n verschiedene Objekte $\rightarrow$ $n!$ Anordnungen

n verschiedene Objekte, davon k gleich $\rightarrow$ $\frac{n!}{k!}$ Anordnungen

n verschiedene Objekte, davon k_1 und k_2 gleich $\rightarrow$ $\frac{n!}{k_1! k_2!}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{P_N(k)}_{\text{Binomialverteilung}} = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k q^{N-k} = \underbrace{\binom{N}{k}}_{\text{"N über k"}} p^k q^{N-k}$$

Anwendung: binomische Formel:

$$(a+b)^N = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{N\text{-mal}} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}$$

$a^k b^{N-k}$ tritt $\binom{N}{k}$ mal auf

Spezialfall: Für $q = 1-p$

$$1 = 1^N = (p+1-p)^N = (p+q)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$\Rightarrow$ Binomialverteilung ist korrekt normiert:

$$\sum_{k=0}^{N} P_N(k) = \sum_{k=0}^{N} \cancel{P_N(k)} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = 1$$

Man kann zeigen:

$$\underbrace{\bar{k}}_{\text{Mittelwert}} = \sum_{k=0}^{N} k P_N(k) = pN$$

$$\underbrace{\Delta k}_{\text{"Standardabweichung"}} := \left[\sum_{k=0}^{N} (k-\bar{k})^2 P_N(k) \right]^{1/2} = \sqrt{p(1-p)N}$$

Einschub: Wahrscheinlichkeit und Statistik

Sei x_i, $i=1,\dots,N$ eine Meßreihe einer Observablen X. Dann definiert man Mittelwert, Varianz und Standardabweichung durch

$$\bar{x} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \text{Mittelwert}$$

$$\Delta x^2 = \overline{(x-\bar{x})^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 \qquad \text{Varianz}$$

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x^2} \qquad \text{Standardabweichung}$$

Die Varianz kann man auch schreiben als

$$\Delta x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right) = \overline{x^2} - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Die Observable X könne nun die diskreten Werte x_j, $j=1,\dots,K$ mit Wahrscheinlichkeiten p_j annehmen. Dann definiere man

$$\mu = \sum_{j=1}^{K} p_j x_j \qquad \sigma^2 = \sum_{j=1}^{K} p_j (x_j-\mu)^2$$

Wenn alternativ X kontinuierliche Werte annimmt, wobei $p(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit ist daß X Werte in dem infinitesimalen Intervall zwischen $x-\frac{dx}{2}$ und $x+\frac{dx}{2}$ annimmt, dann definiert man

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,x\,dx \qquad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)(x-\mu)^2 dx$$

Für Meßreihen der Länge N gilt dann

$$\lim_{N\to\infty}\bar{x} = \mu \qquad \lim_{N\to\infty}\Delta x^2 = \sigma^2$$

Man kann zeigen daß für endliche N

$$|\bar{x}-\mu| \sim \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \text{typischerweise}$$

Beispiel für eine kontinuierliche Verteilung:

Normal- oder Gaußverteilung:

$$P_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

μ und σ sind dabei Mittelwert ~~bzw.~~ Standardabweichung

Beweis:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2} dx\,dy \underset{\downarrow}{=}$$

ebene Polarkoordinaten

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} e^{-r^2/2\sigma^2} r\,dr\right) d\varphi =$$

$$= 2\pi\, \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2\sigma^2} dr^2 = 2\pi\,\sigma^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P_G(x)\,dx = 1$$

Normierung

$$\Rightarrow 0 = \frac{d1}{d\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\frac{1}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, P_G(x)\,dx - \mu$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \mu$$

$$0 = \frac{d^2 1}{d\mu^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\frac{1}{\sigma^4}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\frac{1}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \frac{\Delta x^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \Delta x^2 = \sigma^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta h}{\bar{h}} \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \to 0 \quad \text{für } N \to \infty$$

Grenzfälle: unter Verwendung der Stirlingschen Näherung

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \qquad \text{für } n \gg 1$$

kann man zeigen:

a) für $N \gg 1$ ist $\quad P_N(h) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi pqN}} e^{-(h-pN)^2/(2pqN)}$

→ Gaußverteilung (Normalverteilung) mit

$$\bar{h} = pN$$
$$\Delta h = \sqrt{pqN}$$

b) für $N \gg 1$, $p \to 0$ mit $pN = \lambda = \text{const.}$ gilt

$$P_N(h) \simeq P_\lambda(h) = \frac{\lambda^h}{h!} e^{-\lambda}$$

→ Poissonverteilung mit

$$\bar{h} = \lambda = pN$$
$$\Delta h = \sqrt{\lambda}$$

<u>Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit</u>

Für die experimentelle "Häufigkeit" $h_N(A)$ für ein Ereignis A bei N statistisch unabhängigen Experimenten gilt:

$$h_N(A) = \frac{N(A)}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} p(A)$$

wo $N(A)$ = Anzahl der Fälle in denen A auftrat

Problem: N ist oft klein