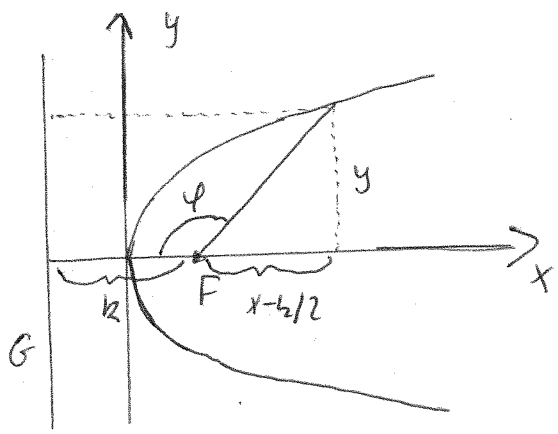
3. Parabel:



$$x + \frac{h}{2} = \sqrt{y^2 + (x-\frac{h}{2})^2} \Leftrightarrow (x+\frac{h}{2})^2 = y^2 + (x-\frac{h}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 2hx$$

In Polarkoordinaten: $r(\varphi) = x + \frac{h}{2} = \frac{h}{2} - r\cos\varphi + \frac{h}{2} = h - r\cos\varphi$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{h}{1+\cos\varphi}$$

Zusammenfassung:

1. Keplersche Gesetz: Gebundene Planetenbewegungen (Zweikörperproblem) sind Ellipsen

2. Keplersches Gesetz: Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

3. Keplersches Gesetz: $\frac{T^2}{a^3} = \text{const.} = \frac{4\pi^2}{G_N(M+m)}$

Matrizen und Tensoren

$$m \times n\text{-Matrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow i\text{-te Zeile}$$

$\uparrow$
j-te Spalte

$$A = (a_{ij})$$

Rechenoperationen:

1.) Addition $\quad C = A + B \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

nur gleichartige $m \times n$-Matrizen können addiert werden

2.) skalare Multiplikation:

$$C = \lambda A \qquad c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

3.) Matrix-Multiplikation:

Sei $A = (a_{ij}) = m \times n$-Matrix , $B = (b_{kl}) = n \times r$-Matrix

$$\Rightarrow \quad C = AB \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = m \times r\text{-Matrix}$$

$\downarrow$
"Zeile i x Spalte j"

Spezialfall: $B = x = n \times 1$-Matrix = Vektor mit n-Komponenten

$\Rightarrow \quad Ax = m \times 1$-Matrix = Vektor mit m Komponenten

z.B. $m = n \rightarrow$ quadratische Matrix

$$A\check{x} = \tilde{b} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned}$$

lineares Gleichungssystem

Rechenregeln:

$$A + B = B + A \qquad \text{kommutativ}$$

$$A(B+C) = AB + AC \qquad \text{assoziativ}$$

$$A(BC) = (AB)C = ABC \qquad \text{distributiv}$$

aber: $AB \neq BA$ im allgemeinen

$$[A,B] := AB - BA \qquad \text{Kommutator}$$

spielt wichtige Rolle in der Quantenmechanik

Die "Transponierte" A^T einer Matrix A erhält man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten: $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

Es gilt:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Quadratische $n \times n$ Matrizen

bilden eine "Algebra" unter Addition und Multiplikation mit Zahlen sowie Matrixmultiplikationen.

Einheitsmatrix:

$$E = \mathbb{1} = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$EA = AE = A \quad \forall A$$

Determinante:

$$|A| = \det A = \sum_{\substack{\text{Permutationen} \\ P(1,2,\dots,n)}} (-)^P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}$$

$$(-)^P = \begin{cases} 1 & \text{gerade Permutationen} \\ -1 & \text{ungerade Permutationen} \end{cases}$$

$n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Man kann zeigen:

$$|A^T| = |A|$$

$$|AB| = |BA| = |A|\,|B|$$

Wenn $|A| \neq 0$ dann gibt es eine inverse Matrix A^{-1} mit

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1} = E$$

In diesem Fall hat ein lineares Gleichungssystem

$A\check{x} = \check{b}$ die eindeutige Lösung $\check{x} = A^{-1}\check{b}$

Anwendung: Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$:

$$f(\check{r}) = f(\check{r}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\check{r}_0)\,(x_i - x_{0i}) + \cancel{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial_j}(\check{r}_0)(x_i - x_{0i})(x_j -}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\check{r}_0)\,(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \ldots$$

$\check{r} = (x_i) \qquad \check{r}_0 = (x_{0i})$

kann geschrieben werden als

$$f(\check{r}) = f(\check{r}_0) + \check{\nabla} f(\check{r}_0)\cdot(\check{r} - \check{r}_0) + \frac{1}{2}(\check{r} - \check{r}_0)^T Q\,(\check{r} - \check{r}_0)$$

mit $\quad Q_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\check{r}_0)$

Beispiel: Entwicklung des Potentials $\dfrac{1}{|\check{r} - \check{a}|}$ einer Punktquelle bei $\check{a}$ um $\check{r} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|\check{r} - \check{a}|} = -\frac{1}{|\check{r} - \check{a}|^2}\frac{\partial}{\partial x_i}|\check{r} - \check{a}| = -\frac{x_i - a_i}{|\check{r} - \check{a}|^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{|\check{r} - \check{a}|} = -\frac{\delta_{ij}}{|\check{r} - \check{a}|^3} + \frac{3(x_i - a_i)(x_j - a_j)}{|\check{r} - \check{a}|^5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{|\check{r} - \check{a}|} = \frac{1}{a} + \frac{\check{a}\cdot\check{r}}{a^3} + \frac{\check{r}^T Q\,\check{r}}{2a^5}$$

mit $Q_{ij} = 3a_i a_j - a^2\,\delta_{ij}$

Eigenschaften: $Q_{ij} = Q_{ji}$ Symmetrie

Spur (trace) $\mathrm{Tr}\, Q \equiv \sum_j Q_{jj} = \sum_j (3a_j a_j - a^2 \delta_{jj}) = 3a^2 - 3a^2 = 0$

Summe der Diagonalelemente

Tensoren n-ter Stufe sind Objekte mit n Indizes die sich für jeden Index wie ein Vektor transformieren (Koordinatentransformationen siehe später)

Also: Skalar = Zahl = Tensor 0-te Stufe
Vektor = Tensor 1ste Stufe
Matrix = Tensor 2ter Stufe
ε_{ijk} = Tensor 3ter Stufe

$\check{x}$ heißt <u>Eigenvektor</u> zum <u>Eigenwert</u> λ wenn

$$A\check{x} = \lambda \check{x} \quad \text{für } \check{x} \neq 0$$

$$\lambda \text{ Eigenwert} \iff |A - \lambda \mathbb{1}| = 0$$

wenn A $n \times n$ Matrix, dann ist

$$|A - \lambda \mathbb{1}| = a_0 + a_1 \lambda + \dots + (-1)^n \lambda^n = \chi_n(\lambda)$$

das <u>charakteristische Polynom</u> n-ten Grades mit n (u.U. auch Mehrfach-nullstellen)

$$\chi_n(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

also sind λ_i die Eigenwerte von A

<u>Satz</u>: Die Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix sind reell

Beweis:

$$\sum_{i,j} (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_i^* x_j = 0 \quad \text{multipliziere } \sum_j a_{ij} x_j = \lambda x_i \text{ mit } x_i^*$$

$$\Rightarrow \sum_j (a_{ij} - \lambda^* \delta_{ij}) x_i x_j^* = 0$$

komplexe Konjugation

Subtrahiere und verwende Symmetrie von a_{ij} und δ_{ij}

$$\Rightarrow \sum_{i,j} (-\lambda + \lambda^*) \delta_{ij} x_i^* x_j = (\lambda^* - \lambda) \sum_i |x_i|^2 = 0 \Rightarrow \lambda^* = \lambda$$

da $|\check{x}| \neq 0$

<u>Satz:</u> Die Eigenvektoren einer reellen, symmetrischen Matrix zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal

Beweis:

$$\sum_j a_{ij} x_j = \alpha x_i \qquad \sum_j a_{ij} y_j = \beta y_i \qquad \alpha \neq \beta$$

multipliziere mit y_i bzw. x_i und summiere über i

$$\Rightarrow \sum_{ij} a_{ij} y_i x_j = \alpha \sum_i x_i y_i$$

$$\sum_{ij} a_{ij} x_i y_j = \beta \sum x_i y_i \qquad -$$

$$\Rightarrow 0 = (\alpha - \beta) \sum_i x_i y_i = (\alpha - \beta)\, \check{x} \cdot \check{y} \quad \Rightarrow \check{x} \cdot \check{y} = 0 \quad \text{da } \alpha \neq \beta$$

Subtraktion mit $a_{ij} = a_{ji}$

Beispiel: Trägheitstensor einer Massenverteilung

$$I_{ij} = \int dV \rho \left(\delta_{ij} r^2 - x_i x_j \right) \qquad \check{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

reell und symmetrisch ~~Volumen~~ Volumen-Integral Massendichte

Eigenwerte sind reell und heißen Hauptträgheitsmomente mit entsprechenden Hauptträgheitsachsen ($\hat{=}$ Eigenvektoren $\check{x}_i$)

Beispiel:

<u>asymmetrische Matrix</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda \mathbb{1}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_\pm = 3, -1$$

Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1-\lambda_+ & 4 \\ 1 & 1-\lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{+1} \\ x_{+2} \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow -2x_{+1} + 4x_{+2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{+1} = 2x_{+2} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren zu $\lambda_+ = 3$

analog: $\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren zu $\lambda_- = -1$