

Vektoren

(1)

Vektoren sind gerichtete Größen deren Komponenten bei Drehung oder allgemein bei Änderung des Koordinatensystems gewisse Transformationseigenschaften besitzen

"Skalare" sind dabei invariant unter Koordinatentransformationen

Beispiele:

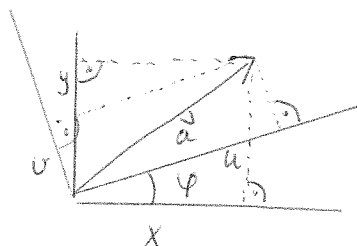
Temperatur, Masse, Ladung sind Skalare

Ortsvektor $\vec{r}$, Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$,

Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, Kraft, Impuls, Drehimpuls sind Vektoren

Vektoren haben eine Richtung und eine Länge

Drehung:



$$u = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$v = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Länge } (u^2 + v^2)^{1/2} &= \left[(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 + (-x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[x^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + y^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \right]^{1/2} = \\ &= (x^2 + y^2)^{1/2} \quad \text{bleibt erhalten!} \end{aligned}$$

(2)

Läßt sich als Matrix schreiben:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ausblende:

Vektoren in Komponentenentwicklung

$$\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) = "a_i"$$

Dann kann man ein Längenquadrat bilden

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j g^{ij} \quad \text{wo } g^{ij}$$

metrischer Tensor heißt

Tensoren sind Vektoren mit mehreren Indizes, z.B. der metrische Tensor

Mathematisch abstrakt ist ein linearer oder Vektorraum ein "Körper" von Elementen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ in dem eine Addition $\vec{a} + \vec{b}$ und eine Multiplikation mit Skalaren α definiert ist so daß

$$\text{Abelsche Gruppe} \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad \text{Assoziativität} \\ \exists \vec{0} \text{ "Nullvektor" so daß } \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \quad \forall \vec{a} \\ \forall \vec{a} \exists \text{ "inverse Vektor" } \vec{b} = -\vec{a} \text{ mit } \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{Kommutativität} \end{array} \right.$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \alpha = \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b} \quad \text{Distributivität}$$

$$\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a} \quad \text{Assoziativität}$$

$$\exists \text{ Skalar } 1 \text{ "Einselement" so daß } 1 \vec{a} = \vec{a} \quad \forall \vec{a}$$

Beispiele: Die Menge aller Verschiebungen im Euklidischen Raum

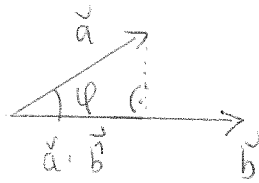
die Menge aller Polynome vom Grad n

Wenn es für n Vektoren $\vec{a}_i$ n Skalare α_i existieren die nicht alle Null sind, so daß $\sum_{i=1}^n \vec{a}_i \cdot \alpha_i = 0$, dann heißen $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ "linear abhängig"

Skalarprodukt

(3)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = ab \cos \varphi$$



Eigenschaften:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{Kommutativität}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \text{Distributivität}$$

$$\alpha (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) \quad \text{Homogenität}$$

Spezialfälle:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \text{ parallel } \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| = ab$$

$$\vec{a} \text{ antiparallel } \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -ab$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2 \quad \text{Längenquadrat}$$

$$\vec{a} = 0 \text{ oder } \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Schwarzsche Ungleichung:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

Projektion auf die Richtung $\vec{b}$

$$a_b := a \cos \varphi = \vec{a} \cdot \hat{\vec{b}} \quad \text{wobei } \hat{\vec{b}} := \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \text{ der Einheitsvektor in } \vec{b}\text{-Richtung ist}$$

Abstrakte Definition eines Skalarprodukts mit obigen Eigenschaften und zusätzlich $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \quad \forall \vec{a} \neq 0$ (positiv definit)

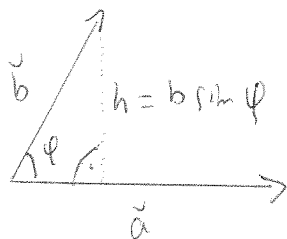
Ausblick: Es gibt auch indefinite Skalarprodukte, d.h. für die $\exists \vec{a} \neq 0$ mit $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$ und $\exists \vec{b} \neq 0$ mit $\vec{b} \cdot \vec{b} < 0$ z.B. in der speziellen Relativitätstheorie + Lorentz-Metrik

Vektorprodukt

(4)

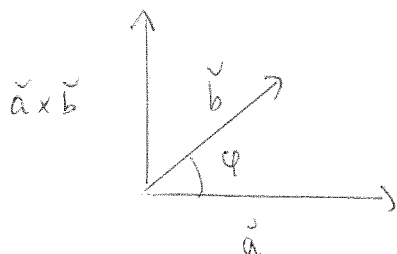
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$|\vec{c}| = c = ab |\sin \varphi|$$



=> c = Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

Richtung bestimmt durch Rechts-Hand-Regel: Drehe $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$



Eigenschaften:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \text{Antikommutativität}$$

$$\vec{a} \text{ anti-} \parallel \vec{b} \text{ oder } \vec{a} \parallel \vec{b} \quad (\Rightarrow) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad \text{Distributivität}$$

$$\alpha (\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) \quad \text{Homogenität}$$

Spezialfälle:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad (\Leftrightarrow) \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = ab$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad (\Rightarrow) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \text{ anti-} \parallel \vec{b} \quad (\Rightarrow) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \quad (\Rightarrow) \quad \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{0} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{0} = \vec{0}$$

Komponentendarstellung

(5)

Definiere 3 "orthonormale" d.h. orthogonale Einheitsvektoren

$$\check{x}, \check{y}, \check{z}$$

im 3-d Euklidischen Raum, mit

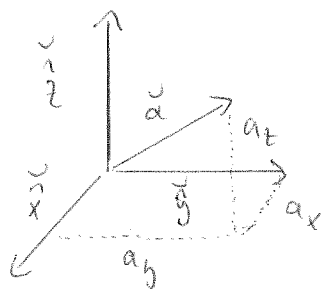
$$\check{x} \cdot \check{x} = \check{y} \cdot \check{y} = \check{z} \cdot \check{z} = 1 \quad ; \quad \check{x} \cdot \check{y} = \check{x} \cdot \check{z} = \check{y} \cdot \check{z} = 0$$

und

$$\check{x} \times \check{y} = \check{z}, \quad \check{y} \times \check{z} = \check{x}, \quad \check{z} \times \check{x} = \check{y}$$

andere häufige Schreibweisen:

$$\check{e}_x, \check{e}_y, \check{e}_z \quad ; \quad \check{e}_1, \check{e}_2, \check{e}_3 \quad ; \quad \check{e}_i, \check{e}_j, \check{e}_k$$



$$\check{a} = a_x \check{x} + a_y \check{y} + a_z \check{z} = (a_x, a_y, a_z)$$

mit $a_x = \check{a} \cdot \check{x}$, $a_y = \check{a} \cdot \check{y}$, $a_z = \check{a} \cdot \check{z}$

$$\check{e}_i \cdot \check{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

$$\check{e}_i \times \check{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \check{e}_k$$

wobei das "Levi-Civita-Symbol"

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i, j, k \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{wenn } i, j, k \text{ anti-zyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anwendungen:

$$\check{a} \cdot \check{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

$$\check{a} \times \check{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i b_j \check{e}_k \quad \text{oder} \quad (\check{a} \times \check{b})_k = \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i b_j$$