfrac{2 l_2}{c_0} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{2}{c_0} \left(\frac{l_1}{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} - \frac{l_2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \right)$$

Drehung um 90° entspricht Austausch von l_1 und l_2:

$$\Delta t' = \frac{2}{c_0} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} - \frac{l_2}{1 - v^2/c_0^2} \right)$$

Die Differenz der Lichtlaufzeiten ändert sich damit um

$$\delta t = \Delta t - \Delta t' = \frac{2(l_1+l_2)}{c_0}\left(\frac{1}{1-v^2/c_0^2} - \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}\right)$$

was die Interferenzmuster um die Phase

$$\Delta \Phi = \underbrace{\omega}_{\text{Frequenz des Laserlichts}} \delta t$$

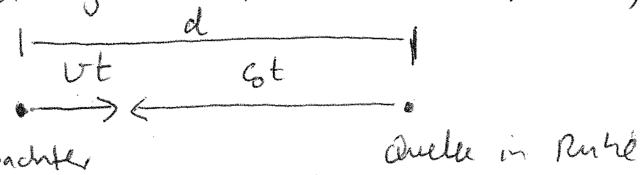
ändert.

Experimentell ist $\Delta \delta = \Delta \Phi = 0 \Rightarrow$

Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist universell und in jedem Inertialsystem identisch

Damit sind alle Inertialsysteme gleichberechtigt und nur Relativgeschwindigkeiten sind physikalisch relevant.

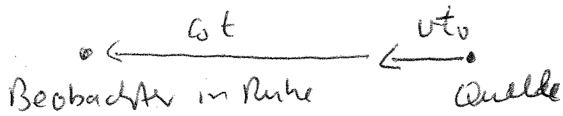
Dies ist nicht der Fall in der Äthertheorie, wie folgendes Beispiel zeigt (Geschwindigkeiten relativ zum Äther)



Wenn $v=0$ und d = Distanz Beobachter – Quelle dann ist

$t_0 = \frac{d}{c_0}$; wenn $v > 0$ dann $d = c_0 t + vt$

$\Rightarrow t = \dfrac{t_0}{1+v/c_0} \Rightarrow$ Frequenz $f = \frac{1}{t} = f_0\left(1+\frac{v}{c_0}\right)$



$$t = t_0 - \frac{v t_0}{c_0} \Rightarrow f = \frac{1}{t} = \frac{f_0}{1-v/c_0} \qquad f_0 = \frac{1}{t_0}$$

$\Rightarrow$ die beiden Dopplereffekte wären in zweiter Ordnung in $\frac{v}{c_0}$ verschieden

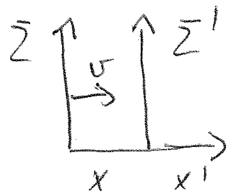
Eine Möglichkeit, die Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Inertialsystem zu halten ist

$$c_0^2 \Delta t^2 - (\Delta \vec{r})^2 = \text{unabhängig vom Inertialsystem}$$

zu setzen, denn dann ist für Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit $c_0^2 \Delta t^2 - (\Delta \vec{r})^2 = 0$ in allen Inertialsystemen

Gesucht ist also eine Transformation (ohne Einschränkung mit nur einer Raumkoordinate):

$$x' = ax + bt$$
$$t' = cx + dt$$



$a, d > 0$

so daß

$$(c_0 t')^2 - x'^2 = (c_0 t)^2 - x^2$$

Definiere $a := \gamma$. ~~Für~~ Per Definition bewegt sich ein Punkt in Ruhe in Σ', $\Delta x' = 0$, mit Geschwindigkeit v in Σ, $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$0 = \Delta x' = \gamma \Delta x + b \Delta t \quad \Rightarrow \quad b = -\gamma \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\gamma v$$

also

$$x' = \gamma (x - vt)$$

Weiter

$$(c_0 t')^2 - x'^2 = c_0^2 (cx + dt)^2 - \gamma^2 (x - vt)^2$$
$$= c_0^2 \left(d^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c_0^2}\right) t^2 + (c_0^2 c^2 - \gamma^2) x^2 + 2 (c_0^2 c d + \gamma^2 v) x t$$

$$\Rightarrow (1)\ d^2 = 1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c_0^2} \ ; \quad (2)\ c_0^2 c^2 = \gamma^2 - 1 \ ; \quad (3)\ c_0^2 c d = -\gamma^2 v$$

multipliziere (1) und (2)

$$\Rightarrow c_0^2 c^2 d^2 = -1 + \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right) + \gamma^4 \frac{v^2}{c_0^2}$$

$$\Rightarrow c_0^2 c^2 d^2 = \gamma^4 \frac{v^2}{c_0^2}$$

quadriere (3)

Gleichsetzen $\Rightarrow$ $\gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c_0^2}$ $\Rightarrow$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$ weil $a = \gamma > 0$

$$\Rightarrow \quad d^2 = \gamma^2\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c_0^2}\right) = \gamma^2 \quad \Rightarrow \quad d = \gamma \quad \text{weil } d > 0$$

$$(3) \Rightarrow \quad c = -\frac{\gamma^2 v}{c_0^2 d} = -\gamma \frac{v}{c_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad x' = \gamma(x - vt)$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c_0^2}\right) \qquad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

Hinweis: Oft werden "natürliche Einheiten" verwendet für die $c_0 = 1$

Die Koordinaten $\perp$ $\vec{v}$ bleiben unverändert, d.h.

$$y' = y$$
$$z' = z$$

Beachte: Für $v/c_0 \to 0$ ist $\gamma = 1 + O(v^2)$ $\Rightarrow$ In erster Ordnung in v erhält man Galilei-Transformation:

$$x' = x - vt + O(v^2)$$
$$t' = t - \frac{vx}{c_0^2} + O(v^2)$$

Anwendungen

1.) Geschwindigkeitsaddition oder -subtraktion

In System Σ bewege sich ein Teilchen mit Geschwindigkeit

$u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ $\Rightarrow$ In Σ' ist Geschwindigkeit

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - v\Delta x/c_0^2} = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c_0^2}}$$

dividiere oben und unten durch Δt und verwende $u = \Delta x/\Delta t$

Für $u, v \ll c_0$ gilt Galilei-Transformation ~~bis auf~~ Terme zweiter Ordnung:

$$u' = u - v + O(v^2, u^2)$$

2.) Zeitdilatation

Betrachte einen Prozeß, der in $\bar{\Sigma}$ in Ruhe stattfindet und eine Zeit Δt dauert, z.B. radioaktiver Zerfall

$$\Rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t \geq \Delta t$$

Vierervektor-Formalismus

Verwende natürliche Einheiten $c_0 \equiv 1$ der Einfachheit halber

$$\Rightarrow t' = \gamma(t - vx) \qquad y' = y \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad z' = z$$

$(t, \vec{x})$ bildet "Vierervektor" dessen "Norm" $t^2 - \vec{x}^2$ erhalten ist

Analog bildet $(E, \vec{p})$ "Energie-Impuls-Vierervektor"

$$\Rightarrow E' = \gamma(E - v p_x)$$

$$p_x' = \gamma(p_x - vE)$$

$$p_y' = p_y$$

$$p_z' = p_z$$

Spezialfall: Teilchen in Ruhe in $\bar{\Sigma}$, also $\vec{p} = 0$, $E = m_0 =$ = Ruhemasse

$$\Rightarrow E' = \gamma E = \gamma m_0$$

$$p_x' = -\gamma v E = -\gamma v m_0$$

$$p_y' = p_z' = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}^2 + m_0^2 = m_0^2(1 + \gamma^2 v^2) = \frac{m_0^2}{1-v^2}(1 - v^2 + v^2) = \frac{m_0^2}{1-v^2} =$$

ersetze durch ungestrichene Größen

$$= \gamma^2 m_0^2 = E^2$$

in "alltäglichen" Koordinaten:

$$E^2 = c_0^2 \vec{p}^2 + m_0^2 c_0^4$$

Beachte: E hat positive und negative Wurzel

E < 0 entspricht Antiteilchen

→ in der Relativitätstheorie hat jedes Teilchen ein Anti-Teilchen

Nicht-relativistisches Limit:

$$E = \sqrt{m_0^2 + \vec{p}^{\,2}} = m_0 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{m_0^2}} = m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^{\,2}}{m_0^2} + O(p^4)\right)$$

$$E = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} = m_0\left(1 + \frac{1}{2}v^2 + O(v^2)\right)$$

$$\simeq m_0 + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v_0^2}_{\text{nichtrelativistische kinetische Energie}}$$