Lineare Differentialgleichungen

Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t) \qquad (1)$$

mit zeitabhängigen Koeffizienten. Wichtig z.B. zur Beschreibung von Schwingungen.

Gleichung 2. Ordnung kann in 2 Gleichungen 1. Ordnung umgeschrieben werden:

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = f(t) - b(t)x - a(t)v$$

beschreibt z.B. Trajektorien im Phasenraum

Gl. (1) heißt "inhomogen" wenn $f(t) \neq 0$, ansonsten "homogen"

Die Lösungen von homogenen Differentialgleichungen bilden einen linearen Vektorraum, d.h. Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen. Ferner ist die Lösung für jede Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$ eindeutig.

<u>Satz</u>: Seien $x_1(t)$, $x_2(t)$ zwei Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0$$

so erfüllt die <u>Wronski-Determinante</u>

$$w(t) \equiv x_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)x_2(t)$$

die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{w}(t) = -a(t)w(t)$$

<u>Beweis</u>:

$$\dot{w} = x_1\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 x_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Einsetzen Differentialgl.}}}{=} x_1(-a\dot{x}_2 - bx_2) - (-a\dot{x}_1 - bx_1)x_2$$

$$= -a(x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2) = -aw$$

Lösung dieser Gleichung:

$$\frac{dw}{w} = -a(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{w(t)}{w(t_0)} = -\int_{t_0}^{t} dt'\, a(t')$$

$$\Rightarrow \quad w(t) = w(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} dt' a(t')}$$

<u>Satz:</u> Zwei Lösungen $x_1(t), x_2(t)$ sind genau dann linear abhängig, wenn $W(t) = x_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)x_2(t) \equiv 0$

<u>Beweis:</u> Sei $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \equiv 0$ mit $\lambda_1 \neq 0$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 \quad ; \quad \dot{x}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\dot{x}_2$$

$$\Rightarrow \quad W = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 \dot{x}_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\dot{x}_2 x_2 = 0$$

für $\lambda_2 \neq 0$ analog

Sei $W(t) \equiv 0$. Wenn auf einem Intervall $x_1, x_2 \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{x}_1}{x_1} = \frac{\dot{x}_2}{x_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} \quad \Rightarrow \quad \ln x_1(t) = \ln x_2(t) + \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = \text{const.} \cdot x_2(t) \quad \Rightarrow \quad x_1, x_2 \text{ linear abhängig}$$

<u>Satz:</u> Sei $x(t)$ eine auf einem Intervall nicht-verschwindende Lösung der homogenen Differentialgleichung. Dann ist

$$y(t) = x(t)\int^{t} \frac{w(t')}{x^2(t')}\,dt' \qquad \text{mit } w(t) = e^{-\int^{t} a(t')dt'}$$

eine linear unabhängige Lösung, wobei die unteren Integrationsgrenzen beliebig sind.

<u>Beweis</u>

$$\dot{y} = \dot{x}\underbrace{\int^{t}\frac{w(t')}{x^2(t')}\,dt'}_{=\frac{y}{x}} + x\frac{w}{x^2} = \frac{1}{x}(y\dot{x} + w) \quad \Rightarrow \quad w = x\dot{y} - \dot{x}y \neq 0$$

$\Rightarrow$ x und y linear unabhängig. Ferner

$$w = x\dot{y} - \dot{x}y \quad \Rightarrow \quad x\ddot{y} - \ddot{x}y = \dot{w} = -a\,w = -a(x\dot{y} - \dot{x}y)$$

$\Rightarrow \quad x(\ddot{y}+a\dot{y}) - y(\ddot{x}+a\dot{x}) = 0$

da $\quad \ddot{x}+a\dot{x} = -bx \quad \Rightarrow \quad x(\ddot{y}+a\dot{y}+by) = 0$

Da $x \neq 0$ auf behandeltem Intervall $\Rightarrow$ $\ddot{y}+a\dot{y}+by = 0$, also ist $y(t)$ eine Lösung

Eine allgemeine Lösung $x(t) = \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$ einer homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung kann durch Wahl geeigneter Koeffizienten λ_1, λ_2 jede Anfangsbedingung $x(t_0)=x_0$, $\dot{x}(t_0)=v_0$ erfüllen:

$$x_0 = \lambda_1 x_1(t_0) + \lambda_2 x_2(t_0)$$

$$v_0 = \lambda_1 \dot{x}_1(t_0) + \lambda_2 \dot{x}_2(t_0)$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_1 = \frac{x_0 \dot{x}_2(t_0) - v_0 x_2(t_0)}{x_1(t_0)\dot{x}_2(t_0) - \dot{x}_1(t_0) x_2(t_0)}$$

$$\lambda_2 = \frac{v_0 x_1(t_0) - x_0 \dot{x}_1(t_0)}{x(t_0)\dot{x}_2(t_0) - \dot{x}_1(t_0) x_2(t_0)}$$

Sind eindeutige Lösungen da der Nenner $= W(t_0) \neq 0$

Ist $\tilde{x}(t)$ ~~irgend~~eine Lösung der inhomogenen Gleichung (1), und sind $x_1(t)$, $x_2(t)$ linear unabhängige Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung, so ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$$

Lineare Schwingungen

Der harmonische Oszillator mit äußerer Krafteinwirkung als lineare Näherung der Newton'schen Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} = F(x,t)$$

(Als gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung hat sie i.a. eine eindeutige Lösung für zwei Bedingungen, e.g.
Anfangsbedingungen: $x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = v_0$
Randbedingungen $\quad x(t_0) = x_0 \quad x(t_1) = x_1$)

$$F(x,t) = F_0(t) + a(t)\,x + \mathcal{O}(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2(t)\,x = f(t)$$

mit $\omega_0^2(t) = -\frac{a(t)}{m}$; $f(t) = \frac{F_0(t)}{m}$

Gedämpfter Oszillator mit zusätzlichen Reibungskräften:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \qquad \gamma \geq 0$$

Spezialfall: $\omega_0 = \text{const.} \quad f(t) = f_0 \cos \Omega t$

Freie Schwingungen

homogene Diff-gleichung (keine äußere Kraft):

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ungedämpfte Schwingungen: $\gamma = 0$

reelle Lösungen:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad A, \alpha \in \mathbb{R}$$

Umformung: $x(t) = \underbrace{A\cos\alpha}_{a}\cos\omega_0 t \underbrace{-A\sin\alpha}_{b}\sin\omega_0 t$

komplexe Lösungen:

$$x(t) = a_+ e^{i\omega_0 t} + a_- e^{-i\omega_0 t}$$

Vorteil: leichtere Handhabung von Exponentialfunktionen

Zur Erinnerung:

$$e^{\pm i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t \pm i\sin\omega_0 t$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right); \quad \sin\omega_0 t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)$$

Diese Lösungen sind periodisch: $x\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = x(t)$

gedämpfte Schwingungen: $\gamma > 0$

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(t) = \lambda x; \ \ddot{x}(t) = \lambda^2 x$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)\, x(t) = 0 \qquad \forall t$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

a) Schwingfall: $\omega_0 > \gamma$: $\lambda_\pm = -\gamma \pm i\omega; \ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_+ e^{i\omega t} + c_- e^{-i\omega t}\right)$$