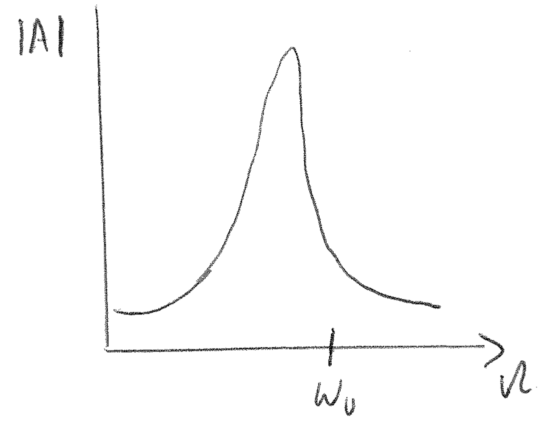
Resonanzen:



allgemeine Lösung e.g. im Schwingfall:

$$x(t) = \underbrace{|A| \cos(\Omega t + \phi)}_{\text{"Grenzzyklus"}} + \underbrace{e^{-\gamma t}\left(c_+ e^{i\omega t} + c_- e^{-i\omega t}\right)}_{\text{"Einschwingvorgang"}}$$

Energiebilanz

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2$$

$$\Rightarrow \dot{E} = m\left(\dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 x \dot{x}\right) = m\dot{x}\left(\ddot{x} + \omega_0^2 x\right) \underset{\text{Bewegungsgleichung}}{=}$$

$$= \underbrace{F_0(t)\dot{x}}_{\text{Arbeit der äußeren Kraft}} - \underbrace{2m\gamma\dot{x}^2}_{\text{Reibungsverluste}}$$

Nach Einschwingvorgang ist Bewegung periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{\Omega}$

$$\Rightarrow \int_0^T dt\, 2m\gamma\dot{x}^2 = \int_0^T dt\, F_0(t)\dot{x}$$

Die aufzuwendende Leistung (gemittelt über eine Periode) ist

$$P = \frac{\Delta E}{T} = \frac{2m\gamma}{T}\int_0^T dt\, \dot{x}^2 \underset{\text{Lösung für Grenzzyklus}}{=} \frac{2m\gamma\Omega^2}{T}\int_0^T dt\, |A|^2 \sin^2(\Omega t + \phi) =$$

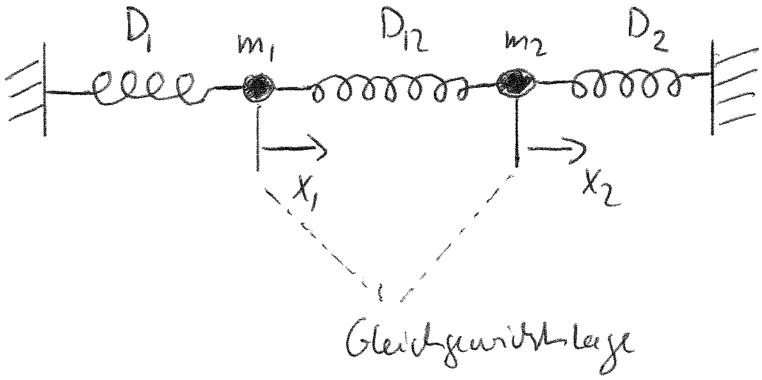
$$= m\gamma\Omega^2|A|^2 = \frac{m\gamma\Omega^2 f_0^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\gamma\Omega)^2}$$

$\downarrow$

Mittel von $\sin^2$ über eine Periode ist $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Integral $= |A|^2\frac{I}{2}$

Gekoppelte Schwingungen

Beispiel: 2 Massen + 3 Federn:



Bewegungsgleichungen:

$$m_1\ddot{x}_1 = -(D_1+D_{12})\,x_1 + D_{12}\,x_2$$

$$m_2\ddot{x}_2 = D_{12}\,x_1 - (D_2+D_{12})\,x_2$$

in Matrix Form:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1+D_{12} & -D_{12} \\ -D_{12} & D_2+D_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Dies hat die allgemeine Form:

$$m_i\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\,x_j = 0 \qquad i=1,2,..,n$$

$$M\ddot{\vec{x}} + K\vec{x} = 0 \qquad M=(m_i\delta_{ij}) \quad K=(k_{ij})$$

Definiere

$$y_i = \sqrt{m_i}\,x_i \qquad i=1,2,..,n$$

und dividiere Bewegungsgleichungen durch $\sqrt{m_i}$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{m_i}\,\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{k_{ij}}{\sqrt{m_i}}\, x_j = \ddot{y}_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{k_{ij}}{\sqrt{m_i m_j}}\, y_j = 0 \qquad i=1,..,n$$

Definiere

$$\Omega^2_{ij} = (\Omega^2)_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sqrt{m_i m_j}} = \Omega^2_{ji}$$

wegen "actio = reactio" ist k_{ij} symmetrisch

$$\Rightarrow \quad \ddot{\vec{y}} + \Omega^2 \vec{y} = 0$$

Matrix !

Ansatz: $\vec{y} = \vec{a}\, e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \quad \Omega^2 \vec{a} = \omega^2 \vec{a}$$ $\rightarrow$ Eigenvektorgleichung zum Eigenwert ω

$\Rightarrow$ Die charakteristische Gleichung

$$\det(\Omega^2 - \omega^2 \mathbb{1}) = 0$$

liefert n Eigenwerte $\omega_1^2, .. ; \omega_n^2$ mit zugehörigen Eigenvektoren $\vec{a}_1, .. \vec{a}_n$

$\Rightarrow$ "Eigenfrequenzen" $\omega_1, .., \omega_n$ und "Normalkoordinaten" $\vec{a}_1, .., \vec{a}_n$

ω_i^2 sind reell, $\vec{a}_i$ können reell gewählt werden, da auch $\vec{a}_i + \vec{a}_i^*$ Eigenvektor ist. Die Normalkoordinaten sind ferner orthogonal:

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij}$$

Beachte: Im allgemeinen gilt dies <u>nicht</u> für die $\vec{x}_i$

Die "Normalschwingungen"

$$\vec{y}^{(i)}_{\pm}(t) = \vec{a}_i\, e^{\pm \omega_i t} = \vec{y}^{(i)}_c(t) \pm i\, \vec{y}^{(i)}_s(t)$$

oder

$$\vec{y}^{(i)}_c(t) = \vec{a}_i \cos \omega_i t \;; \quad \vec{y}^{(i)}_s(t) = \vec{a}_i \sin \omega_i t$$

sind Lösungen der Bewegungsgleichungen. ⇒ Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination von Normalschwingungen:

$$\check{y}(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(c_+^{(i)} \check{y}_+^{(i)}(t) + c_-^{(i)} \check{y}_-^{(i)}(t) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(c_s^{(i)} \check{y}_s^{(i)}(t) + c_c^{(i)} \check{y}_c^{(i)}(t) \right)$$

$2n$ frei wählbare Konstanten $c_\pm^{(i)}$ entsprechen $2n$ Anfangsbedingungen
$y_i(0) = y_{0i}$; $\dot{y}_i(0) = v_{0i}$

Beispiel:

$n = 2$, $m_1 = m_2 = m$, $D_1 = D_2 = D$, $D_{12} = d$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{D+d}{m} & -\frac{d}{m} \\ -\frac{d}{m} & \frac{D+d}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

⇒ charakteristische Gleichung:

$$\left(\frac{D+d}{m} - \omega^2 \right)^2 - \left(\frac{d}{m} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \omega^2 = \frac{D+d}{m} \pm \frac{d}{m}$$

⇒ Eigenfrequenzen sind $\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{D+2d}{m}}$

$$\Rightarrow \quad (D+d)(a_1)_1 - d\,(a_1)_2 = D\,(a_1)_1 \quad \Rightarrow (a_1)_1 = (a_1)_2$$

$$-d\,(a_2)_1 + (D+d)(a_2)_2 = (D+2d)(a_2)_2 \quad \Rightarrow (a_2)_1 = -(a_2)_2$$

⇒ Die Normalkoordinaten sind

$$\check{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \check{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

⇒ Die allgemeine Lösung lautet

$$x_1(t) = b_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + b_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2(t) = b_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - b_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

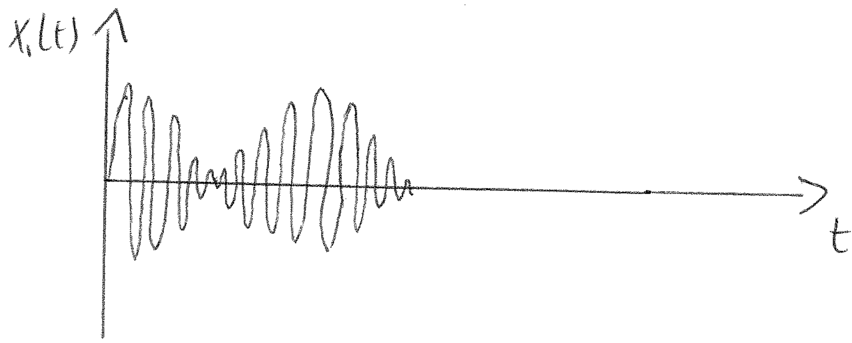
4 wählbare Konstanten b_1, b_2, ϕ_1, ϕ_2 können durch 4 Anfangs- oder Randbedingungen festgelegt werden.

Spezialfall: $b_1 = b_2 = b$, $\phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = b(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) = 2b\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\,\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$$

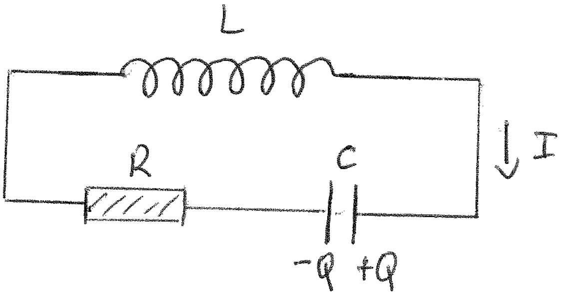
$$x_2(t) = b(\sin\omega_1 t - \sin\omega_2 t) = 2b\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\,\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$$

Für $|\omega_1-\omega_2| \ll |\omega_1+\omega_2|$ hat man "Schwebungen": Die Amplitude eine schnellen Oszillation wird langsam moduliert:



Nicht-mechanische Schwingungen

Beispiel: Elektrischer Schwingkreis:



L = Impedanz (Induktion)
C = Kapazität (Kondensator)
R = Widerstand

Gesamtspannung $U = 0 = L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI$

Differentiation liefert mit $I = \frac{dQ}{dt}$:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

Das entspricht einer Frequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ der freien, ungedämpften Schwingung und einem Dämpfungsfaktor $\gamma = \frac{R}{2}$