Prof. Dr. J. Rossbach
Inst. f. Experimentalphysik

Notizen zur Vorlesung Physik II – WS 2006/07

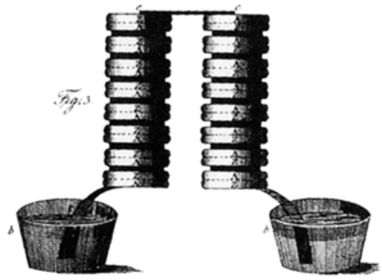
Elektrische Ströme

Studium und Anwendung elektrischer Ströme wurden erst möglich, nachdem ein Gerät erfunden war, mit dem eine zeitlich konstante Potentialdifferenz (Spannung) realisiert werden konnte. Dies war durch die Erfindung der elektrischen Batterie durch Alessandro Volta gegeben.

Die Batterie

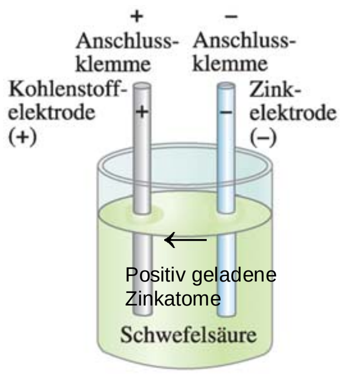
Volta fand heraus, dass Ladungen von einem Metall zu einem andersartigen fließen, wenn die beiden unterschiedlichen Metalle (z.B. Zink und Silber) leitend miteinander verbunden sind, z.B. durch eine Säure. Da auch Kohlenstoff ein guter Leiter ist, kann eines der beiden Metalle auch durch Kohlenstoff ersetzt werden. Die Ladungen werden so lange zum gegenüberliegenden Metall fließen, bis sich dort so viel Ladung angesammelt hat, dass die entstehende elektrische Spannung (bzw. das entstehenden elektrische Feld) keinen weiteren Transport zulässt.
Die Ladungen werden i.a. in Form von Ionen transportiert.
Die entstehende Spannung ist ein Charakteristikum der Paares von Metallen und liegt in der Größenordnung von 1 V.
Volta hat mehrere solcher Elemente hintereinander geschaltet und dadurch beträchtliche Spannungen erzielt.
„Batterie“ bedeutet eigentlich „Hintereinanderschaltung gleichartiger Elemente“. Übrigens hat er als „Messinstrument“ Froschmuskeln verwendet, weil Muskeln sehr empfindlich auf kleine elektrische Ströme reagieren.

Dieses Gemälde zeigt Alessandro Volta, wie er im Jahre 1801 Napoleon seine Batterie vorführt



Eine voltaische Batterie, entnommen aus der Originalveröffentlichung von Volta.

Was geschieht in der Batterie? (Beispiel: Zink-Kohlenstoff)
Einige Zinkatome gehen als (positive) Ionen in der Säure in Lösung. Dadurch wird die Zinkelektrode negativ und die Elektrolytlösung positiv geladen. Diese positive Ladung wird von der Kohlenstoff-elektrode dadurch ausgeglichen, dass sie Elektronen abgibt und dadurch selbst positiv geladen wird. Offensichtlich hängt das Ausmaß dieses Ladungstransportes von der Bereitschaft der Zinkatome ab, als Ionen in Lösung zu gehen und andererseits von der Neigung des anderen Metalls (hier Kohlenstoff), Elektronen abzugeben.
Es geht also um das Verhältnis (besser gesagt: die Differenz) dieser beiden Neigungen zueinander, auf die es ankommt. Es gibt eine Potentialdifferenz, die <u>charakteristisch für jedes Metallpaar ist</u>.



→ **elektrochemische Spannungsreihe**

Wenn die beiden „Elektroden“ der Batterie isoliert bleiben, wird der Ladungstransport durch die aufgebaute Spannungsdifferenz sehr schnell zum Erliegen kommen. Sowie aber die Ladungen von den Elektroden abfließen können, wird der interne Ladungstransport wieder in Gang gesetzt, bis die charakteristische Spannung wieder hergestellt ist. Wie lange das so weitergeht, hängt davon ab, wann sich auf der Kohlenstoff-Oberfläche so viel Zink abgelagert hat, dass das Elektrolyt keinen Kontakt mehr mit dem Kohlenstoff bekommt. Es hängt also von der effektiven Oberfläche der Metalle innerhalb des Elektrolyten ab.

Bemerkung: Man erkennt hier eine sehr schönen technische Anwendung, die man heute als „Spin-off“ von Volta’s Erfindung bezeichnen würde: Die Galvanisierung von Metalloberflächen.

Beispiel: Autobatterie: Blei – Bleidioxid (Vorteil: Aufladbar durch Anlegen einer Gegenspannung)

Der elektrische Strom

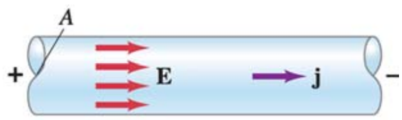
Elektrischer Strom bedeutet Transport von Ladungen durch ein elektrisch leitendes Medium oder auch durch das Vakuum (z.B. Elektronenstrahl). Ladungsträger können positiv oder negativ sein.

Stromstärke: $\boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$ (60) **Einheit: Ampere:** $\boxed{1\,\mathrm{A} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}}$

Die konventionelle, technische Stromrichtung zeigt in die Richtung, in die positive Ladungen fließen würden, d.h. in Richtung des elektrischen Feldes. Daher: Der (technische) Strom fließt von plus nach minus, vom hohen Potential zum niedrigen.

Wenn der Strom durch ein Fläche A hindurch tritt, kann man die Stromdichte definieren:

Stromdichte $\boxed{\vec{j} = \frac{dI}{dA}\vec{e}_E}$ (61)



Die Stromdichte ist ein Vektor, der in jedem Punkt in diejenige Richtung zeigt, in die sich positive Ladungsträger bewegen. Da im allgemeinen Trägheitseffekte vernachlässigbar klein sind, ist dies fast immer die Richtung der lokalen elektrischen Feldstärke $\vec{E}$. Wenn die Stärke und Richtung des Stroms nicht homogen ist, dann ist $\vec{j}$ an jeder Stelle im Raum verschieden.

Der Gesamtstrom durch eine bestimmt Fläche $\vec{A}$ ist dann

$$\boxed{I = \iint_A \vec{j}\,d\vec{A}} \qquad (62)$$

Wenn die Ladungsdichte ρ ist, und die Ladungen sich mit der mittleren Geschwindigkeit v_x in x-Richtung durch eine Fläche A bewegen, dann ist der Strom durch $I = \rho \cdot A \cdot \frac{dx}{dt} = \rho \cdot A \cdot v_x$ gegeben. Die Stromdichte hängt also direkt mit der Geschwindigkeit der Ladungsträger zusammen: $\boxed{\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}}$ (63)

Im Metall sind die Ladungsträger die „Leitungselektronen", also negative geladene Ladungsträger. Wenn n_e die Dichte der freien Elektronen bezeichnet, ist die Ladungsdichte also $\rho_e = -n_e \cdot e$.

Die Stromdichte im Metall zeigt deshalb ist deshalb in die zur Geschwindigkeit der Elektronen **entgegen gesetzten Richtung** und beträgt

$$\boxed{\vec{j}_e = -n_e \cdot e \cdot \vec{v}_e} \quad (64)$$

$\vec{v}_d$ ist die (mittlere) Geschwindigkeit der Elektronen.

Wenn sowohl negative als auch positive Ladungsträger mit den Dichten n_+ bzw. n_- vorhanden sind (z.B. in einem Elektrolyten), dann ist die

gesamte Stromdichte: $\boxed{\vec{j} = n_+ \cdot e \cdot \vec{v}_+ - n_- \cdot e \cdot \vec{v}_-}$ (65)

<u>Beispiel:</u>

Der Strom in einem Kupferdraht mit der Querschnittsfläche $A = 1\ \text{mm}^2$ betrage 1 A.

Die Stromdichte ist dann $j = \frac{1\text{A}}{1\ \text{mm}^2} = 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$. Wenn es ein freies Elektron pro Kupferatom gibt, dann ist $n_e = \frac{N(1\text{Mol})}{m(1\text{Mol})} \rho_{Cu} = 8.4 \cdot 10^{28}\ \text{m}^{-3}$. Die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen erhält man aus Gl. (64) zu $|v_e| = \frac{j_e}{e \cdot n_e} = 0.046 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$.

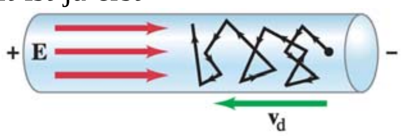
Die mittlere Driftgeschwindigkeit v_e der Elektronen im Metall ist also i.a. <u>sehr klein</u>.

Warum?

<u>Das Ohm'sche Gesetz</u>

Wenn sich die Elektronen ungehindert im Metall bewegen könnten, würde man erwarten, dass ihre Geschwindigkeit ständig zunimmt, sowie ein elektrisches Feld angelegt wird.

Achtung: Die Annahme, dass es ein elektrisches Feld im Metall gibt, steht <u>nicht</u> im Widerspruch zu unserer Vorstellung, dass es im Inneren vom Metall kein Feld geben darf. Letztere gilt nur für den statischen Fall. Solange wir zulassen, dass sich die Elektronen bewegen, dürfen wir auch ein Feld annehmen. Die Feldfreiheit ist ja erst das Resultat am Ende eines Ausgleichsprozesses!



Die Elektronen können sich aber nicht ungehindert im Metall bewegen:

Sie stoßen unablässig mit den Gitteratomen zusammen, die ihrerseits in ständiger thermischer Bewegung sind. Dadurch entsteht eine Reibungskraft, die gegen die Geschwindigkeit gerichtet ist. Es wurde in Physik 1 gezeigt (siehe z.B. Aufgabe 31, Physik 1, SS2006), dass die Geschwindigkeit unter dem Einfluss einer beschleunigenden Kraft (hier: E) nicht immer weiter zunimmt, sondern einem Grenzwert zustrebt, sowie eine (geschwindigkeitsabhängige) Reibungskraft eingeführt wird. Genau dies geschieht bei der Elektronenbewegung. Im Gleichgewicht stellt sich eine Driftgeschwindigkeit v_e ein (d.h. die Grenzgeschwindigkeit), die proportional zur beschleunigenden Kraft, also zu $\vec{E}$ ist:

$$\boxed{\vec{v}_e = -\mu \cdot \vec{E}} \quad . \tag{66}$$

μ ist eine Materialeigenschaft und wird **„Beweglichkeit“** genannt.

Man kann (mit Recht) vermuten, dass die Beweglichkeit mit zunehmender Temperatur des Metalls abnimmt, weil die thermische Bewegung der Atome stärker wird.

Gl. (66) in (64) $\vec{j}_e = -n_e \cdot e \cdot \vec{v}_e$ eingesetzt ergibt: $\vec{j}_e = n_e \cdot e \cdot \mu \cdot \vec{E}$ (67)

<u>Achtung, Verwirrungsgefahr:</u> sowohl $\vec{j}_e$ als auch $\vec{E}$ zeigen <u>gegen</u> die Driftgeschwindigkeit der Elektronen v_e!

Gl. (67) lässt sich schreiben als

Ohm’sches Gesetz in Vektorform: $\boxed{\vec{j}_e = \sigma \cdot \vec{E}}$ (68)

$\sigma = n_e \cdot e \cdot \mu$ ist die **spezifische Leitfähigkeit.**

$\rho = \dfrac{1}{\sigma}$ ist der **spezifische Widerstand** (Bitte nicht mit Ladungsdichte verwechseln!)

Einheit von ρ: $\dfrac{\mathrm{V/m}}{\mathrm{A/m^2}} = \Omega \cdot \mathrm{m} = 10^6 \Omega \cdot \dfrac{\mathrm{mm^2}}{\mathrm{m}}$ (69)

Wenn wir uns einen Körper mit homogener Leitfähigkeit σ und konstantem Querschnitt A und der Länge l vorstellen (z.B. einen Draht), dann ist der Strom durch A:

$$I = j \cdot A = \sigma \cdot A \cdot E = \sigma \cdot A \cdot \frac{U}{l}$$

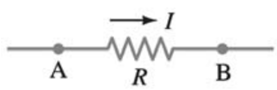
Hier ist U die Spannungsdifferenz zwischen Anfang und Ende des Drahtes. Dies können wir schreiben als

Ohm’sches Gesetz $\boxed{U = R \cdot I}$ (70)

mit dem **elektrischen Widerstand** $\boxed{R = \dfrac{l}{\sigma \cdot A} = \rho \dfrac{l}{A}}$

(71)

Einheit: Ohm $\boxed{\Omega = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}}$ **Symbol:**



Wir sehen:
Das Ohm’sche Gesetz ist kein universelles Gesetz. Es beschreibt eine Materialeigenschaft, die bei vielen Metallen recht gut erfüllt ist („ohmsche Leiter“). Diese Eigenschaft beruht auf Reibungsprozessen innerhalb des Metalls. Wir erwarten also, dass sich das Metall dabei erwärmt, dass also elektrische Energie in Wärmeenergie umgewandelt wird.
Hinweis: Die Quantentheorie besagt, dass es in einem idealen, periodischen Kristall keinen elektrischen Widerstand gibt. Ursache von R sind Stöße der Leitungselektronen mit Gitterfehlern, Fremdatomen und thermischen Schwingungen.

Zusammenfassung:

- Wir haben gesehen: Wenn im Leiter ein elektrisches Feld herrscht (d.h. eine Potentialdifferenz vorliegt), dann fließt eine Strom, dessen Ausmaß durch den spezifischen Widerstand und die Geometrie (Länge, Querschnitt) des Leiters bestimmt ist.
- Das Umgekehrte stimmt auch: Ein Strom fließt im Leiter nur, wenn eine Potentialdifferenz vorliegt (wegen der Reibungskräfte, die nur überwunden werden können, wenn ein elektrisches Feld vorliegt).
- Der Leiter stellt also nicht mehr (wie in der Elektrostatik) eine Äquipotentialfläche dar.
- Es gibt auch Leiter, für die kein linearer Zusammenhang zwischen U und I besteht (s.u.). Dann ist R vom Strom abhängig.

<u>Verlustleistung:</u>
Durchfließt eine Ladung Q einen Leiter unter der Spannungsdifferenz U, so wird die Arbeit $W = Q \cdot U$ aufgebracht und in Wärme (Reibung) umgewandelt.
Wenn der Strom $I = \frac{dQ}{dt}$ fließt, dann beträgt die Ohm’sche Verlustleistung: $P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = I \cdot U$. Mit Hilfe des Ohm’schen Gesetzes kann man schreiben:

Ohm’sche Verlustleistung: $$\boxed{P = I \cdot U = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}} \qquad (72)$$

Einheit: Watt $\boxed{1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{A}}$

Je nach dem, welche der drei Größen U, I, R man kennt, verwendet man die entsprechende Version der Gleichung (72). Für die elektrische Arbeit wir häufig die Einheit kWh verwendet: $1\mathrm{kWh} = 1000\mathrm{W} \cdot 3600\mathrm{s} = 3.6 \cdot 10^6\,\mathrm{J} = 3.6\ \mathrm{MJ}$

<u>Quick Quiz:</u> Sie haben in den USA einen Haartrockner gekauft, der für 120 V ausgelegt ist und 1000 W Heizleistung hat. Sie wollen ihn nun in Deutschland am 230-Volt–Netz betreiben? Was geschieht?

a) *Er läuft wie in den USA*
b) *Seine Leistung ist stark reduziert*
c) *Seine Heizleistung ist >> 1 kW und sein Heizwiderstand brennt durch*

Beispiele:
1. Wenn an eine bekannte Spannungsquelle (z.B. 230 V) ein „**Verbraucher**“ angeschlossen wird, dann ist seine Leistung um so höher je geringer sein Widerstand ist. Wenn eine Glühbirne einen Widerstand von $R = 881\Omega$ besitzt, dann ist ihre Leistung $W = \frac{230^2\,\mathrm{V}^2}{881\Omega} = 60\mathrm{W}$. Der Strom beträgt $I = \frac{U}{R} = 0.26\mathrm{A}$.
2. Die **Erwärmung eines Kabels** mit einem bestimmten Widerstand *R* hängt offenbar vom Strom ab, den es transportieren soll. Um bei einer bestimmten Leistung *P* des Verbrauchers diese Erwärmung zu reduzieren, ist eine hohe Betriebsspannung *U* nützlich, weil dann der erforderliche Strom gering ist: $I = P/U$. Fernleitungen werden deshalb mit 110 kV und mehr betrieben.
3. Der **menschliche Körper** wird geschädigt, wenn er von einem Strom von mehr als ca. 1 mA durchflossen wird. Ob dies bei der Berührung eines Kontaktes geschieht, dessen Potentialdifferenz zum Erdboden 230 V beträgt, hängt vom Widerstand des Körpers und vor allem vom **Kontaktwiderstand** ab. Bei feuchter Haut und nackten Füßen (Badezimmer!) ist dieser Widerstand besonders gering (1000 Ω und weniger!).
4. Bei einem **Kurzschluss** fließt der Strom nicht mehr durch den Widerstand des Verbrauchers sondern nur noch durch die (vergleichsweise niederohmigen) Kabel. Die Leistung $P = U^2/R$, die in den Kabeln in Wärme umgesetzt wird, ist dann sehr groß. Um Kabelbrand zu vermeiden, wird eine **Sicherung** verwendet, deren Widerstand so bemessen ist, dass sie durchschmilzt, bevor das das Kabel zu heiß wird.
5. Solche Sicherungen **schützen nur das Kabel (und das Haus),** aber nicht eine Person, die versehentlich das unter Spannung stehende Kabel berührt! Letzteres kann nur durch einen **Fehlerstrom-Schutzschalter** geschehen: Dieses Gerät vergleicht ständig den Strom, der durch den Hin- bzw. Rückleiter fließt. Wenn nirgendwo Strom zur Erde abfließt („Fehlerstrom“) muss die Differenz Null sein. Wenn die Differenz einen bestimmten Schwellenwert überschreitet (z.B. 10 mA), dann wird die Spannung unterbrochen.

Leitertypen:

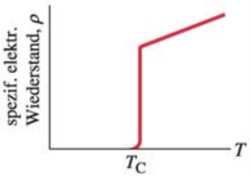
Man unterscheidet vier Gruppen von Leitern, die sich prinzipiell im Leitungsmechanismus und im spezifischen Widerstand ρ unterscheiden:

Isolatoren oder Nichtleiter: $\rho > 10^{10}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$. Es gibt überhaupt keine freien Ladungsträger. Erst oberhalb einer für das Material charakteristischen Durchschlag-Feldstärke werden Atome ionisiert. Dann sinkt der Widerstand schlagartig, so dass bei bestimmter angelegter Spannung plötzlich ein großer Strom fließt und den Isolator stark erwärmt. Dadurch sinkt der Widerstand weiter und es entsteht ein gut leitendes Medium, ein **Plasma.**

Halbleiter: $\rho = 10^{-6}\,\Omega\cdot\mathrm{m}\ldots10^{10}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$. Die Bindung der Elektronen ist schwächer als im Nichtleiter, so dass es einige Elektronen durch thermische Energie schaffen können, sich von ihrer atomaren Bindung zu befreien und sich frei im Material zu bewegen. Man erwartet für solche Substanzen also, dass die Leitfähigkeit mit zunehmender Temperatur besser wird (s.u.).

Leiter: $\rho < 10^{-6}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$. Aufgrund der Kristallstruktur und dessen atomarer Eigenschaften gibt es immer freie Elektronen. Deren Bewegung wird aber durch Stöße mit den thermisch angeregten Atomen behindert (Reibung). Man erwartet also, dass die Leitfähigkeit mit zunehmender Temperatur schlechter wird (s.u.).

Supraleiter: $\rho < 4 \cdot 10^{-25}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$. Unterhalb einer kritischen Sprungtemperatur T_c sinkt der spezifische Widerstand mancher Materialien um viele Größenordnungen auf (fast) unmessbar kleine Werte. T_c liegt bei den meisten Stoffen nur wenige K über dem absoluten Nullpunkt. Dieser Effekt ist nur quantenmechanisch zu verstehen.



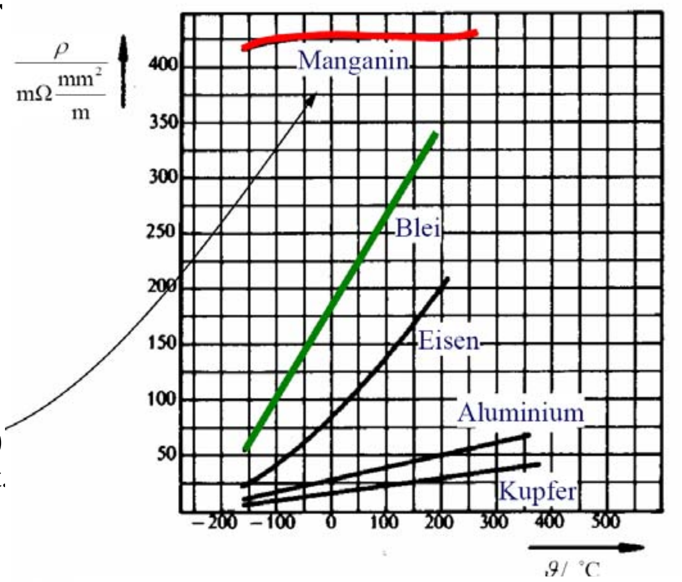
Temperaturabhängigkeit und nichtohmsche Leiter

Aus dem Gesagten ergibt sich, dass der spezifische Widerstand der meisten Metalle mit zunehmender Temperatur zunimmt. Die Temperaturabhängigkeit wird durch einen Temperaturkoeffizienten α parametrisiert:

$$\boxed{\rho(T) = \rho_{20}\left(1 + \alpha(T - 20°C)\right)} \qquad (73)$$

ρ_{20} ist der spezifische Widerstand bei $T = 20°C$.

Für Messzwecke sind Legierungen wie „Konstantan" ($Cu_{55}Ni_{45}$) und Manganin $Cu_{86}Mn_{12}Ni_{2}$) nützlich, weil ihr Temperaturkoeffizient sehr klein ist.



vgl. Clausert & Wiesemann [Bd. 1, S.27, 2005]

Die in Gl. (73) angenommene Linearität gilt bis etwa $200°C$. Im Bereich über 100 °C oder bei höheren Anforderungen an die Genauigkeit auch im Bereich zwischen 0 und 100 °C verwendet man ein Polynom 2. Grades:

$$\rho(T) = \rho_{20}\left(1 + \alpha \cdot \Delta T + \beta \cdot (\Delta T)^2\right) \qquad (74)$$

Für Kupfer gilt: $\alpha = 3{,}9083 \cdot 10^{-3}$ / °C

$\beta = -5{,}775 \cdot 10^{-7}$ / °C^2

Weitere typische Werte für ρ und α:

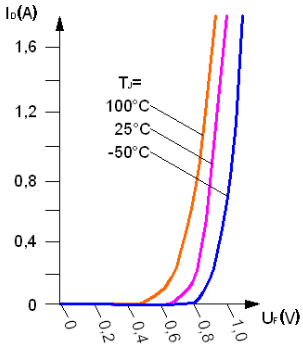
Material	ρ in $\frac{\Omega \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$	α in $\frac{1}{°C}$
Silber	0.016	0.0038
Kupfer	0.0178	0.0039
Platin	0.11	0.0038
Konstantan	0.5	-0.00003
Kohlenstoff	35	-0.0002
Silizium	$6.4 \cdot 10^{8}$	Hoch nichtlinear!
Quarz	$7.5 \cdot 10^{23}$	Hoch nichtlinear!

Die Temperaturabhängigkeit kann auch bewusst eingesetzt werden:

a) Temperaturfühler, z.B. PT100 (Platindraht mit $R = 100\Omega$)
b) Elektronische Bauteile, die ein bestimmtes Temperaturverhalten (z.B. Temperaturstabilisierung) der Schaltung erreichen. Sie bestehen i.a. aus Halbleitern, können aber wegen ihrer Kristallstruktur positive oder negative Temperaturkoeffizienten haben:
    - Kaltleiter: sie verhalten sich im Prinzip wie Metalle (besser leitend im Kalten), haben aber oft einen sehr steilen Anstieg des Widerstandes ab einer charakteristischen Temperatur (ca. 80...130°C). Beispiel: halbleitende, polykristalline Keramiken, die in einem bestimmten Temperaturbereich eine Sperrschicht an den Korngrenzen aufbauen, z.B. $BaTiO_3$
    - Heißleiter leiten besser im Heißen. Sie bestehen aus polykristallinen Halbleitern sinterfähiger Metalloxide. Der Widerstand lässt sich durch Mischverhältnis verschiedener Metalloxide in weitem Bereich einstellen.

Quick Quiz:
Wann fließt in einer Glühbirne mehr Strom: Im Moment des Einschaltens oder einige Millisekunden nach dem einschalten, wenn sie mit voller Helligkeit glüht?

Es gibt elektronische Bauteile, bei denen die Abhängigkeit zwischen I und U so hochgradig nichtlinear ist, dass eine Parametrisierung wie in Gln. (73,74) sinnlos ist. In diesem Fall wird die Abhängigkeit *I(U)* explizit angegeben. Dies ist die so genannte **Kennlinie.**

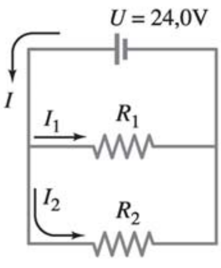


Beispiel: **Diode**
Die Diode ist nur in einer Stromrichtung ein guter Leiter, in der anderen Richtung wirkt sie wie ein Isolator. Ein solches Bauteil wirkt wie ein Ventil und kann zur Gleichrichtung verwendet werden.

Achtung:
Gelegentlich will man aus der Steigung der Abhängigkeit zwischen I und U direkt den Widerstand ablesen. In diesen Fällen wird nicht *I(U)*, sondern *U(I)* aufgetragen, d.h. U auf der Ordinate.

Netzwerke; Kirchhoff'sche Regeln

Parallelschaltung von Widerständen:

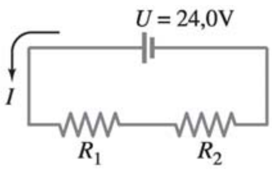


Da an allen Widerständen die gleiche Spannung U liegt, gilt
$U = R_1 I_1 = R_2 I_2$ (75).
Ferner muss für den Gesamtstrom I gelten: $I = I_1 + I_2$. Mit Gl. (75) wird daraus:

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{U}{R_{ges}}$$. Für den Gesamtwiderstand R_{ges} gilt also:

Gesamtwiderstand bei Parallelschaltung: $\boxed{\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_i}}$ (76)

Reihenschaltung von Widerständen

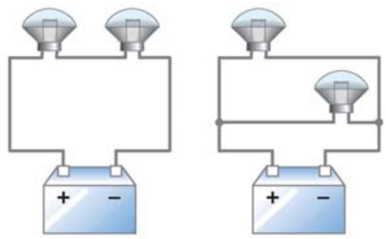


Bei der Reihenschaltung fällt die Spannung über zwei Widerstände ab: $U = R_1 I_1 + R_2 I_2$ (77). Durch beide Widerstände muss derselbe Strom fließen: $I = I_1 = I_2$.

Dies in Gl. (77) eingesetzt ergibt: $U = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2)I = R_{ges} I$. Für den Gesamtwiderstand gilt also:

Gesamtwiderstand bei Reihenschaltung: $\boxed{R_{ges} = R_1 + R_2 + \ldots + R_i}$ (78)

Quick Quiz:
Sind die Scheinwerferbirnen am Auto parallel oder in Reihe geschaltet? Warum?



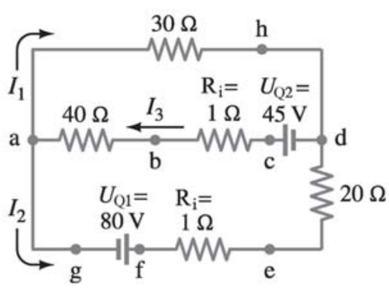
(1) Reihenschaltung (2) Parallelschaltung

Stationärer Strom:

Wir nehmen in diesem Kapitel an, dass die Ladungsdichte überall zeitunabhängig ist. In diesem Fall kann es zwar Ströme geben, aber sie müssen überall zeitlich konstant sein. **Solche Ströme nennt man stationär.** In diesem Fall muss das Integral der Stromdichte über eine beliebige geschlossene Oberfläche Null sein:

$$\oint\!\!\oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad (79).$$

Andernfalls würde sich nämlich die Ladung im eingeschlossenen Volumen zeitlich ändern. Darin drückt sich die Erhaltung der Ladung aus. Gl. (79) aus. Angewendet auf eine geschlossene Oberfläche um den Knoten eines Netzwerkes herum (z.B. a oder d in der Skizze) ergibt sich:

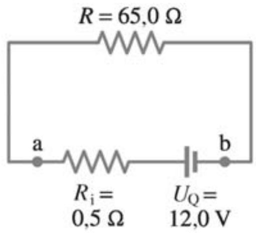


Die erste Kirchhoff'sche Regel („Knotenregel"):

Die Summe aller Ströme, die in einen Knoten hineinfließen ist gleich der Summe der Ströme, die hinaus fließen.

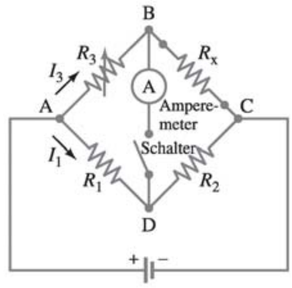
Ferner gilt – wiederum für stationäre Ströme -, dass das elektrische Feld konservativ ist: $\oint_S \vec{E} d\vec{s} = 0$. Angewendet auf eine beliebige Masche eines Netzwerks folgt: **Die zweite Kirchhoff'sche Regel („Maschenregel"):**

Die Summe der Potentialänderungen entlang jedes geschlossenen Stromkreises („Masche") ist Null.

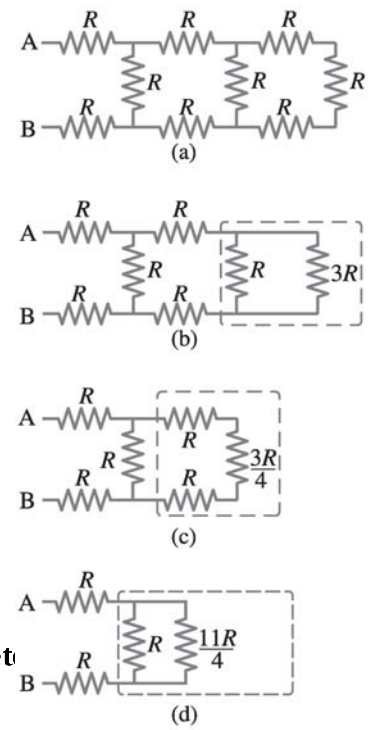


Beispiele:

1. Wenn eine Spannungsquelle ideal wäre, dann bliebe die Spannung konstant, auch wenn ein beliebig kleiner Widerstand angeschlossen wird, so dass ein unendlich großer Strom fließen könnte. In Wirklichkeit besitzt jede Spannungsquelle einen **Innenwiderstand**, der in Reihe mit der „Urspannung“ liegt (das ist die Spannung, die zu messen wäre, wenn kein Strom fließt). Eine gute Spannungsquelle hat einen möglichst geringen Innenwiderstand. Der Innenwiderstand einer Autobatterie beträgt ca. 0.5Ω.



2. Mit einer „Wheatstone-Brücke“ kann man eine unbekannten Widerstand R_x bestimmen, indem ein bekannter, regelbarer Widerstand R_3 so eingestellt wird, dass im eingezeichneten Amperemeter kein Strom fließt. R_1 und R_2 müssen ebenfalls bekannt sein.



3. Ein umfangreiches Netzwerke kann durch sukzessive Anwendung der Kirchhoff’schen Regeln auf einen einfachen Fall reduziert werden, siehe Skizze:

Ergebnis: $R_{ges} = \frac{41}{15} R = 2.733R$

Zum Vergleich: unendlich lange Kette:

$$R_\infty = \left(1+\sqrt{3}\right) R = 2.732R$$

4. Der Innenwiderstand ist auch bei der Beurteilung von Messgeräten wichtig. So wie eine Spannungsquelle einen möglichst kleinen Innenwiderstand haben sollte, so muss zum Beipiel ein **Spannungsmessgerät einen möglichst hohen Eingangswiderstand** haben, um die Spannungsdifferenz zwischen zwei Punkten korrekt zu messen. Dies gilt vor allem dann, wenn die zu vermessende Schaltung selbst hohe Widerstände besitzt, also nur geringe Ströme liefern kann.

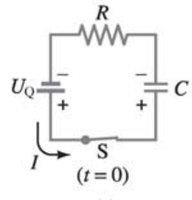
Fazit:
Für jede ernsthafte Messung muss man die Innenwiderstände der bet Geräte kennen!

Beispiel:
Wir haben in der Übung gelernt, dass in der Erdatmosphäre eine vertikale Potentialdifferenz von 150 V/m besteht. Um diese zu messen, müste der Eingangswiderstand des Voltmeters größer sein als der sehr hohe Widerstand der Luft.

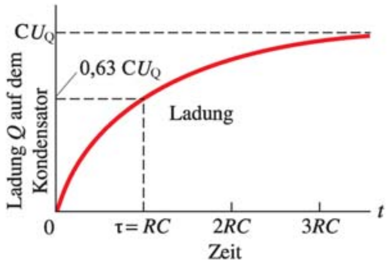
Quick Quiz:
Warum ist es wichtig, dass die Gehäuse elektrischer Geräte über einen „Schutzleiter“ direkt mit der Erde verbunden sind?
Antw.: Falls es einen Kurzschluss zum Gehäuse gibt, fällt die Spannung durch den niederohmigen Schutzleiter ab und nicht durch den parallel geschalteten Körper!

RC-Schaltkreise

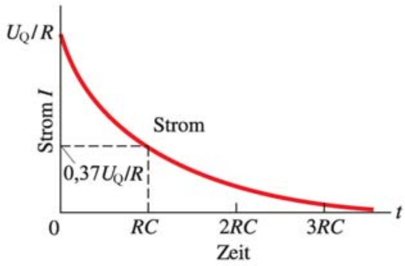
Wenn ein Kondensator zunächst ungeladen ist und durch eine Batterie geladen werden soll, muss durch eine leitenden Verbindung ein Stromfluss ermöglicht werden. Dies geschieht dadurch, dass ein **Schalter** geschlossen wird.
Vor dem Schliessen des Schalters fällt die gesamte Batterie-Spannung am Schalter ab, danach über den Widerstand und über den Kondensator.



(a)



(b)



(c)

Bemerkung: Falls kein Widerstand eingebaut ist, wäre dies der Innenwiderstand der Batterie!

Dies ist offenbar ein <u>zeitabhängiger Prozess</u>, und wir erwarten, dass sich die Spannung am Kondensator und der Strom durch den Widerstand zeitliche ändern.
Wie?

Kirchhoff'sche Maschenregel:
$U_{Batterie} + U_R + U_C = 0$
Wenn man die Masche wie in der Abb. Durchläuft, gilt:
$U_{Batterie} = -U_0$, $U_R = R \cdot I$, $U_C = \frac{Q}{C}$, also $\quad U_0 = R \cdot I + \frac{Q}{C}$.
Mit $I = \frac{dQ}{dt}$ ergibt sich: $\quad U_0 = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$.
Lösung dieser Differentialgleichung durch Trennung der Variablen:

$$R\frac{dQ}{dt} = U_0 - \frac{Q}{C}; \rightarrow \quad \frac{RdQ}{U_0 - \frac{Q}{C}} = dt \text{ bzw. } \quad \boxed{\frac{dQ}{CU_0 - Q} = \frac{dt}{RC}}.$$

Integration auf beiden Seiten: $\int_0^{Q(t)} \frac{dQ'}{CU_0 - Q'} = \int_0^t \frac{dt}{RC}$. Die Grenzen der Intergration über Q ergeben so: Wir nehmen an, dass $Q = 0$ zur Zeit $t = 0$ (untere Grenze), und wir bezeichen die Ladung auf dem Kondensator zur Zeit t mit $Q(t)$.

Also: $-\ln\left(CU_0 - Q(t)\right) - \left(-\ln\left(CU_0\right)\right) = \frac{t}{RC}$ bzw.

$$\ln\left(CU_0 - Q(t)\right) - \ln\left(CU_0\right) = \ln\left(\frac{CU_0 - Q(t)}{CU_0}\right) = \ln\left(1 - \frac{Q(t)}{CU_0}\right) = -\frac{t}{RC}.$$

Damit schließlich: $1 - \frac{Q(t)}{CU_0} = e^{-\frac{t}{RC}}$ oder: $\boxed{Q(t) = CU_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$ (79)

Die **Spannung am Kondensator** ist $U_C = \dfrac{Q}{C}$, deshalb: $\boxed{U_C(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$ (80)

Die Spannung am Kondensator steigt also mit einer Exponentialfunktion mit der

Zeitkonstanten $\boxed{\tau = RC}$ (81)

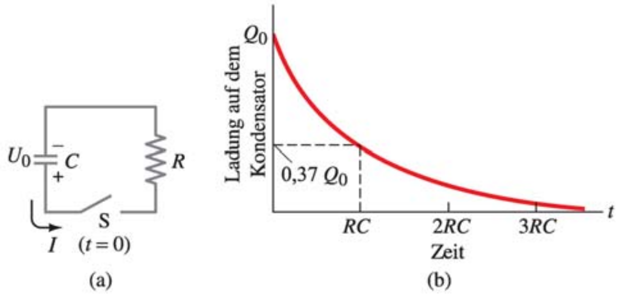
Der Strom durch den Widerstand (der „**Ladestrom**“) ergibt sich aus $I = \dfrac{dQ}{dt}$:

Ladestrom: $\boxed{I(t) = \dfrac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}}$ (82)

Entladen eines Kondensators:

Auf analoge Weise berechnet man den Strom, mit dem ein zunächst mit Q_0 aufgeladener Kondensator entladen wird, wenn die angelegte Spannung U_0 schlagartig auf Null gesetzt wird:

Entladung: $\boxed{Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} = C \cdot U(t)}$ (83)

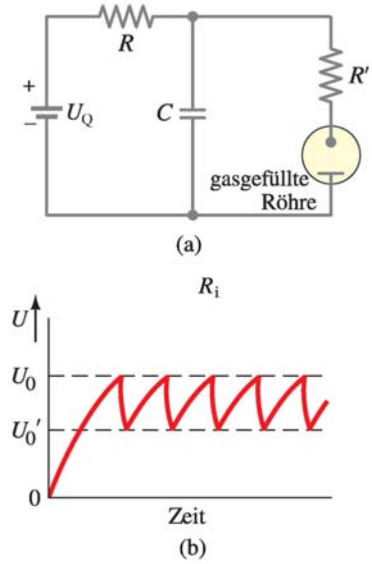


Der **Entladestrom** $\dfrac{dQ}{dt}$ ist wieder $\boxed{I(t) = \dfrac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}}$

Die Zeitkonstante ist ebenfalls die gleiche: $\tau = RC$.

Anwendung:

Ein RC-Kreis kann verwendet werden, um eine Kippschwingung zu realisieren. Dazu benötigt man nur ein Bauteil, welches bis zu einer bestimmten Spannung einen sehr hohen Widerstand hat und beim Erreichen des Schwellenwertes schlagartig leitend wird. Das kann eine gasgefüllte Entladungsröhre oder eine Halbleiterdiode sein.



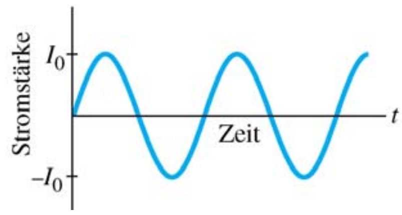
Die Periode dieser Kippschwingung kann über Rund C eingestellt und bei Bedarf variiert werden.
Beispiele: Blinklicht beim Auto, Herzschrittmacher.

Energiebetrachtung:

Während des Ladevorganges fällt über R und C ständig die gesamte Spannung U_0 ab (wenn sich auch die Spannung, die jeweils über R bzw. C abfällt, zeitlich ändert). Am Ende des Ladevorganges hat die Batterie die Arbeit $W = Q \cdot U_0$ aufgebracht. Die im geladenen Kondensator gespeicherte Energie ist aber nur $W = \frac{1}{2} Q \cdot U_0$. D.h. die Hälfte der aufgebrachten Energie wird im Ladewiderstand dissipiert – unabhängig davon, wie R,C und U_0 gewählt werden!

Wechselstrom:

Beim Wechselstrom ändert sich Spannung sinusförmig gemäß



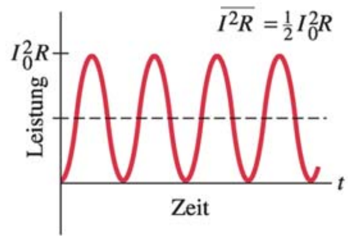
Wechselspannung: $\boxed{U(t) = U_0 \sin(\omega t)}$ (84)

U_0 wird Spitzenspannung genannt.
$\omega = 2\pi\nu$ ist die Kreisfrequenz. Die Frequenz ν ist im europäischen Haushaltsstrom-Netz 50 Hz $(1\,\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}})$, d.h. 50 Perioden pro Sekunde.

Die Stromstärke durch einen (rein!) ohmschen Widerstand R ist dann $I(t) = \frac{U(t)}{R} = I_0 \sin(\omega t)$.
Man könnte nun auf Grund der Gl. (84) auf den Gedanken kommen, dass nicht nur die Spannung, sondern auch die Leistung im zeitlichen Mittel Null ist, was natürlich falsch ist:

$$P(t) = I(t)^2 R = I_0^2 \sin^2(\omega t) R \qquad (85)$$

Die über die Zeit gemittelte Leistung ist also:



$$\boxed{\overline{P(t)} = \overline{I(t)^2} R = \frac{1}{2} I_0^2 R} \qquad (86)$$

Die Werte $I_{eff} = \sqrt{\overline{I(t)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ bzw. $U_{eff} = \sqrt{\overline{U(t)^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ werden **Effektivwerte** von Strom und Spannung genannt.

Entsprechend gilt: $\boxed{\overline{P} = I_{eff}^2 R = \frac{U_{eff}^2}{R}}$ (87)

Was im Haushaltsnetz i.a. angegeben wird ist in der Tat der Effektivwert der Spannung, d.h. die Spitzenspannung im Haushaltsnetz ist $U_0 = \sqrt{2} U_{eff} \approx 340\text{V}$!

Achtung:
Wenn noch ein Kondensator mit im Spiel ist, dann werden die Zusammenhänge komplizierter. Dies wird später behandelt (Schwingkreise).