3. Hauptsatz:

$S \to S_0 = \text{const.}$ für $T \to 0$

S_0 unabhängig von Struktur des Systems

Bemerkungen zum 2. Hauptsatz:
Bewegungsgleichungen sind i.a. invariant unter Zeitumkehr was naiv $\Delta S = 0$ implizieren würde, da es keine irreversiblen mikroskopischen Prozeße geben sollte. Aber die Entropie bezieht sich nicht auf Prozeße, sondern auf Kenntnisse davon.
kleine Demonstration: Die Besetzungswahrscheinlichkeiten p_i bestimmter Zustände i unterliegen der Ratengleichung

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_k w_{k\to i}\, p_k - p_i \sum_k w_{i\to k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum_i p_i = \sum_{i,k} \left(w_{k\to i}\, p_k - w_{i\to k}\, p_i \right) \underset{\substack{\text{vertausche } i \text{ und } k \\ \text{im 2. Ausdruck}}}{=} 0$$

Sei nun $w_{k\to i} = w_{i\to k} = w_{ik}$ symmetrisch

$$\Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = -\sum_i \frac{d}{dt}\left(p_i \ln p_i\right) = -\sum_i \frac{dp_i}{dt}\left(1 + \ln p_i\right) =$$

$$= -\sum_{i,k} w_{ik}\left(p_k - p_i\right)\left(1 + \ln p_i\right) \underset{\text{Symmetrisierung}}{=} \frac{1}{2}\sum_{i,k} w_{ik}\left(p_i - p_k\right)\left(\ln p_i - \ln p_k\right) \geq 0$$

weil $w_{ik} \geq 0$, $(p_i - p_k)(\ln p_i - \ln p_k) \geq 0$ (ln ist monoton wachsend)

Es gibt interessante kosmologische Aspekte des 2. Hauptsatzes !

nicht-gravitative WW:

$$\# \text{ Zustände von } N \text{ Teilchen} = (\# \text{ Zustände pro Teilchen})^N$$

$$\Rightarrow Z_N \sim (Z_1)^N$$

$$\Rightarrow S = \ln Z + \beta E \propto N$$

Entropie S kann interpretiert werden als Logarithmus der Anzahl der ~~Zustände~~ Mikrozustände konsistent mit einem Makrozustand charakterisiert durch Variablen $p, T, \ldots$

Beispiel: Vergleiche $N \sim 10^{24}$ Teilchen in Volumen V und in Volumen $V/10$

$$\Rightarrow \frac{\# \text{ Zustände in } V}{\# \text{ Zustände in } V/10} = 10^N = 10^{10^{24}}$$

$$\Rightarrow S(V) - S\left(\frac{V}{10}\right) \simeq 10^{24} \simeq N$$

thermische Entropie: bei Temperatur T und Systemgröße R

$$S \sim T^3 R^3 \qquad E \sim T^4 R^3 \Rightarrow S \simeq E^{3/4} R^{3/4}$$

Schwarzschild-Radius

$$\frac{1}{2} m c_0^2 \lesssim \frac{GMm}{R} \Rightarrow R \leq R_S := \frac{2GM}{c_0^2} \simeq \frac{2GE}{c_0^2}$$

$$\cancel{\Rightarrow T \sim E^{1/4} R^{-3/4} \Rightarrow S \simeq E^{3/4} R^{3/4} \lesssim R^{3/2}}$$

$$E \lesssim \frac{c_0^2 R}{2G} \Rightarrow S \propto R^{3/2}$$

aber bei einem schwarzen Loch

$$S \simeq \frac{4\pi R_S^2}{4 l_{pl}} \propto R_S^2 \rightarrow \text{schwarze Löcher dominieren Entropie}$$