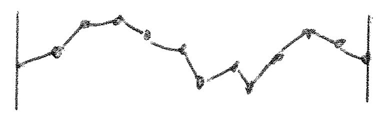
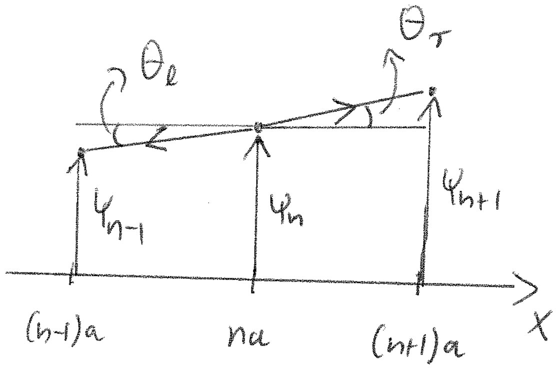
Mechanische Wellen

transversale Schwingungen einer Schnur mit N Perlen, die an beiden Enden fest eingespannt ist





$1 \leq n \leq N$

ψ_n = transversale Auslenkung

Die Spannung in der Schnur sei T_0 = Elastizitätsmodul

$\Rightarrow$ transversale Kraft $F_\perp = T_0 \sin\theta_r - T_0 \sin\theta_l$

$$\simeq T_0 \frac{\psi_{n+1}-\psi_n}{a} - T_0 \frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{a}$$

Dies ist gleich der Newton'schen Kraft m (= Masse der Perle) $\times\, a$

$$\Rightarrow \quad m \frac{d^2\psi_n}{dt^2} = T_0 \left(\frac{\psi_{n+1}-\psi_n}{a} - \frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{a} \right)$$

Im limes $a \to 0$ können wir eine kontinuierliche Saite mit Masse pro Länge $= \rho_0 \Rightarrow m = \rho_0 a$

$$\Rightarrow \quad \rho_0 \frac{d^2\psi_n}{dt^2} \Rightarrow \frac{T_0}{a} \left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\left(x = (n+\tfrac{1}{2})a\right) - \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(x = (n-\tfrac{1}{2})a\right) \right]$$

$$\to T_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x = na)$$

Daraus resultiert die <u>partielle Differentialgleichung</u>

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \rightarrow \text{ Wellengleichung in 1D}$$

ψ = transversale Auslenkung ist eine Funktion von t und der longitudinalen Koordinate x

Andere Schreibweise:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{mit} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$$

Verallgemeinerung in 3D:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\vec{r},t) - c^2 \Delta \psi(\vec{r},t) \; ; \qquad \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

<u>Lösungen der 1D Wellengleichung:</u>

definiere neue Koordinaten

$$u = x - ct \qquad v = x + ct$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=1} = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial u} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=-c} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{=c} = c\left(\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\right] = c^2\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\right)$$

Wellengleichung $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0$

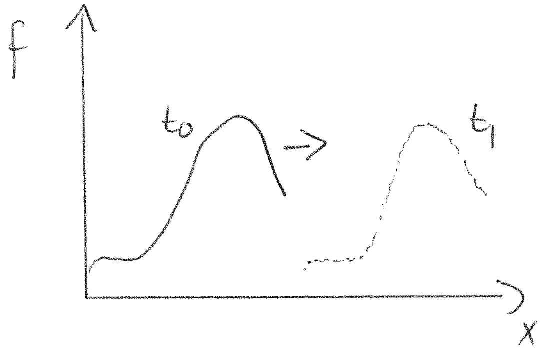
Integration über u $\Rightarrow$ $\frac{\partial\psi}{\partial v} = h(v)$ für v fix

Integration über v $\Rightarrow$ $\psi(u,v) = \int^{v} h(v')\,dv' + f(u) = g(v) + f(u)$

$$\Rightarrow \quad \psi(x,t) = g(x+ct) + f(x-ct)$$

$\rightarrow$ Allgemeine Lösung sind "Wellen Formen" die sich nach links oder rechts mit Geschwindigkeit c bewegen:

Sei $x_1 = x_0 + c(t_1 - t_0)$ $\Rightarrow$ $\psi(x_1,t_1) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{für } g=0}}{=} f(x_1 - ct_1) = f(x_0 - ct_0) = \psi(x_0,t_0)$



Spezialfälle:

Harmonische Wellen:

$$\psi_\pm(x,t) = A e^{\pm i \frac{\omega}{c}(x-ct)} = A e^{\pm i(kx-\omega t)} \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

oder $\mathrm{Re}[\psi_\pm(x,t)] = A\cos(kx - \omega t)$

räumliche Periode $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$ "Wellenzahl k"

zeitliche Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Stehende Wellen:

Überlagerung von rechts- und linkslaufenden harmonischen Wellen mit gleicher Amplitude:

e.g. $\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t) + A\cos(kx + \omega t)$

$= A[\cos kx \cos\omega t + \sin kx \sin\omega t + \cos kx \cos\omega t - \sin kx \sin\omega t)$

$= 2A \cos\omega t \cos kx$

$\psi(x,t) = 0 \;\; \forall t$ für $x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2k} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ $\rightarrow$ Schwingungsknoten