

## 5.7 Zerfallsgesetz

Zerfälle von Teilchen treten in zwei Spielarten auf:

- Fundamentale Teilchen können nur durch die schwache Wechselwirkung zerfallen, d.h. spontan in zwei oder mehr andere fundamentale Teilchen übergehen.
- Gebundene Systeme (angeregte Atome, Kerne oder Hadronen) zerfallen entweder elektromagnetisch oder durch die starke Wechselwirkung. Die schwache Wechselwirkung spielt nur dann eine messbare Rolle, wenn das System bereits im Grundzustand ist und der Zerfall durch die anderen Wechselwirkungen nicht möglich ist.

Für ein bestimmtes Teilchen, das zur Zeit  $t_1$  existiert, sei  $\Gamma dt$  die Wahrscheinlichkeit, in einem kleinen Zeitintervall von  $t_1$  bis  $t_1 + dt$  zu zerfallen. Diese Wahrscheinlichkeit soll unabhängig von der Vorgeschichte (Alter) des Teilchens sein, so dass  $\Gamma$  eine Konstante ist. Bei  $N(t)$  identischen, voneinander unabhängigen Teilchen ist dann die Änderung  $dN$  dieser Zahl gegeben durch

$$dN = -\Gamma N(t) dt \quad (5.110)$$

Diese Änderung von  $N(t)$  muss negativ sein, denn die Anzahl der noch vorhandenen Teilchen nimmt ab. Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich aus

$$\int_{N(t=0)}^{N(t)} \frac{-dN}{N} = \int_{t=0}^t \Gamma dt \quad (5.111)$$

zu

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma t} \quad (5.112)$$

mit  $N_0 = N(t = 0)$ . Die Anzahl der messbaren Zerfälle ist  $-dN$ . Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(t)$  ist definiert über die Anzahl der messbaren Zerfälle  $dN$  im Zeitintervall von  $t$  bis  $t + dt$ , relativ zur ursprünglich zur Zeit  $t = 0$  vorhanden gewesenen Teilchen  $N_0$ ,

$$P(t) dt = \frac{-dN}{N_0} = \Gamma \frac{N(t)}{N_0} dt \quad (5.113)$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\boxed{P(t) = \Gamma e^{-\Gamma t}} \quad (5.114)$$

korrekt normiert, denn die Wahrscheinlichkeit für dieses Teilchen irgendwann zu zerfallen ist

$$\int_0^\infty P(t) dt = \int_0^\infty \Gamma e^{-\Gamma t} dt = 1 \quad (5.115)$$

Die mittlere Zeit bis zum Zerfall ist

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty t P(t) dt = \frac{1}{\Gamma} \quad (5.116)$$

Diese Zeitdauer wird daher auch mittlere Lebensdauer  $\tau$  genannt<sup>7</sup>,

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (5.119)$$

Falls ein Teilchen in mehrere Endzustände  $f$  zerfallen kann, dann gilt für die Partialbreiten  $\Gamma_f$

$$dN_f = -\Gamma_f N(t) dt \quad (5.120)$$

und daher

$$dN = \sum_f dN_f \quad \tau^{-1} = \Gamma = \sum_f \Gamma_f \quad (5.121)$$

Das Verzweigungsverhältnis ('branching ratio' BR) gibt an, welcher Prozentsatz der Teilchen in einen bestimmten Endzustand zerfällt,

$$BR_f = \frac{\Gamma_f}{\Gamma} \quad (5.122)$$

## 5.8 Breit-Wigner Verteilung und virtuelle Teilchen

Quantenmechanisch ist die Wellenfunktion eines freien Teilchens in seinem eigenen Ruhesystem gegeben durch

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-i(Et - \vec{P}\vec{x})} = \Psi_0 e^{-imt} \quad (5.123)$$

denn in diesem System ist  $\vec{P} = 0$  und  $E = m$ . Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist

$$|\Psi(t)|^2 = |\Psi_0|^2 \quad (5.124)$$

und damit zeitlich konstant. Für Teilchen, die zerfallen, muss aber gelten

$$|\Psi(t)|^2 = |\Psi_0|^2 e^{-\Gamma t} \quad (5.125)$$

Daher muss die Wellenfunktion verändert werden. Mit dem Ansatz

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-iFt} \quad (5.126)$$

---

<sup>7</sup> Im Vergleich dazu ist die Halbwertszeit definiert als die Zeit, bei der die Anzahl der ursprünglichen Teilchen auf die Hälfte abgenommen hat,

$$N(t_{1/2}) = \frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-t_{1/2}/\tau} \quad (5.117)$$

so dass

$$t_{1/2} = \tau \ln 2 = 0,693 \tau \quad (5.118)$$

findet man

$$|\Psi(t)|^2 = \Psi \Psi^* = \Psi_0 \Psi_0^* e^{-i(F-F^*)t} = |\Psi_0|^2 e^{-\Gamma t} \quad (5.127)$$

so dass  $i(F - F^*) = -2 \operatorname{Im}(F) = \Gamma$  ist. Lässt man den Realteil von  $F$  unverändert gleich  $m$ , so erfüllt der Ansatz mit  $F = m - i\Gamma/2$  das exponentielle Zerfallsgesetz. Damit ist

$$\boxed{\Psi(t) = \Psi_0 e^{-imt - \Gamma t/2}} \quad (5.128)$$

Um die Energie dieses Zustands zu verstehen, führen wir eine Fourier-Transformation des zeitabhängigen Zustands  $\Psi(t)$  in einen energieabhängigen Zustand  $\tilde{\Psi}(E)$  durch,

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(E) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) e^{iEt} dt = \frac{\Psi_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(m-E)t - \Gamma t/2} dt \\ &= \frac{\Psi_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{(E - m) + i\Gamma/2} \end{aligned} \quad (5.129)$$

Die Wahrscheinlichkeit, einen Zustand mit Energie  $E$  zu finden, ist proportional zu

$$|\tilde{\Psi}(E)|^2 = \tilde{\Psi}(E) \tilde{\Psi}^*(E) = \frac{|\Psi_0|^2}{2\pi} \frac{1}{(E - m)^2 + \Gamma^2/4} \quad (5.130)$$

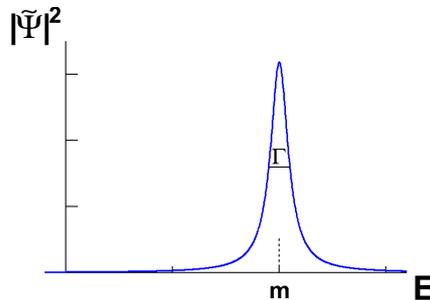
Aus der Normierung

$$\int_0^{\infty} |\tilde{\Psi}(E)|^2 dE = |\Psi_0|^2 \frac{2\pi}{\Gamma} = 1 \quad (5.131)$$

folgt

$$\boxed{|\tilde{\Psi}(E)|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(E - m)^2 + \Gamma^2/4}} \quad (5.132)$$

Dies ist die Breit-Wigner Resonanzkurve. Sie beschreibt die Energieabhängigkeit der Produktion eines instabilen Teilchens.



**Abb. 5.10** Breit-Wigner-Resonanz als Funktion von  $E$  mit Breite  $\Gamma = 0.1 m$ .

Die Produktionsrate ist maximal bei  $E = m$  und ist halb so groß bei  $E = m \pm \Gamma/2$ . Daher wird  $\Gamma$  auch natürliche Resonanzbreite genannt, denn das Verhalten erinnert z.B. an die Anregung eines Pendels nahe der Resonanzfrequenz.

## 5.8 Breit-Wigner Verteilung und virtuelle Teilchen

Die Energie des kurzlebigen Teilchens ist nicht scharf. Schreibt man Gleichung 5.119 in der Form

$$\tau \Gamma = 1 \quad (5.133)$$

so entspricht sie der Heisenberg'schen Unschärferelation. Um die Energie des Zustands mit der Genauigkeit  $\Delta E = \Gamma$  zu messen, ist mindestens die Zeit  $\Delta t = \tau$  notwendig.

Wenn im Ruhesystem des Teilchens ( $\vec{P} = 0$ ) die Energie nicht genau der Masse entspricht, dann ist

$$p^2 = E^2 - \vec{P}^2 = E^2 \neq m^2 \quad (5.134)$$

### Virtuelles Teilchen

Das Teilchen erfüllt also nicht mehr die relativistische Energie-Impuls-Beziehung, es ist nicht auf seiner "Massenschale"  $E^2 - \vec{P}^2 = m^2$ . Dies ist offenbar - für eine kurze Zeit - möglich. Man spricht in diesem Fall von einem virtuellen Teilchen.

## 6 Kerne

---

6.1	Untersuchungsmethoden zur Kernphysik . . . . .	51
6.2	Messungen der Proton- und Kernstrukturen . . . . .	51
6.3	Eigenschaften der Kerne . . . . .	56
6.4	Kernmodelle . . . . .	58
6.5	Kernzerfälle . . . . .	61
6.6	Anwendungen der Kernphysik . . . . .	69
6.7	Kerne im Kosmos . . . . .	70

---

### 6.1 Untersuchungsmethoden zur Kernphysik

Die Eigenschaften der Kerne lassen sich u.a. bestimmen durch:

- elastische Streuexperimente (Rutherford-Streuung) mit Protonen, leichten Kernen, Elektronen,
- Anregung der Kerne mit  $\gamma$ , Neutronen, Elektronen, u.a.
- inelastische Stöße,
- Erzeugung neuer Kerne durch Fusion leichterer Kerne an Beschleunigern
- Messung der Zerfallsprodukte instabiler Kerne in  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  Zerfällen
- Untersuchung des Quark-Gluon-Plasma

Die Massen der Kerne können zudem in Massenspektrometern mit Spurkammern vermessen werden. Hinzu kommt die Messung der Spins der Kerne.

### 6.2 Messungen der Proton- und Kernstrukturen

Seit den 1950er Jahren wurden in Elektron-Streuexperimenten die Strukturen und Anregungen von Protonen und Kernen untersucht. Die folgenden Bilder zeigen einige experimentelle Resultate. Aus ihnen folgt:

- Hadronen wie Protonen, Neutronen oder Pionen haben eine Ausdehnung.

## 6.2 Messungen der Proton- und Kernstrukturen

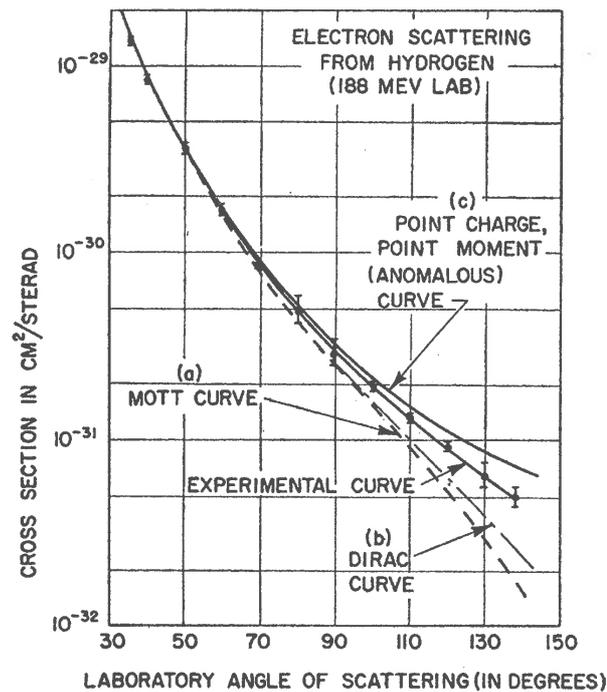
- Der Formfaktor des Protons zeigt keine Beugungsminima. Die Ladungsdichte des Protons fällt etwa exponentiell nach außen ab

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-r/a} \quad (6.1)$$

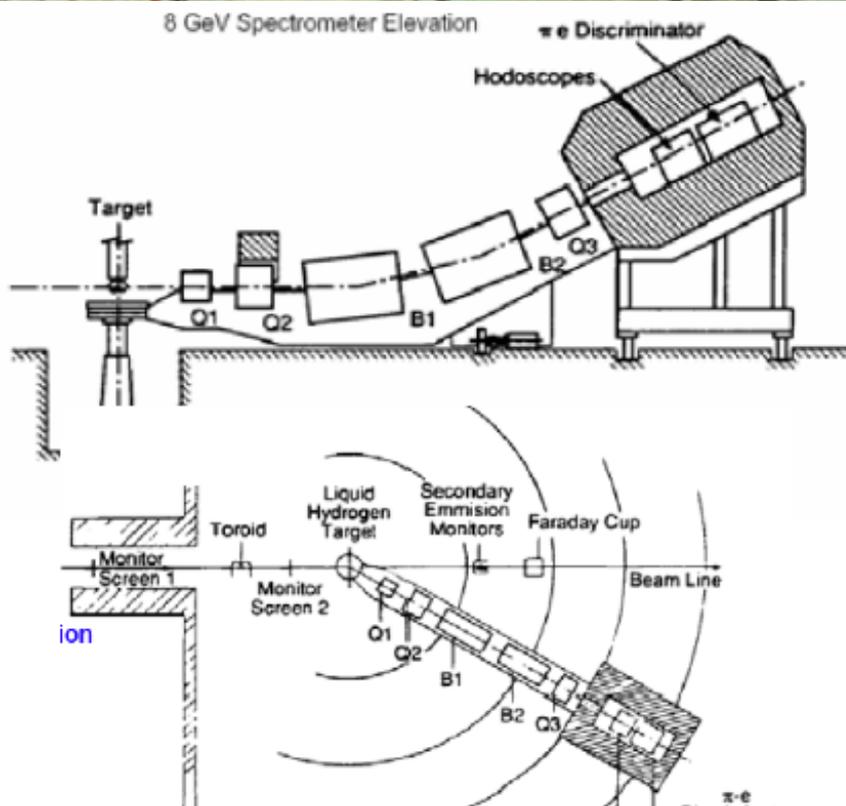
mit  $a = 0,23 \text{ fm}$ . Der mittlere Ladungsradius ist

$$\langle r^2 \rangle = \int d^3r r^2 f(r) \approx 0,74 \text{ fm}^2 \quad (6.2)$$

- Bei Energien im GeV Bereich kann das Proton angeregt werden. Die Massen der Anregungszustände liegen typisch 100 MeV höher als die Proton-Masse.
- Kerne zeigen Beugungsminima. Sie haben eine Nukleonendichte, die im Zentrum fast konstant und unabhängig von der Kernmasse ist. Weiter außen fällt die Ladungsdichte kontinuierlich ab. Die Beugungsminima sind daher nicht sehr ausgeprägt. Der Radius der Kerne steigt mit  $A^{1/3}$  mit der Massenzahl  $A$ .

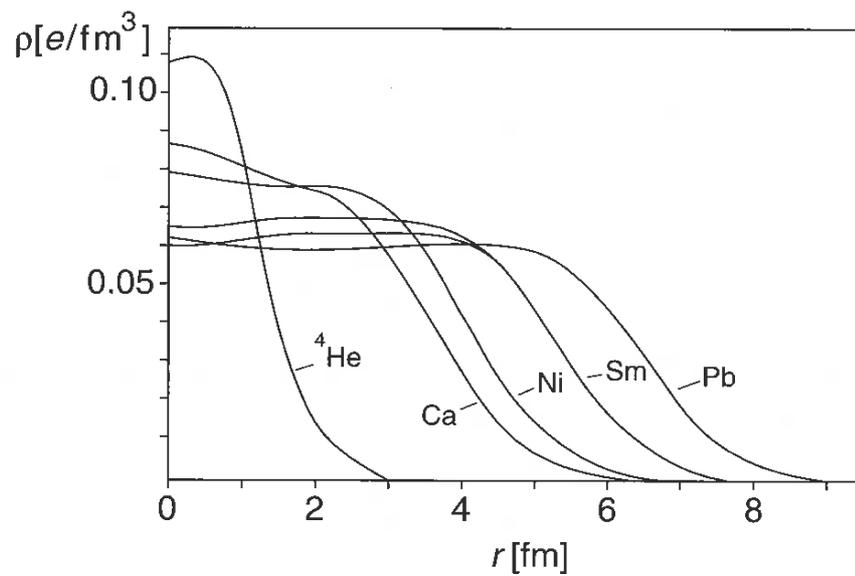
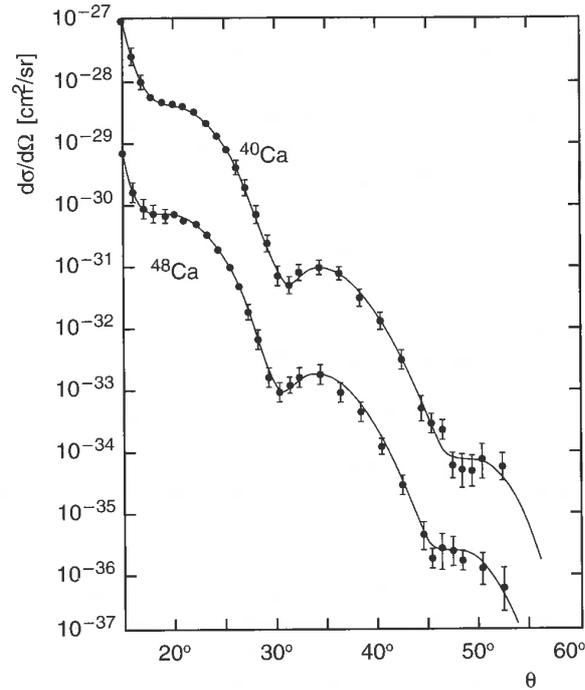


**Abb. 6.1** Wirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels in Elektron-Proton Streuung. Die Elektronenergie betrug 188 MeV. Die Daten lassen sich weder durch den Rutherford- noch den Mott- oder der kompletten Dirac-Theorie erklären. Der Unterschied zu diesen Vorhersagen war die erste Beobachtung einer Ausdehnung des Protons durch Hofstaedter 1956.



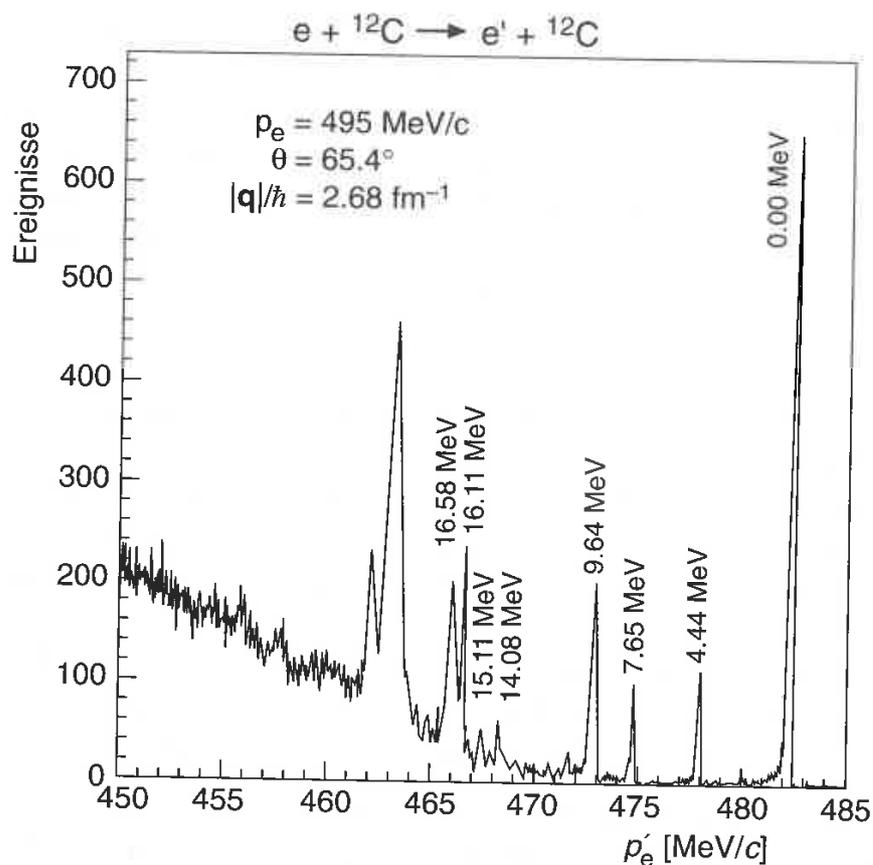
**Abb. 6.2** Schema und Foto eines typischen Experiments zur Elektron-Proton Streuung. Mit diesem Experiment am SLAC konnte erstmals die innere Struktur der Protonen aufgelöst und der Nachweis von Quarks geführt werden.

## 6.2 Messungen der Proton- und Kernstrukturen

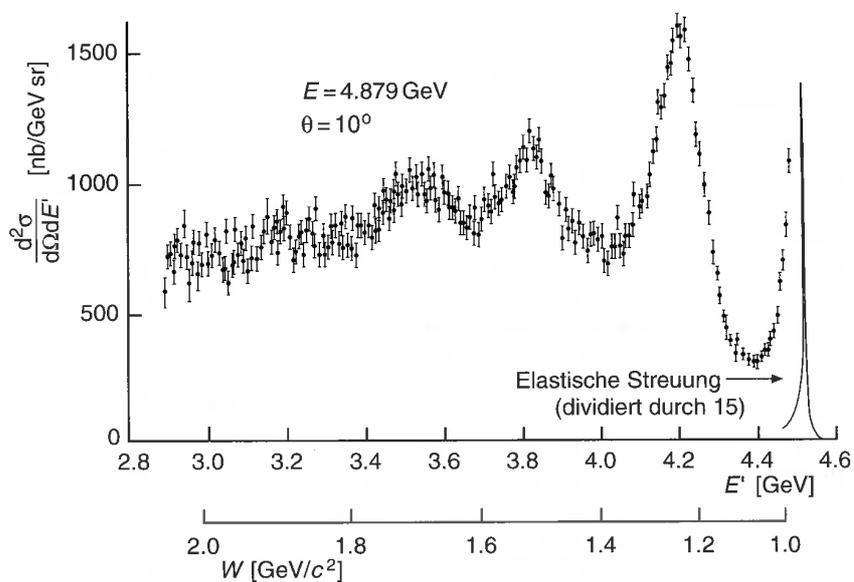


**Abb. 6.3** Oben: Elektron Streuung an Calcium mit verschiedenen Massenzahlen. Man erkennt mehrere Beugungsminima, wie es einer Streuung an einer Kugel entspricht. Die Minima sind aber nicht sehr ausgeprägt. Daraus ergibt sich ein nicht sehr schneller Abfall der Ladungsdichte am Rand der Kugel.

Unten: Berechnete Ladungsdichte in verschiedenen Kernen.



**Abb. 6.4** Energiespektrum inelastisch gestreuter Elektronen an  ${}^{12}\text{C}$  Kernen. Die Elektronenergie betrug 495 MeV.



**Abb. 6.5** Wirkungsquerschnitt als Funktion der Energie gestreuter Elektronen an Protonen. Die Elektronenergie betrug 4,879 GeV. Der dominante Anteil elastisch gestreuter Elektronen ist verkleinert dargestellt. Man erkennt die ersten Anregungsniveaus der Protonen.

## 6.3 Eigenschaften der Kerne

### 6.3.1 Ausdehnung des Kerne

Wie bereits in Abschnitt 6.2 beschrieben, kann man aus der Rutherford-Streuung die geometrische Gestalt der Kerne bestimmen:

- Bei Streuwinkeln nahe  $180^\circ$  (Rückstreuung) lässt sich der Kernradius bestimmen, indem die Energie so lange erhöht wird, bis sich eine Abweichung vom Rutherford-Wirkungsquerschnitt ergibt. Dies ist der Fall für

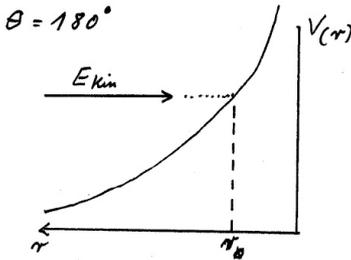


Abb. 6.6 Bestimmung der Kernradien bei  $\alpha$ -Kern-Streuung.

$$E_{kin} = V(r_0) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2}{r_0} = \underbrace{\frac{Z_1 Z_2}{137}}_{=\alpha_{em}} \frac{200 \text{ MeV fm}}{r_0} \quad (6.3)$$

Für das Beispiel  $\alpha$ -Gold ( $Z_\alpha = 2, Z_{Au} = 79$ ) wird eine Abweichung beobachtet bei  $\approx 25 \text{ MeV}$ , was einem Kernradius von  $\approx 8 \text{ fm}$  entspricht, also ca. ein Faktor 1000 kleiner als ein typischer Atomradius.

- Die Formfaktoren, d.h. die Abweichung vom Rutherford- oder Mott-Wirkungsquerschnitt sind die Fourier-Transformierten der Ladungsverteilungen als Funktion des Abstands vom Kernzentrum, siehe Abschnitt 6.2,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{Mott} \cdot |F(Q^2)|^2 \quad (6.4)$$

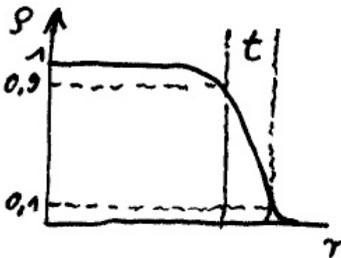


Abb. 6.7 Saxon-Woods-Potential der Ladungsverteilung der Kerne.

Die Form der Ladungsverteilungen der Kerne (vgl. Abbildung 6.3) kann approximiert werden durch die *Saxon-Woods Verteilung*

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R_{1/2})/t}} \quad (6.5)$$

Für die Dicke des Randbereichs  $t$  und den Radius  $R_{1/2}$ , definiert als Abstand bei halber Ladungsdichte, findet man experimentell

$$t = 0,5 \text{ fm} \quad R_{1/2} = 1,2 \text{ fm} \cdot A^{1/3} \quad (6.6)$$

Die Massendichte der Kerne ist damit extrem groß,

$$\rho \hat{=} 0,18 \text{ Nukleonen/fm}^3 \hat{=} 2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3 \quad (6.7)$$

Eine konstante Dichte über weite Bereiche der Kerne und der Zusammenhang

$$R_{1/2} \sim A^{1/3} \quad (6.8)$$

sind zu erwarten, wenn Kerne dichte Packungen von Nukleonen sind, d.h. wenn die Nukleonen  $p, n$  ausgedehnt und nicht oder kaum kompressibel sind.

## 6.3.2 Massen und Bindungsenergien der Kerne

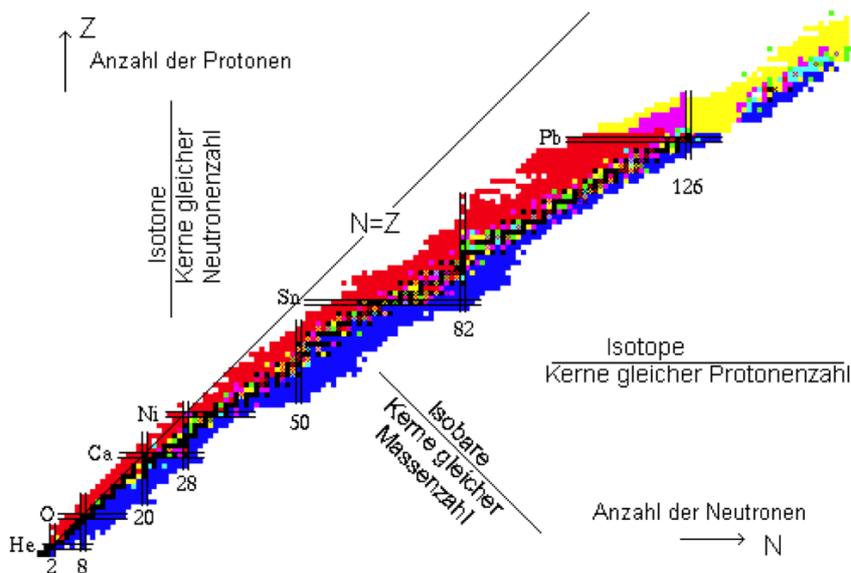
Als Notation für die Kerne des chemischen Elements  $X$  wird verwendet

$$A = \text{Massenzahl} = Z + N \quad (6.9)$$

$${}^A_Z X_N \quad \text{mit} \quad Z = \text{Kernladung} = \text{Anzahl der Protonen} \quad (6.10)$$

$$N = \text{Anzahl der Neutronen} \quad (6.11)$$

e.g.  ${}^4_2\text{He}_2$ ,  ${}^{56}_{26}\text{Fe}_{30}$



**Abb. 6.8** Karte der Nuklide als Funktion der Anzahl der Neutronen und Protonen. Schwarz eingezeichnete Isotope sind stabil, rote und blaue Isotope zerfallen durch  $\beta^+$  beziehungsweise  $\beta^-$ -Zerfall, gelb gezeichnete Isotope zerfallen durch  $\alpha$ -Zerfall.

Abbildung 6.8 zeigt eine Karte der stabilen und instabilen Kerne als Funktion der Zahl ihrer Neutronen und Protonen. Zu erklären ist

- warum  $Z \approx N$  für leichte Elemente,
- warum  $Z < N$  für schwere Elemente,
- warum es nur einen schmalen Bereich mit stabilen Kernen gibt.

Die Massen der Nukleonen und Elektronen sind

$$\text{Proton} \quad m_p = 938,272 \text{ MeV}$$

$$\text{Neutron} \quad m_n = 939,565 \text{ MeV}$$

$$\text{Elektron} \quad m_e = 0,511 \text{ MeV}$$

Zur Definition der atomaren Masseneinheit wird ein bestimmtes Isotop des Kohlenstoffs verwendet:

$$1u = \frac{1}{12} \text{Masse}({}^{12}_6\text{C}_6) = 931,494 \text{ MeV} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{kg} \quad (6.12)$$

Isotope: gleiche  $Z$ , gleiche Elemente

Isobare: gleiches  $A$

Isotone: gleiches  $N$

Isomere: metastabile Kerne

## 6.4 Kernmodelle

Die Messung von Massen der Atome durch Massenspektrometer ist sehr genau, so dass dadurch auf die Bindungsenergie der Kerne geschlossen werden kann. Die Atommasse ist gegeben durch

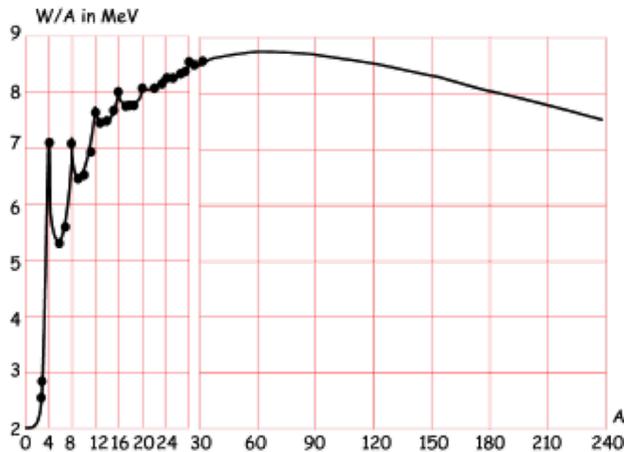
$$M_A = \text{Atommasse} \hat{=} \underbrace{\text{Kern} + \text{Elektronen} + \text{Bindungsenergien}}_{\text{ganzes Atom}} \quad (6.13)$$

Die Bindungsenergie der Elektronen in der Hülle ist vernachlässigbar klein. Daher ist die Bindungsenergie des Kerns

$$E_B = M_K - Z \cdot M_p - N \cdot M_n \quad (6.14)$$

Die Bindungsenergie entspricht also gerade der Massendifferenz zur gleichen Anzahl Protonen und Neutronen. Genaue Messungen können erreicht werden durch die Messung von Atommassen,

$$E_B = M_A - Z \cdot M_H - N \cdot M_n \quad (6.15)$$



**Abb. 6.9** Bindungsenergie je Nukleon als Funktion der Massenzahl.

Man findet:

1. Die typische Bindungsenergie je Nukleon ist ca.  $E_B/A \approx 8 \text{ MeV}$ .
2.  $E_B/A$  wird  $\approx$  konstant für große  $A$ . Dies entspricht einer kurzreichweitigen Wechselwirkung nur mit nächsten Nachbarn.
3. Es gibt Maxima bei bestimmten  $A$ : He, Be, ...  
Helium ist besonders stabil,  $E_B(\text{He}) = 29 \text{ MeV}$ . Dies deutet auf quantisierte Energieniveaus hin.
4. Die stabilsten Kerne liegen bei  $A \approx 56$ : Eisen. Dies erlaubt Energie-Gewinnung durch Kernfusion oder Kernspaltung.

## 6.4 Kernmodelle

Da es keine Kenntnis über die exakte Form der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung gibt, sind eine Reihe semiklassischer Modelle entwickelt worden, unter anderem:

- Fermi-Gas Modell (analog zu Elektronen im Metall)
- Tröpfchen-Modell
- Schalen-Modell

### 6.4.1 Fermi-Gas-Modell der Kerne

Es wird angenommen, dass Kerne als Fermi-Gase aus unabhängigen Fermionen, Neutronen und Protonen, beschrieben werden können. Da Kerne Vielteilchen-Systeme sind, können keine exakten Lösungen berechnet werden. Daher wird für jedes Fermion die Summe der Wechselwirkungen mit den anderen Fermionen durch einen Potentialtopf genähert,

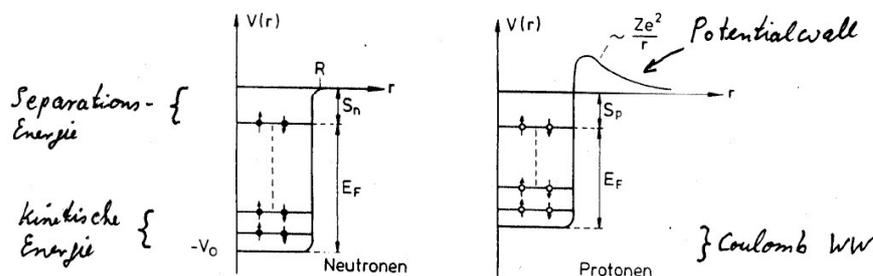


Abb. 6.10 Potentialtöpfe für einzelne Neutronen (links) und Protonen (rechts).

- Pauli-Prinzip: 2 Neutronen (Protonen) je Energieniveau.
- Protonen: Die Coulomb-WW im Kern reduziert die Tiefe des Potentialtopfs. Außerdem ergibt sich ein Potentialwall außerhalb des Kerns.
- Der flache Boden des Potentialtopfes bedeutet, dass innerhalb des Kerns freie Nukleonen vorliegen.
- Die Potentialtiefe  $V_0 \approx -40 \text{ MeV}$  ist unabhängig von  $A$  (Kerngröße) und damit der Anzahl der Nukleonen (hier Neutronen).
- Die Coulomb-Abstoßung erklärt den Neutronen-Überschuss im Kern. Gleiche Fermi-Energien  $E_{F,Proton} \approx E_{F,Neutron}$  sind energetisch am günstigsten. Ansonsten erlaubt es der  $\beta$ -Zerfall  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  oder  $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ , einen energetisch günstigeren Zustand zu erreichen.

### 6.4.2 Tröpfchen-Modell der Kerne

Die kleine Reichweite der Kräfte im Kern erlaubt eine Analogie zu den Van-der-Waals Kräften in Flüssigkeiten. C. F. v. Weizsäcker hat daraus folgend eine Parametrisierung der Bindungsenergien und Kernmassen entwickelt (1935),

**Volumenenergie:** WW mit direkten Nachbarn:  $\sim A \sim V$   
 $E_1 = c_1 \cdot A$   $c_1 = -15,84 \text{ MeV}$

**Oberflächenenergie:** an Oberfläche weniger Nachbarn  
 Oberflächenspannung  $\sim R^2 \sim A^{2/3}$   
 $E_2 = c_2 A^{2/3}$   $c_2 = +18,33 \text{ MeV}$

**Coulomb-Energie** nur für Protonen, große Reichweite  
 $V(r) \sim \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$  WW mit anderen Protonen  
 $E_3 = c_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$   $c_3 = 0,714 \text{ MeV}$

**Asymmetrie-Energie:** n-p Gleichgewicht durch Gleichgewicht des Fermi-Niveaus von n, p  
 $E_{kin(n+p)} \sim N E_F^n + Z \cdot E_F^p \sim N \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} + Z \left(\frac{Z}{V}\right)^{2/3}$   
 $E_{kin}$  ist minimal für  $Z = N$  ← Stabilität  
 erste Näherung:  $E_{kin} \sim (N - Z)^2$   
 $E_4 = c_4 \frac{(N-Z)^2}{4A}$   $c_4 = 92,8 \text{ MeV}$

**Paarerzeugungsenergie:** jedes Niveau kann durch 2p oder 2n besetzt werden, ungerade Anzahlen sind ungünstig

$$E_5 = \begin{cases} -c_5/\sqrt{A} \\ = 0 \\ = +c_5/\sqrt{A} \end{cases} \text{ für } \begin{cases} (g,g) & \text{ Kerne} \\ (g,u) & \text{ und } (u,g) \text{ Kerne} \\ (u,u) & \text{ Kerne} \end{cases}$$

$(g,u) \hat{=} (\text{gerade } \#p, \text{ ungerade } \#n)$   $c_5 = 11,46 \text{ MeV}$

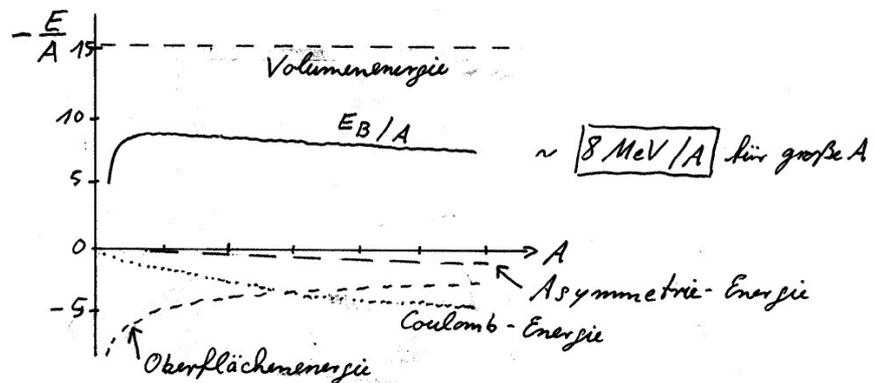


Abb. 6.11 Beiträge zur Bindungsenergie im Tröpfchenmodell.

Die gesamte Bindungsenergie nach Weizsäcker ist damit

$$E_B = \underbrace{c_1 A}_{\text{bindend}} + \underbrace{c_2 A^{2/3} + c_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + c_4 \frac{(N-Z)^2}{4A}}_{\text{anti-bindend}} + E_5 \quad (6.16)$$

Im allgemeinen ergibt sich eine gute Beschreibung der Bindungsenergien  $E_B$  der Kerne. Es gibt jedoch Kerne mit besonders großer  $E_B$  für

$$Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82 \quad (6.17)$$

$$N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 \quad (6.18)$$

Magische Zahlen

In Analogie mit der Atomphysik lassen sich besonders stabile Systeme als abgeschlossene Schalen verstehen. Edelgase sind besonders stabil für

$$Z = 2, 10, 18, 36, 54, 86 \quad \text{Anzahl der Elektronen} \quad (6.19)$$

Dies sind nicht die Zahlen in der Kernphysik, da sich die Potentiale unterscheiden.

### 6.4.3 Schalenmodell

Betrachtet werden Fermi-Gase im Woods-Saxon Potential. Da die Reichweite der Kernkraft klein ist, sollte das Potential dem Verlauf der Ladungsdichte  $\rho(r)$  folgen. Zusätzlich nimmt man eine Spin-Bahn-WW der Nukleonen an, wie in der Atomphysik,

$$V_{ls} = V_{ls}^0 \cdot (\vec{l} \cdot \vec{s})$$

Dieser Effekt ist in der Kernphysik deutlich stärker als in der Hülle, und ähnlich groß wie der Niveau-Abstand. Die Lösung der Schrödinger Gleichung mit  $V = V(r) + V_{ls}$  liefert eine Erklärung der magischen Zahlen als gefüllte Niveaus mit großem Abstand zum nächsten Niveau. Dieses Modell erklärt auch die Kernspins sowie die magnetischen Momente. Es kann zusätzlich verfeinert werden durch Kopplung zwischen Paaren von Nukleonen.

## 6.5 Kernzerfälle

Kernzerfälle sind spontane Umwandlungen, die normalerweise ohne äußeren Einfluß ablaufen und auch nicht beeinflusst werden können. Sie folgen wie die Zerfälle elementarer Teilchen dem Zerfallsgesetz

$$dN = -\Gamma N(t) dt \quad \Rightarrow \quad N(t) = N_0 e^{-t/\tau} \quad (6.20)$$

mit der Lebensdauer  $\tau \equiv 1/\Gamma$ . Die Aktivität eines Stoffes ist die Anzahl der Zerfälle pro Zeit,

$$R = \Gamma \cdot N = \frac{\#\text{Zerfälle}}{\text{Zeit}} \quad (6.21)$$

Die Aktivität wird in der Einheit Becquerel gemessen

$$1\text{Bq} = \frac{1\text{Zerfall}}{\text{s}} \quad (6.22)$$

Veraltet ist die Einheit 1 Curie =  $3,70 \cdot 10^{10}$  Bq. Kernzerfälle treten in folgenden Formen auf:

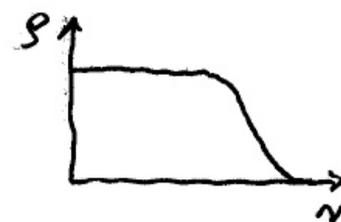


Abb. 6.12  
Ladungsverteilung.

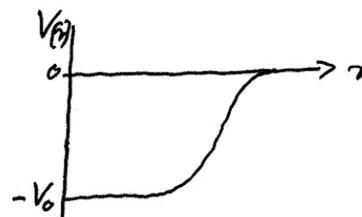


Abb. 6.13  
Potential.

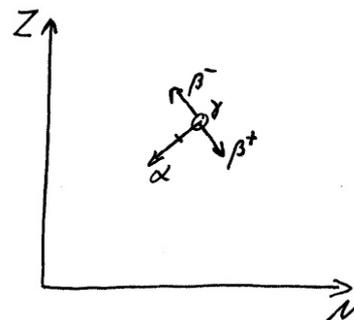
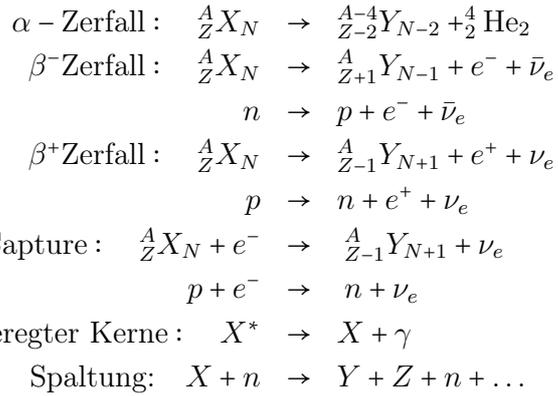


Abb. 6.14  
Änderung von  $N$  und  $Z$  durch verschiedene Zerfälle.



### 6.5.1 $\alpha$ -Zerfall der Kerne

Für schwere Kerne ist die Kernladungszahl sehr groß, so dass sie aufgrund der Coulomb-WW instabil werden. Energetisch günstiger ist dann die Abgabe von zwei  $p$  und zwei  $n$ . Im Kern bildet sich ein  $\alpha$ -Teilchen, denn Helium hat eine besonders große Bindungsenergie. Klassisch ist der  $\alpha$ -Zerfall verboten. Quantenmechanisch kann das  $\alpha$ -Teilchen durch den Coulomb-Wall tunneln, wenn der sogenannte  $Q$ -Wert, d.h. die gesamte freiwerdende kinetische Energie der Reaktion  $X \rightarrow Y + \alpha$ , positiv ist

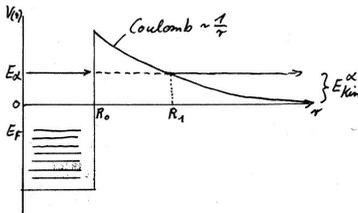


Abb. 6.15  
Tunneleffekt beim  $\alpha$ -Zerfall.

$$Q = (m_X - m_Y - m_\alpha) = E_{kin,Y} + E_{kin,\alpha} \quad (6.23)$$

Im CMS System ist  $\vec{P}_\alpha = -\vec{P}_Y$  und damit

$$\frac{E_{kin,\alpha}}{E_{kin,Y}} \approx \frac{p_\alpha^2}{m_\alpha} \cdot \frac{m_Y}{p_Y^2} = \frac{m_Y}{m_\alpha} \Rightarrow E_{kin,\alpha} = \frac{Q}{1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}} \quad (6.24)$$

Für schwere Kerne ist allgemein  $Q \ll m_\alpha, m_Y$ , so dass  $E_{kin,Y}$  fast vernachlässigt werden kann. In jedem Fall ergibt sich aufgrund des 2-Körperzerfalls eine scharfe  $\alpha$ -Energie.

Beim Tunneleffekt entspricht die Transmission  $T$  der |Amplitude|<sup>2</sup> der auslaufenden Welle und die Zerfallskonstante ist

$$\Gamma \sim T \quad (6.25)$$

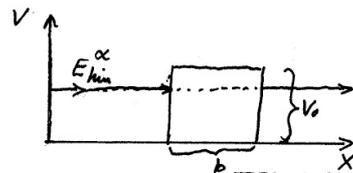


Abb. 6.16  
Tunneleffekt bei einem Kastenpotential.

Für einen Tunnelprozess durch ein Kastenpotential ergibt sich für die einlaufende ebene Welle eine exponentielle Abnahme im verbotenen Bereich

$$T \sim e^{-2b\sqrt{2m_\alpha(V-E_\alpha)}/\hbar} \quad (6.26)$$

Für das Coulomb-Potential lässt sich der *Gamov-Faktor*

$$T \sim e^{-G} \quad G = \text{Gamov-Faktor} \quad (6.27)$$

berechnen durch ein Integral über den Potentialwall ( $E_{kin,\alpha} = V(R_1)$ ),

$$G = +\frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{2m_\alpha(V(r) - E_{kin,\alpha})} dr \quad (6.28)$$

$$= \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{4m_\alpha Z e^2}{4\pi\epsilon_0}} R_1 \left( \arccos \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} - \sqrt{\frac{R_0}{R_1} - \frac{R_0^2}{R_1^2}} \right) \quad (6.29)$$

Mit

$$\frac{V_{max}}{V(R_1)} = \frac{R_1}{R_0} \gg 1 \quad (6.30)$$

für schwere Kerne folgt

$$G \approx \frac{2}{\hbar} \cdot \frac{2 \cdot Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{E_{kin,\alpha}}} - 2\sqrt{\frac{2m_\alpha}{V_{max}}} \right), \quad (6.31)$$

Für  $V_{max} \ll M_\alpha$  folgt

$$\Gamma \sim e^{-const/\sqrt{E_{kin,\alpha}}} \quad (6.32)$$

Dies entspricht der empirisch gefundenen Geiger-Nuttall Regel, aufgrund der die Reichweite (und damit  $E_{kin,\alpha}$ ) in einer Nebelkammer mit der Zerfallskonstanten (oder Lebensdauer) eines Isotops verknüpft ist.

$$\ln \Gamma = -a_1 \frac{Z}{\sqrt{E_{kin,\alpha}}} + a_2 \quad (6.33)$$

Die bei einem  $\alpha$ -Zerfall frei werdene Energie lässt sich in sog. Termschemata darstellen.

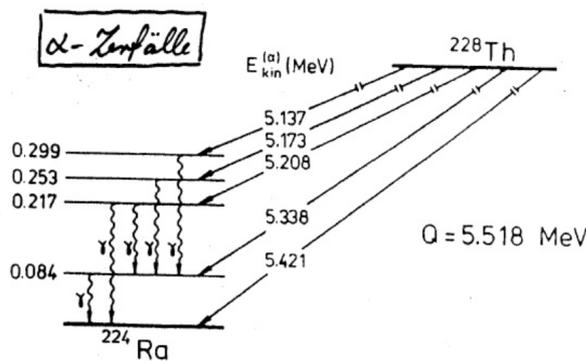


Abb. 6.20 Termschema für Thorium-Zerfälle in angeregte Niveaus des Radiums mit anschließenden  $\gamma$ -Zerfällen.

### 6.5.2 $\beta$ -Zerfälle der Kerne

Der freie  $\beta^-$ -Zerfall eines Neutrons

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{Lebensdauer } \tau_n = 887\text{s} \quad (6.34)$$

ist ein 3-Körperzerfall und zeigt daher kein monochromatisches sondern ein kontinuierliches Energiespektrum der  $e^-$ . Historisch hat die Entdeckung des kontinuierlichen Energiespektrums zum Postulat der Existenz von Neutrinos (Pauli 1930) und später zur Entdeckung der Neutrinos in der Reaktion  $\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ + n$  (und  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma\gamma$ ) geführt (Cowan 1953). Der Wirkungsquerschnitt von Neutrinos im MeV Bereich ist mit  $\sigma \approx 10^{-43}\text{m}^2$  so klein, dass der Nachweis einzelner Neutrinos nicht möglich ist. Da auch der Rückstoß auf den Kern

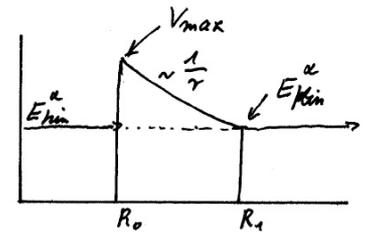


Abb. 6.17 Zum Gamov-Faktor beim  $\alpha$ -Zerfall.

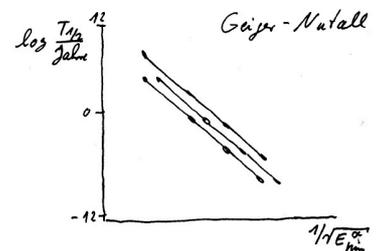


Abb. 6.18 Beziehung zwischen Lebensdauer und Energie der  $\alpha$ -Teilchen für verschiedene Zerfallsketten.

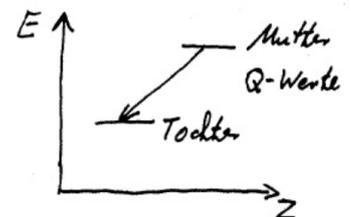


Abb. 6.19 Prinzip des Termschemas für einen  $\alpha$ -Zerfall.

zu klein für einen Nachweis ist, kann nur das  $e^+$  benutzt werden, um den Prozess zu verstehen.

Der  $\beta^-$  Zerfall ist energetisch erlaubt für  $Q > 0$ . Für den Prozess

$$\begin{aligned} {}^A_Z X_N &\rightarrow {}^A_{Z+1} Y_{N-1} + e^- + \bar{\nu}_e & (6.35) \\ M_{A,Z} - Zm_e &= M_{A,Z+1} - (Z+1)m_e + m_e + m_\nu + \sum_{Y,e,\nu} E_{kin} \end{aligned}$$

ist daher

$$Q_{\beta^-} = M_{A,Z} - M_{A,Z+1} \quad (6.36)$$

Analog gilt für den  $\beta^+$ -Zerfall

$$\begin{aligned} {}^A_Z X_N &\rightarrow {}^A_{Z-1} Y_{N+1} + e^+ + \nu_e & (6.37) \\ M_{A,Z} - Zm_e &= M_{A,Z-1} - (Z-1)m_e + m_e + m_\nu + \sum_{Y,e,\nu} E_{kin} \end{aligned}$$

und daher

$$Q_{\beta^+} = M_{A,Z} - M_{A,Z-1} - 2m_e \quad (6.38)$$

Unter *Electron-Capture* (EC) versteht man den Einfang eines Elektrons aus der Hülle durch den Kern mit der anschließenden Umwandlung

$$\begin{aligned} {}^A_Z X_N + e^- &\rightarrow {}^A_{Z-1} Y_{N+1} + \nu_e & (6.39) \\ M_{A,Z} - Zm_e + m_e + |E_B^e| &= M_{A,Z-1} - (Z-1)m_e + m_\nu + \sum_{Y,\nu} E_{kin} \end{aligned}$$

und daher

$$Q_{EC} = M_{A,Z} - M_{A,Z-1} - |E_B^e| \quad (6.40)$$

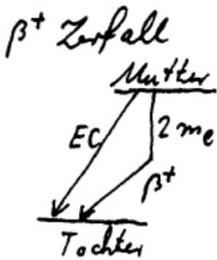


Abb. 6.21 Prinzip des Termschemas für  $\beta^+$ -Zerfall.

Der Einfang des  $e^-$  erfolgt dominant aus der  $K$ -Schale, da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $\Psi\Psi^*$  der Elektronen am Ort des Kerns  $r \approx 0$  größer Null ist. Dieser Prozess kann durch zwei verschiedene Prozesse nachgewiesen werden.

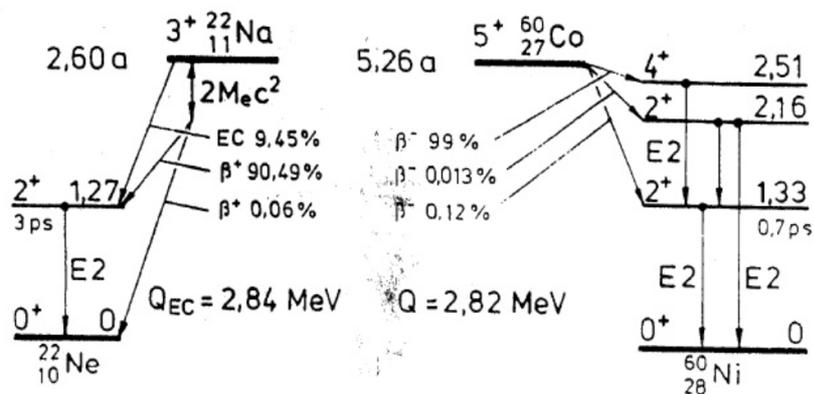
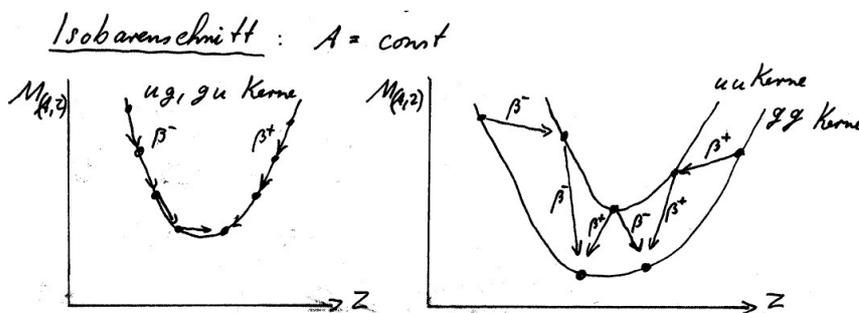


Abb. 6.22 Beispiel für Termschemata für EC und  $\beta^+$  Zerfall (links) und für  $\beta^-$  Zerfall (rechts).

- Sehr schnell erfolgt ein Sprung von Elektronen aus einer höheren Schale in die  $K$ -Schale. Die dabei frei werdende Energie wird in Form von  $\gamma$ -Quanten frei (Röntgen-Fluoreszenz).
- Die frei werdende Energie wird auf ein anderes Elektron in einer höheren Schale übertragen, und dieses Elektron kann als freies Elektron nachgewiesen werden (Auger-Elektronen).

Bei allen  $\beta$ -Zerfällen bleibt die Massenzahl unverändert,  $A = \text{const.}$  Den Effekt der  $\beta$ -Zerfälle sieht man daher am besten an einem Isobarenschnitt.

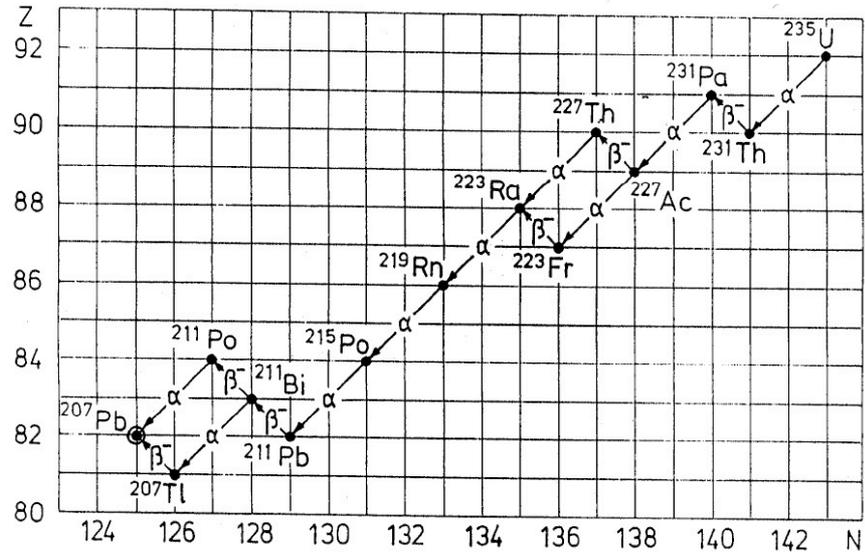


**Abb. 6.23** Atommassen für einen Isobarenschnitt für (links)  $ug$  und  $gu$  Kerne sowie für (rechts)  $uu$  und  $gg$  Kerne.

Die stabilsten Kerne entlang eines Isobarenschnitts entsprechen den Kernen mit der kleinsten Atommasse (maximale Bindungsenergie). Es zeigt sich daher ein *Tal* der Stabilität.

- Bei  $ug$  und  $gu$  Kernen gibt es jeweils nur einen stabilen Kern im Minimum der Atommasse.
- $uu$ -Kerne sind energetisch ungünstiger als  $gg$ -Kerne mit gleichem  $A$ . Es gibt daher keine stabilen  $uu$ -Kerne, aber häufig mehrere stabile  $gg$ -Kerne.

Insgesamt ergeben sich für die schwersten Kerne Abfolgen von  $\alpha$  und (zumeist)  $\beta^-$  Zerfällen, die dem Tal der Stabilität folgen, bis ein stabiler Kern erreicht ist.



**Abb. 6.24** Beispiel einer Zerfallskette ( $^{235}\text{U}$ ) durch nacheinander ablaufende  $\alpha$  und  $\beta^-$  Zerfälle bis zum Blei.

Die Lebensdauer aufgrund des  $\beta$ -Zerfalls lässt sich durch Fermi's goldene Regel ausrechnen (Gl. 5.8),

$$\Gamma = 2\pi |\mathcal{M}_{fi}|^2 \varrho(E) \tag{6.41}$$

Der Phasenraumfaktor  $\varrho(E)$  wird, unter Berücksichtigung der Energieerhaltung ( $\delta(E_f - E_i)$ ), ein Integral über alle möglichen Impulse des Elektrons und des Neutrinos im Endzustand beinhalten.

$$\rho(E) = \int \delta(E_f - E_i) df \tag{6.42}$$

Vernachlässigt man den Rückstoß auf den Kern so ist

$$df = \frac{V^2}{\hbar^2} d\vec{p}_e d\vec{p}_\nu \tag{6.43}$$

und

$$\rho = \int \delta(E_0 - E_{kin,e} - E_{kin,\nu}) p_e^2 E_\nu^2 dp_e dE_\nu \tag{6.44}$$

Nimmt man nun an, dass das Matrixelement kaum von den genauen Impulsen im Endzustand abhängt und berücksichtigt zusätzlich eine Korrektur durch die Coulomb-WW zwischen Kern und Elektron (Fermifunktion  $F(Z, E_{kin,e})$ ), so ist

$$\frac{dN}{dp_e} = c \cdot |V_{fi}|^2 F(Z, E_{kin,e}) (E_0 - E_{kin,e}) p_e^2 \tag{6.45}$$

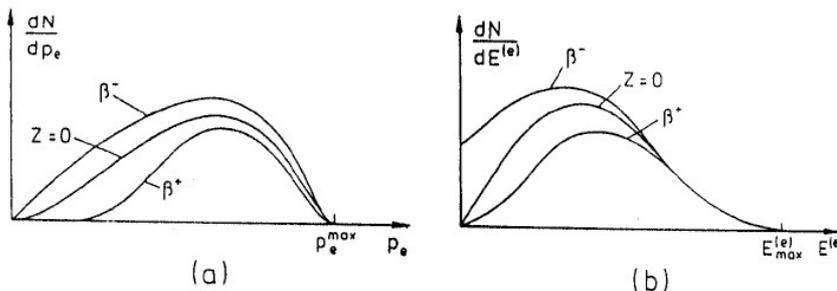


Fig. 8.61:  $\beta^+$ - und  $\beta^-$ -Spektren ohne und mit Korrektur durch die Fermi-Funktion  $F(Z, E^{(e)})$ . a) Impulsverteilung, b) Verteilung der kinetischen Energie.

Abb. 6.25 Impulsverteilung (links) und Energieverteilung (rechts) der Elektronen im  $\beta$ -Zerfall. Aufgrund der Fermi-Funktion ergibt sich eine im Mittel höhere Energie der  $\beta^+$  im Vergleich zu  $\beta^-$ .

Im sogenannten *Curie-Diagramm* lässt sich bei hohen  $\beta$ -Energien besonders gut der Effekt einer möglichen Neutrino-Masse ablesen, denn dieser führt zu einem kleineren Wert der maximalen Elektron-Energie. Speziell aus dem Tritium-Zerfall ( ${}^3_1\text{H}_2$ ) folgt daraus die bisher beste direkte Grenze für eine Neutrino-Masse,

$$m_{\nu_e} < 1,4\text{eV} \tag{6.46}$$

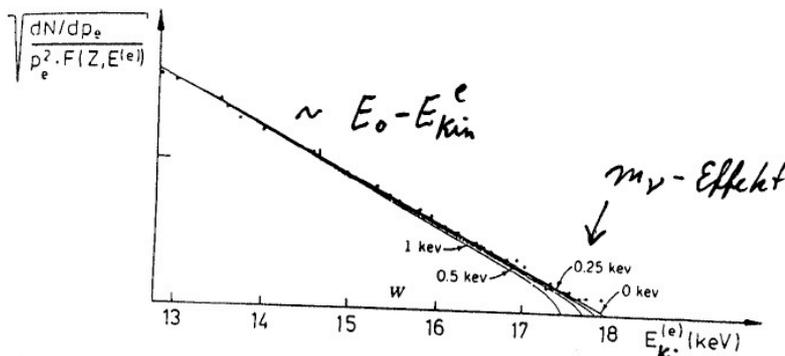


Fig. 8.62: Ausschnitt aus dem Curie-Diagramm des  $\beta^-$ -Zerfalls des Tritiums mit angenommenen Werten für  $M_{\bar{\nu}}$  zwischen 0 und 1 keV. Aus L. M. Langer, R. J. D. Moffat, *Phys. Rev.* 88(1952)689.

Abb. 6.26 Curie-Diagramm. Bei hohen Energien ist die Verteilung linear bis auf Effekte durch die Neutrino-Masse.

### 6.5.3 $\gamma$ -Zerfälle und innere Konversion

Angeregte Kerne können Ihre Energie praktisch nicht durch Stöße mit anderen Kernen abgeben, solange sie von ihren Atomhüllen abgeschirmt werden.

Selten tritt dagegen **innere Konversion** auf, bei der die Energie direkt auf einzelne Elektronen der Hülle übertragen wird. Dies ist möglich, da für die inneren Elektronenorbitale die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kernvolumen nicht null ist. Innere Konversion führt zu einem diskreten Energiespektrum der Elektronen,

$$X_i + e^- \rightarrow X_f + e^- \quad E_e = E_f - E_i - |E_B^c| \tag{6.47}$$