

Wahrscheinlichkeit, Entropie

(theoretische Grundlagen der Wärmelehre)

Wahrscheinlichkeiten $p(A)$ von Ereignissen A haben folgende (axiomatische) Eigenschaften:

$$(A1) \quad 0 \leq p(A) \leq 1 \quad \forall A$$

$$(A2) \quad \text{Für das "sichere" Ereignis } I \text{ gilt } p(I) = 1$$

$$(A3) \quad \text{Falls sich zwei Ereignisse } A \text{ und } B \text{ ausschließen, gilt}$$

$$p(A \text{ oder } B) = p(A) + p(B)$$

$$\Rightarrow p(\text{nicht } A) = 1 - p(A)$$

Die Ereignisse A und B heißen "unabhängig" falls gilt

$$p(A \text{ und } B) = p(A) \cdot p(B)$$

"Elementarereignisse"

Die Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_n$ heißen Elementarereignisse, falls sie paarweise disjunkt sind, also $A_k \Rightarrow \text{nicht } A_i \quad \forall i \neq k$

$\Omega = \{A_1, \dots, A_n\}$ = Ereignisraum. Ein Ereignis A ist eine Teilmenge von Ω

Ferner definiert man Wahrscheinlichkeiten zu:

$$p_k > 0 \quad \sum_{k=1}^n p_k = 1$$

Spezialfall: $p_k = \frac{1}{n} \quad \forall k$

$$\Rightarrow p(A) = \frac{\text{Anzahl Elemente in } A}{n}$$

Beispiele

1.) ein idealer Würfel; Elementarereignis = Augenzahl k

$$p(k) = \frac{1}{6} \quad 1 \leq k \leq 6$$

2.) zwei ideale Würfel : Elementarereignis = Summe der Augenzahlen

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

=)

h	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p^{(2)}(h)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

alternativ:

$$p^{(2)}(h) = \sum_{j=1}^6 p(j) p(h-j) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{h-1} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{h-1}{36} & \text{für } 2 \leq h \leq 7 \\ \sum_{j=h-6}^6 \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{13-h}{36} & \text{für } 7 \leq h \leq 12 \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeit $p^{(n)}(h)$, h Augen mit n Würfeln zu würfeln konzentriert sich für wachsendes n immer mehr um $3n$

3.) Binomial-Verteilung

Zwei Elementarereignisse A und $B = \text{nicht } A$ mit

$$p(A) =: p$$

$$p(B) = 1-p =: q$$

Nach N Versuchen ist die Wahrscheinlichkeit von h Ereignissen A und $N-h$ Ereignissen B mit einer bestimmten Anordnung

$$p^h q^{N-h}$$

Was ist die Wahrscheinlichkeit, wenn uns die Reihenfolge der Anordnung nicht interessiert?