Separationsansatz:

$$\psi(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$\Rightarrow \quad c^2 T(t) \frac{d^2X}{dx^2} = X(x) \frac{d^2T}{dt^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c^2}{X(x)} \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{T(t)} \frac{d^2T}{dt^2} = \text{const} =: -c^2p^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2X}{dx^2} + p^2 X = 0 \qquad \frac{d^2T}{dt^2} + c^2p^2 T = 0$$

$\rightarrow$ gewöhnliche Differentialgleichungen mit den Lösungen

$$X(x) = A\cos px + B\sin px \quad = b\cos(px+\beta)$$
$$T(t) = C\cos cpt + D\sin cpt \; = a(\cos cpt + \alpha)$$

Randbedingungen erlauben i.a. nur diskrete Werte p_n, $n \in \mathbb{N}$ für p.
Dann lautet die allgemeine Lösung:

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n X_n(x)\, T_n(t)$$

Die Konstanten c_n werden durch Anfangsbedingungen $\psi(x,0)$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)$ festgelegt

<u>Beispiel</u>: An beiden Enden eingespannte Saite
Randbedingungen $\psi(x=0,t) = 0 \qquad \psi(x=L,t) = 0$

$$\Rightarrow \quad X_n(x) = \sin p_n x \qquad \text{mit} \quad p_n = \frac{n\pi}{L} \quad ; n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung hat die Form

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} \cos\left(\frac{cn\pi t}{L} + \alpha_n\right)$$

$$\Rightarrow \quad \psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} \cos\alpha_n$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\alpha_n \cdot \frac{cn\pi}{L}$$

Linke Seiten sind vorgegeben. Wähle c_n, α_n so, daß diese Bedingungen erfüllt sind

Einschub: Fourier-Reihen

allgemeine Fourier-Reihe hat die Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Jede periodische Funktion $f(x+2\pi) = f(x)$ die "~~hinreichend glatt~~" beschränkt und stetig ist, kann so dargestellt werden. Man sagt man entwickelt in die orthogonalen Funktionen $\cos kx$ und $\sin kx$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin k'x \, dx = \pi \, \delta_{kk'}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos k'x \, dx = \pi \, \delta_{kk'}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \sin kx \, dx = 0$$

Beweisbeispiel:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos k'x \underset{\text{Additionstheorem}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos((k+k')x) + \cos((k-k')x) \right] dx$$

$$= \frac{\delta_{kk'}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi \, \delta_{kk'}$$

Daraus folgen die Konstanten a_k, b_k:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \, ; \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

$k = 0, 1, ..$ $\qquad$ $k = 1, 2, ..$

Alternativ: komplexe Fourier-Reihen:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k e^{ikx}$$

Mit der Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ih'x} e^{ihx}\, dx = 2\pi\, \delta_{h'h}$$

hat man dann

$$g_h = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ihx}\, dx =$$

Ausgedrückt durch die reellen Fourierkoeffizienten:

$$g_{\pm h} = \frac{1}{2}(a_h \mp i b_h) \qquad h = 0, 1, \ldots \qquad \text{mit } b_0 = 0$$

weil $e^{\pm ihx} = \cos hx \pm i \sin hx$

Anwendung: Bestimmung der Koeffizienten c_n, α_n in den Anfangsbedingungen der Wellengleichung

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} \cos\alpha_n$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = -\frac{c\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\alpha_n$$

definiere $x' = \frac{\pi x}{L}$ und definiere $\psi(x') = -\psi(-x')$; $\frac{\partial\psi}{\partial t}(x') = -\frac{\partial\psi}{\partial t}(-x')$

für $-\pi \leq \cancel{x}' \leq 0$

$$\Rightarrow \psi(x',0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx' \cos\alpha_n \qquad -\pi \leq x' \leq \pi$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x',0) = -\frac{c\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \sin nx' \sin\alpha_n$$

$$\Rightarrow \qquad c_n \cos\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x',0) \sin nx'\, dx' =$$

allgemeine Formel für Fourier-Reihen

Integrand gerade in x', substituiere x

$$= \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x,0) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx =: \frac{2}{L} I_n$$

$$-\frac{c\pi n}{L} c_n \sin\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial\psi}{\partial t}(x',0)\sin nx'\,dx'$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \;:= \frac{2}{L} J_n$$

$$\Rightarrow \quad c_n \sin\alpha_n = -\frac{2}{c\pi n} J_n$$

$$\Rightarrow \quad c_n = 2\sqrt{\left(\frac{I_n}{L}\right)^2 + \left(\frac{J_n}{c\pi n}\right)^2} \qquad I_n = \int_0^L \psi(x,0)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

mit

$$\tan\alpha_n = -\frac{L}{c\pi n}\frac{J_n}{I_n} \qquad J_n = \int_0^L \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Also erfüllt

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\left(\frac{cn\pi t}{L} + \alpha_n\right)$$

die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(x,t) - c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

mit den Randbedingungen

$$\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0 \quad \forall t$$

und den Anfangsbedingungen

$$\psi(x,t=0) = \text{gegeben}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t=0) = \text{gegeben}$$

Ferner ist dies die eindeutige Lösung.