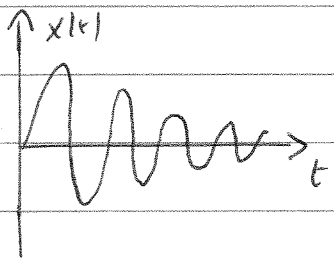
Schreibe: $c_+ = \frac{A}{2} e^{i\alpha}$, $c_- = \frac{A}{2} e^{-i\alpha}$ $\quad c_+, A \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha)$

Beispiel: Spezialfall $x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = v_0$

$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t$



Zusammenfassung: Frequenz nimmt ab: $\omega_0 \to \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
Amplitude nimmt ab, um einen Faktor $e^{-\Lambda}$ pro Schwingung mit $\Lambda = \ln \frac{x(t)}{x(t-T)} = \gamma T$
mit $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$

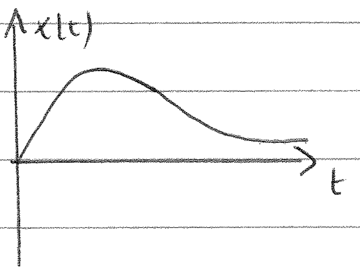
Λ: Logarithmisches Dekrement

b) Kriechfall: $\omega_0 < \gamma$
definiere $\tilde{\omega} := \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

$\Rightarrow \quad x(t) = e^{-\gamma t}\left(a_+ e^{\tilde{\omega} t} + a_- e^{-\tilde{\omega} t}\right)$ ist allgemeine Lösung

Beispiel: Spezialfall $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = v_0$

$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{v_0}{2\tilde{\omega}} e^{-\gamma t}\left(e^{\tilde{\omega} t} - e^{-\tilde{\omega} t}\right) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\gamma t} \sinh \tilde{\omega} t$



c) aperiodischer Grenzfall: $\omega_0 = \gamma$

Neben $e^{-\gamma t}$ ist auch $t e^{-\gamma t}$ eine Lösung:

$x_1(t) := t e^{-\gamma t} \Rightarrow \dot{x}_1(t) = (1 - \gamma t) e^{-\gamma t}$; $\ddot{x}_1(t) = [-\gamma - \gamma(1 - \gamma t)] e^{-\gamma t}$
$= (-2\gamma + \gamma^2 t) e^{-\gamma t}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_1 + 2\gamma \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = (-\gamma^2 + \omega_0^2)\, t e^{-\gamma t} = 0$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung ist $\quad x(t) = (a+bt)\, e^{-\gamma t}$

Erzwungene Schwingungen

Es wirke nun eine periodische äußere Kraft $f_0 \cos \Omega t$:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t$$

Finde zunächst eine Lösung der komplexen Gl.

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\Omega t} \qquad f_0, \Omega \in \mathbb{R}$$

mit Ansatz $z(t) = A e^{i\Omega t}$, und bilde dann Realteil. Das ergibt Lösung der reellen Gleichung.

$\dot{z}(t) = i\Omega z(t)$; $\ddot{z}(t) = -\Omega^2 z(t)$

$$\Rightarrow \quad (-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2) A e^{i\Omega t} = f_0 e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega}$$

In Polardarstellung ist $A = |A| e^{i\phi}$

$$\Rightarrow \quad |A|^2 = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega)(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega)} = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}$$

$$\phi = -\arctan\frac{\mathrm{Im}\, 1/A}{\mathrm{Re}(1/A)} = -\arctan\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \;;\; |A| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$$

$\Rightarrow$ reelle Lösung $= x(t) = \mathrm{Re}\, z(t) = |A| \cos(\Omega t + \phi)$

gleiche Frequenz wie treibende Kraft

phasenverschoben

Für $\Omega \ll \omega_0 \Rightarrow \quad |\phi| \ll 1$; $\phi < 0$

$\Omega \to \omega_0 \Rightarrow \quad \phi \to -\frac{\pi}{2}$