Im allgemeinen $\lim_{r \to \infty} V(r) = 0$, also auch $V_{eff}(r) \to 0$ für $r \to \infty$

$\Rightarrow$ Für ungebundene Bahnen ist $E \geq 0$

Für gebundene Bahnen $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ und die Umlaufzeit ist

$$T = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r'))}}$$

Nur wenn der ~~dabei~~ durchlaufene Azimuthwinkel

$$\Delta\varphi = \frac{2L}{\sqrt{2m}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$

ein Vielfaches von 2π ist, $\Delta\varphi = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$, ist die Bahn geschlossen

Typische Potentiale:

$$V(r) = \alpha \left[\underbrace{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}}_{\text{Abstoßender Kern}} - 2 \underbrace{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}}_{\text{Anziehung}} \right]$$

Lennard-Jones Potential für Wechselwirkung zwischen Atomen

$$V(r) = -\frac{G_N M m}{r}$$

Gravitationspotential zwischen zwei Massen M und m

$$V(r) = \frac{e_1 e_2}{4\pi r}$$

Elektrostatische Wechselwirkung zwischen zwei Ladungen e_1 und e_2

Keplerproblem

Zwei Massen M, m (i.a. $M \gg m$)

Wähle Inertialsystem in welchem der Schwerpunkt ruht:

$$\vec{R} = \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M+m} = 0 \Rightarrow \vec{r}_1 = -\frac{m\vec{r}_2}{M}$$

$$\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \frac{M+m}{M}\vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_2 = \frac{M}{M+m}\vec{r} \qquad \vec{r}_1 = \frac{m}{M+m}\vec{r}$$

$$V(r) = -\frac{G_N M m}{r} = -\frac{G_N (M+m)\mu}{r} \qquad \mu = \frac{Mm}{M+m} \text{ reduzierte Masse}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \text{const.} \qquad V_{eff}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{const.}$$

Ferner ist für dieses spezielle Potential der Lenz-Runge-Vektor

$$\vec A = \dot{\vec r}\times\vec L - \frac{G_N M m}{r}\vec r$$

erhalten:

$$\dot{\vec A} = \ddot{\vec r}\times\vec L + \frac{G_N M m}{r^2}\dot r\,\vec r - \frac{G_N M m}{r}\dot{\vec r}$$

$$= \frac{G_N M m}{r}\left(-\frac{\vec r}{m r^2}\times(m\,\vec r\times\dot{\vec r}) + \frac{\dot r}{r}\vec r - \dot{\vec r}\right)$$

$$m\ddot{\vec r} = \vec F(\vec r) = -\vec\nabla V(r) = -\frac{G_N M m}{r^3}\vec r$$

$$= \frac{G_N M m}{r}\left(\dot{\vec r} - \frac{\dot r}{r}\vec r + \frac{\dot r}{r}\vec r - \dot{\vec r}\right) = 0$$

$$\vec r\times(\vec r\times\dot{\vec r}) = \vec r\,(\vec r\cdot\dot{\vec r}) - \dot{\vec r}\,(\vec r\cdot\vec r) = \vec r\,r\dot r - r^2\dot{\vec r}$$

bac-cab-Regel

$$\frac{d}{dt}(r^2) = 2r\dot r = \frac{d}{dt}(\vec r\cdot\vec r) = 2\vec r\cdot\dot{\vec r}$$

Betrag:

$$A^2 = \vec A\cdot\vec A = \left(\dot{\vec r}\times\vec L - \frac{G_N M m}{r}\vec r\right)^2 = \dot{\vec r}^2\,\vec L^2 - \frac{2G_N M m}{r}(\dot{\vec r}\times\vec L)\cdot\vec r + (G_N M m)^2$$

$|\dot{\vec r}\times\vec L| = \dot{\vec r}^2\,\vec L^2$ weil $\dot{\vec r}\cdot\vec L = 0$

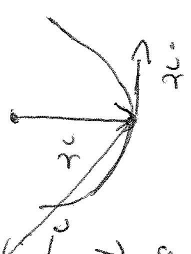
$$= L^2\left(\dot{\vec r}^2 - \frac{2G_N M m}{m r}\right) + (G_N M m)^2 = \frac{2L^2}{m}E + (G_N M m)^2$$

$$(\dot{\vec r}\times\vec L)\cdot\vec r = (\vec r\times\dot{\vec r})\cdot\vec L = \frac{\vec L^2}{m}$$

Definiere numerische Exzentrizität

$$\varepsilon := \sqrt{1+\frac{2L^2E}{m(G_N M m)^2}} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow A = \cancel{G_N M m \sqrt{\ }}\; G_N M m\,\varepsilon$$



wähle Punkt ~~wo~~ $\dot{\vec r}\cdot\vec r = 0$, also $r = r_{min,max}$

$\Rightarrow \vec A$ in $\vec r$-Richtung

$\vec L \rightarrow$ senkrecht zur Ebene der Keplerbahn

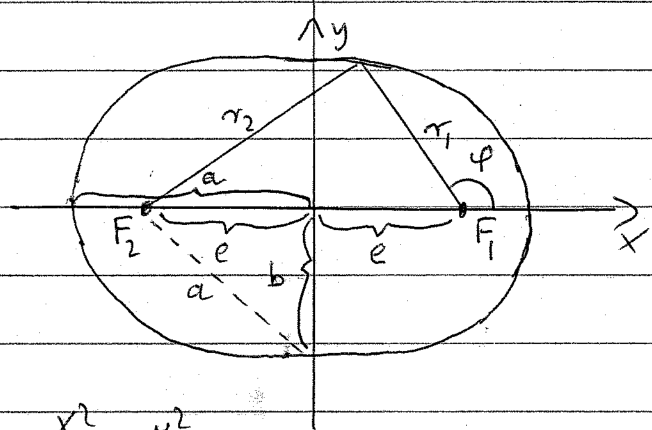
$$\vec{A} \cdot \vec{r} = A r \cos\varphi = G_N M m \varepsilon r \cos\varphi$$

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - \frac{G_N M m}{r} \vec{r} \cdot \vec{r} = \frac{L^2}{\mu} - G_N M m r$$

$$\Rightarrow \quad r(\varphi) = \frac{h}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \qquad h = \frac{L^2}{G_N M m \mu} \qquad (2)$$

$\rightarrow$ Kegelschnitte
$$\begin{cases} E < 0 \Leftrightarrow \varepsilon < 1 \rightarrow \text{Ellipse} \\ E = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = 1 \rightarrow \text{Parabel} \\ E > 0 \Leftrightarrow \varepsilon > 1 \rightarrow \text{Hyperbel} \end{cases}$$

1.) Ellipse



$$a^2 = e^2 + b^2$$

$$\varepsilon := \frac{e}{a} < 1$$

F_1, F_2 = Brennpunkte

1. Definition: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Man kann zeigen daß dies äquivalent ist zu

2. Definition: $r_1 + r_2 = \text{const.} = 2a = (a+e) + (a-e)$

$$\Rightarrow \quad r_1^2 = (x-e)^2 + y^2 \qquad r_2^2 = (x+e)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad r_1 - r_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2a}\left[(x-e)^2 + y^2 - (x+e)^2 - y^2\right] = -2\frac{e}{a}x = -2\varepsilon x$$

$$\Rightarrow \quad r_1 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) + \frac{1}{2}(r_1 - r_2) = a - \varepsilon x = a - \varepsilon(e + r_1 \cos\varphi)$$

$$= a - \varepsilon e - \varepsilon r_1 \cos\varphi = \frac{a^2 - e^2}{a} - \varepsilon r_1 \cos\varphi = \frac{b^2}{a} - \varepsilon r_1 \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad r_1 = \frac{b^2/a}{1 + \varepsilon \cos\varphi} = \frac{h}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \qquad \text{mit } h = \frac{b^2}{a}$$

Spezialfall $e = \varepsilon = 0 \rightarrow$ Kreis

Drücke Halbachsen a und b durch E und L aus:

$$a = \frac{1}{2}\left(r(\varphi=0) + r(\varphi=\pi)\right) = \frac{h}{2}\left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}\right) = \frac{h}{1-\varepsilon^2} \underset{\text{setze (1) und (2) ein}}{=}$$

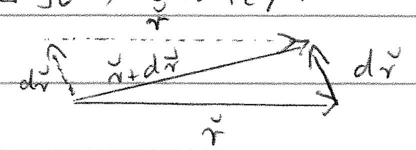
$$= \frac{L^2}{G_N M m \mu \left(-\frac{2L^2 E}{(G_N M m)^2 \mu}\right)} = -\frac{G_N M m}{2E} > 0 \qquad (3)$$

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a} \cdot a} = \sqrt{ka} \underset{(2)}{=}$$

$$= \frac{L}{\sqrt{-2\mu E}} \qquad (4)$$

Es gilt der <u>Flächensatz</u>: Der Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Zweites Kepler'sches Gesetz):

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r}$$



$$\Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{L}}{2\mu} = \text{const.}$$

$$F = \pi a b = \pi a \frac{L}{\sqrt{-2\mu E}}$$

andererseits $\quad F = \int_0^T \frac{dF}{dt} dt = \frac{1}{2\mu} \int_0^T L\, dt = \frac{LT}{2\mu}$

$$\Rightarrow T = \pi a \sqrt{\frac{2\mu}{-E}} \underset{(3)}{=} 2\pi a \sqrt{\frac{\mu a}{G_N M m}}$$

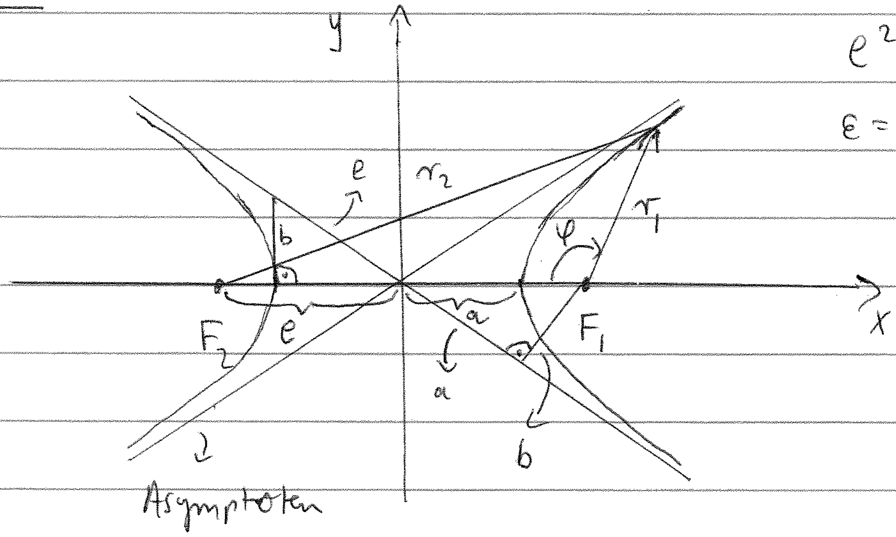
$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \mu}{G_N M m} = \text{const.} = \frac{4\pi^2}{G_N (M+m)} \simeq \frac{4\pi^2}{G_N M}$$

→ drittes Kepler'sches Gesetz

2. Hyperbel

$$e^2 = a^2 + b^2$$

$$\varepsilon = \frac{e}{a} > 1$$



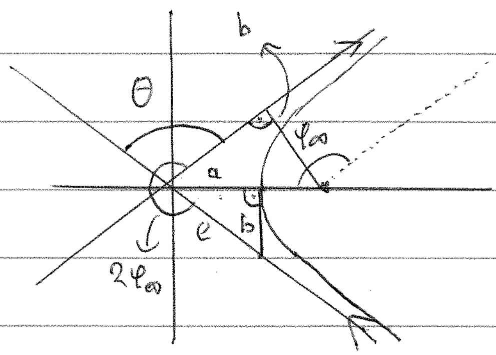
ohne detaillierte Beweise:

1. Definition: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

2. Definition: $|r_2 - r_1| = 2a$

$\Rightarrow \quad r_1 = \frac{h}{1+\varepsilon\cos\varphi} \qquad h = \frac{b^2}{a}$

$a = \frac{G_N M m}{2E} > 0 \qquad b = \frac{L}{\sqrt{2mE}}$



Streuung:

$\cos\varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon}$

$\Theta = 2\varphi_\infty - \pi \to$ Streuwinkel

$0 \leq \Theta \leq \pi$

$\Rightarrow \quad \sin\frac{\Theta}{2} = \sin\left(\varphi_\infty - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\varphi_\infty = \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \quad \tan\frac{\Theta}{2} = \frac{\sin\Theta/2}{\sqrt{1-\sin^2\Theta/2}} = \left(\sin^{-2}\frac{\Theta}{2} - 1\right)^{-1/2} = (\varepsilon^2 - 1)^{-1/2} =$

$= \left(\frac{e^2}{a^2} - 1\right)^{-1/2} = \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{-1/2} = \frac{a}{b} = \frac{G_N M m}{2bE}$

$\Rightarrow \quad \Theta(b) = 2\arctan\frac{G_N M m}{2bE}$

b ist minimale Abstand ~~der~~ Asymptote vom Kraftzentrum
= "Stoßparameter)

3. Parabel $\to$ siehe frühere Übungsaufgabe

Anmerkung: Keplerbahnen sind geschlossen; wenn das Potential nicht $\propto \frac{1}{r}$, wie z.B. in allgemeiner Relativitätstheorie, dann sind Bahnen nicht geschlossen
z.B. Periheldrehung des Merkur