

Beispiel symmetrische Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda \mathbb{1}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = 3, -1 \quad \text{wie vorher}$$

$$\text{Eigenvektoren: } \begin{pmatrix} 1-\lambda_{\pm} & 2 \\ 2 & 1-\lambda_{\pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\pm 1} \\ x_{\pm 2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{+1} \\ x_{+2} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2x_{+1} + 2x_{+2} = 0$$

$$\Rightarrow x_{+1} = x_{+2} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sind Eigenvektoren zu } \lambda = \lambda_{+}$$

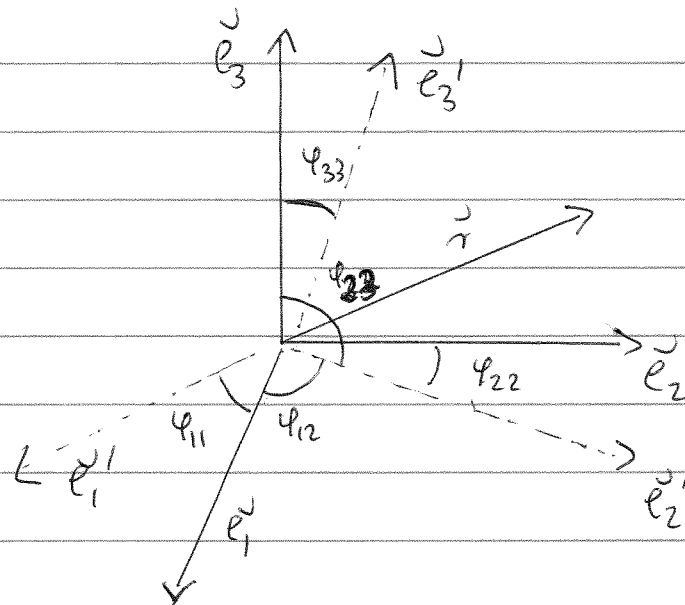
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{-1} \\ x_{-2} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_{-1} = -x_{-2}$$

$$\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ sind Eigenvektoren zu } \lambda = \lambda_{-}$$

Die Eigenvektoren sind nun orthogonal; wie erwartet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Vektoren und Koordinatentransformationen



Drehung

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^3 D_{ij} \vec{e}_j$$

Eigenschaften: 1.) $\cos \varphi_{ih} = \vec{e}_h \cdot \vec{e}'_i = \vec{e}_h \cdot \sum_j D_{ij} \vec{e}_j = D_{ih}$

2.) $\delta_{ih} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_h = \left(\sum_j D_{ij} \vec{e}_j \right) \cdot \left(\sum_l D_{hl} \vec{e}_l \right) =$

$$= \sum_{j,l} D_{ij} D_{hl} \underbrace{\vec{e}_j \cdot \vec{e}_l}_{\delta_{jl}} = \sum_j D_{ij} D_{hj}$$

=> D bildet paarweise orthogonale Spaltenvektoren

3.) =>

$$D = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}'_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}'_3 \cdot \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \vec{e}'_1 \cdot (\vec{e}'_2 \times \vec{e}'_3) = 1$$

orthogonales
Rechtsystem

4.) $\delta_{ih} = \sum_j D_{ij} D_{hj} = \sum_j D_{ij} (D^T)_{jh}$

=> $D^{-1} = D^T$ => $DD^T = D^T D = \mathbb{1}$

=> D ist "orthogonale Matrix"

Beispiel: Zweidimensionale Drehungen

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$D(\varphi_2) D(\varphi_1) = D(\varphi_1) D(\varphi_2) = D(\varphi_1 + \varphi_2)$$

für ≥ 3 Dimensionen kommutieren Drehungen i.a. nicht $\vec{v}$

Transformation von Vektorcomponenten:

$$\vec{r} = \sum_i x_i \vec{e}_i = \sum_i x_i' \vec{e}_i'$$

$$\Rightarrow x_j' = \vec{e}_j' \cdot \vec{r} = \sum_i x_i \vec{e}_j' \cdot \vec{e}_i = \sum_i D_{ji} x_i$$

also $\vec{x}' = D \vec{x} \Rightarrow$ Komponenten transformieren wie
Einheitsvektoren

Anbieter: Bei nicht-orthogonalen Transformationen ist dies nicht der Fall
und man unterscheidet kov- und kontravariante Vektoren

$$\text{Anwendung: } |\vec{x}'|^2 = \vec{x}' \cdot \vec{x}' = \vec{x}'^T \vec{x}' = \vec{x}^T \underbrace{D^T D}_{=1} \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x} = \vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}|^2$$

$\Rightarrow$ Norm erhalten