Grundlagen der Dynamik

Axiome der Newton'schen Mechanik:

1. Trägheitsgesetz: Jeder kräftefreie Körper verharrt infolge seiner Trägheit ("träge Masse") im Zustand geradlinig-gleichförmiger Bewegung (mit Ruhe als Spezialfall)

2. Bewegungsgesetz: Die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers ist gleich der auf ihn einwirkenden Kraft

   $$\text{Impuls} = \underset{\substack{\swarrow \\ \text{träge Masse}}}{m}\, \vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{p}$$

   also

   $$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a}$$

3. Actio-Reactio-Gesetz: Jede Wirkung ruft eine gleich große Gegenwirkung hervor

   d.h. die von einem Körper 1 auf einen Körper 2 ausgeübte Kraft $\vec{F}_{21}$ ist gleich dem Negativen der von Körper 2 auf Körper 1 ausgeübten Kraft $\vec{F}_{12}$:

   $$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Beachte: Axiom 1 folgt eigentlich aus Axiom 2

Darüber hinaus hat man

4. Superpositionsgesetz: Kräfte addieren sich vektoriell

In Newton's Mechanik sind Raum und Zeit absolut und bilden eine unveränderliche "Bühne" auf der sich alle Prozesse abspielen.

Der Raum ist Euklidisch und Axiom 2 gilt in sogenannten unbeschleunigten oder Inertialsystemen, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.

In der Tat ist Axiom 2 invariant unter Transformationen zwischen Inertialsystemen, auch als Galilei-Transformation bekannt:

$$\vec r\,' = \vec r + \underbrace{\vec v_0}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{t}_{\text{absolute Newton'sche Zeit}} + \vec r_0$$

$$\Rightarrow \quad \vec v\,' = \frac{d\vec r\,'}{dt} = \frac{d\vec r}{dt} + \vec v_0 = \vec v + \vec v_0$$

$$\vec a\,' = \frac{d^2 \vec r\,'}{dt^2} = \vec a$$

$\Rightarrow$ Galileisches Relativitätsprinzip: Die Newton'sche Bewegungsgleichung ist forminvariant unter Galilei-Transformationen

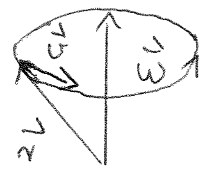
Übrigens ist bis heute nicht vollständig verstanden was Inertialsysteme auszeichnet. Es scheint eine kosmologische Frage zu sein, da die Mikrowellenhintergrund-Strahlung ein bevorzugtes System etabliert. Nach dem Mach'schen Prinzip ist die Existenz von Raum, Zeit und Inertialsystemen an die kosmische Massenverteilung gebunden.

Beachte: Auf der Erde sind wir in einem rotierenden System, und damit nicht in einem Inertialsystem

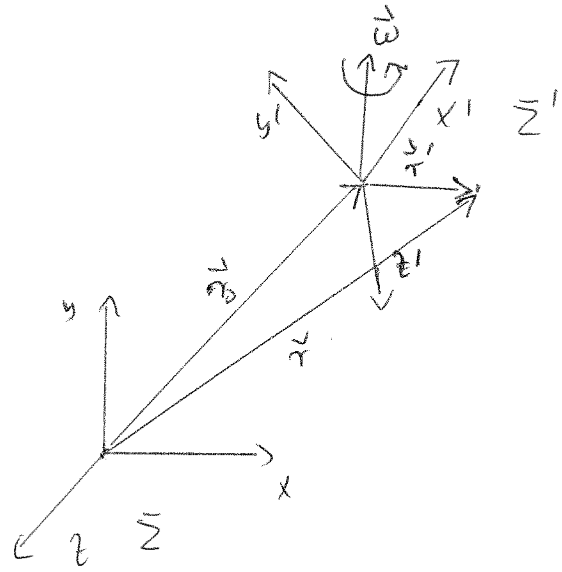
$\Rightarrow$ "Scheinkräfte", z.B. Zentrifugalkraft, Corioliskraft

Ausblick: In der Relativitätstheorie werden Raum und Zeit relativ und Galileische Transformationen werden durch (etwas kompliziertere) Lorentz-Transformationen ersetzt

rotierendes Bezugssystem



$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



Für jeden Vektor $\vec{b}$ gilt: $\vec{b} = \sum_i b_i \vec{e}_i = \sum_i b_i' \vec{e}_i'$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{b}}{dt} = \sum_i \frac{db_i}{dt} \underset{\text{zeitunabhängig}}{\vec{e}_i} = \sum_i \frac{db_i'}{dt} \vec{e}_i' + \sum_i b_i' \underbrace{\frac{d\vec{e}_i'}{dt}}_{= \vec{\omega} \times \vec{e}_i'}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)'}_{\text{Ableitung im } \Sigma'\text{-System}} + \vec{\omega} \times \vec{b}$$

Ferner:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}_0 + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$= \dot{\vec{r}}_0 + \underset{\text{Geschwindigkeit im } \Sigma'\text{-System}}{\vec{v}'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Nochmalige Differentiation ergibt Transformationsgesetz für die Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}_0 + \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)' + \vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$$

$$= \ddot{\vec{r}}_0 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$

wobei $\vec{a}' = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)'$ die Beschleunigung gemessen im Σ'-System ist

Einsetzen in $\vec{F} = m\vec{a}$ gibt schließlich:

$$\underbrace{m\left(\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}\right)'}_{=\vec{a}'} = \vec{F} - m\Big[\ddot{\vec{r}}_0 + \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}'}_{\text{Coriolis-Kraft}} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'\Big]$$

Beispiel: rotierendes terrestrisches Bezugssystem: Auf einen Luftstrom der sich auf der Nordhalbkugel von Nord nach Süd bewegt wirkt eine Corioliskraft die nach Westen zeigt. Deshalb drehen sich Luftmassen auf der Nordhalbkugel im Gegen-Uhrzeigersinn um Tiefdruckgebiete. Auf der Südhalbkugel ist es genau andersherum