

=> Energie pro Freiheitsgrad = $\frac{1}{2} k_B T$ im Mittel

$$S = \ln Z + \beta E = N \left[\ln V + \frac{3}{2} \left(1 + \ln \frac{2\pi m}{h^2 \beta} \right) \right]$$

Druck $p = - \frac{\partial E}{\partial V} = - \sum_k p_k \frac{\partial \epsilon_k}{\partial V} = - \frac{1}{Z} \sum_k \frac{\partial \epsilon_k}{\partial V} e^{-\beta \epsilon_k}$

↓
Definition

$$= \frac{1}{Z\beta} \frac{\partial}{\partial V} \sum_k e^{-\beta \epsilon_k} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V}$$

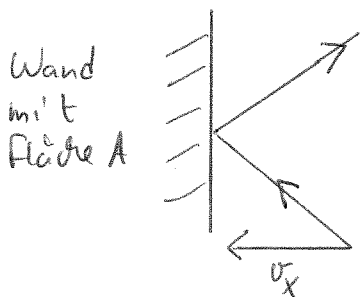
↓
das gilt allgemein

Unter Verwendung von $\ln Z$ für das ideale Gas:

$$p = \frac{N}{\beta V} = \frac{N k_B T}{V} \quad \Rightarrow \quad pV = N k_B T$$

ideale Gasgleichung!

Unabhängige phänomenologische Ableitung:



Berechne den Impulsübertrag auf Fläche A während eine Zeit Δt :

Sei $\frac{dp}{dv_x}(v_x) dv_x$ die Wahrscheinlichkeit daß ein ~~Gaspartikel~~ die x-Komponente der Geschwindigkeit eines Gaspartikels zwischen v_x und $v_x + dv_x$ liegt; $n = \# \text{ Teilchen / Volumen}$

=> $n A v_x \Delta t \frac{dp}{dv_x} dv_x$ Teilchen werden innerhalb Δt den Impuls $2m v_x$ durch elastische Reflexion auf die Wand übertragen

$$\Rightarrow \text{Druck } p = \frac{\text{Kraft } F}{\text{Fläche } A} = \frac{\text{Impulsübertrag}}{A \Delta t} =$$

$$= 2nm \int_0^{\infty} \frac{dp}{dv_x} v_x^2 dv_x = nm \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} nm \langle v^2 \rangle$$

↙ nur positive v_x tragen bei

↘ nur die Hälfte aller Teilchen haben $v_x > 0$

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle \\ &= 3 \langle v_x^2 \rangle \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle E \rangle = \frac{N k_B T}{V}$$

↓
ideales Gas

Gemäß der Boltzmannverteilung ist die Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{d^3 p}{dv_x dv_y dv_z} = f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-m v^2 / (2 k_B T)}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) / (2 k_B T)}$$

Diese Verteilung ist normiert:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x dv_y dv_z f(v_x, v_y, v_z) = 1$$

In einem homogenen Gravitationsfeld mit Potential $V(\vec{r}) = mgz$ ist die Dichteverteilung gemäß Boltzmann

$$f(z) = \frac{mg}{k_B T} e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$$

Hauptsätze der Thermodynamik

1. Hauptsatz:

$$E = \text{const.} \quad \text{für ein isoliertes System}$$

↓
innere Energie

ansonsten $\Delta E = \underbrace{W}_{\text{Arbeit}} + \underbrace{Q}_{\text{Wärme}}$

2. Hauptsatz:

$$\Delta S \geq 0 \quad \text{für ein isoliertes System (Entropiezunahme)}$$

ansonsten $dS = \frac{dq}{T}$