

Das magnetische Feld

In der Elektrostatik hatten wir gelernt:

1. Eine (ruhende) elektrische Ladung erzeugt ein elektrisches Feld.
2. Eine andere (ruhende) elektrische Ladung erfährt eine Kraft in diesem Feld.

Wir werden jetzt lernen:

3. Eine bewegte elektrische Ladung erzeugt ein magnetisches Feld.
4. Eine andere bewegte elektrische Ladung erfährt eine Kraft in diesem Feld.

Magnetische Kräfte haben also essentiell etwas mit dem Bewegungszustand elektrischer Ladungen zu tun. Andererseits wissen wir schon aus der Mechanik, dass die Naturgesetze in verschiedenen Inertialsystemen gleich lauten sollten. Das scheint im Widerspruch zu Aussagen 3 und 4 zu stehen, denn man könnte ja immer eine Galilei-Transformation in ein System vornehmen, in dem die elektrische Ladung ruht, und in diesem System gäbe es dann plötzlich kein magnetisches Feld oder keine magnetische Kraft.

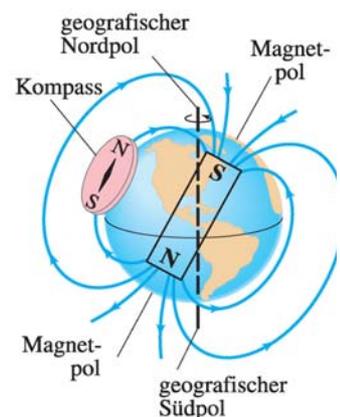
Dieses Problem wird erst in der Relativitätstheorie aufgelöst, in der gezeigt wird, dass elektrische und magnetische Felder in der Tat untrennbar miteinander verbunden sind - Sie sind quasi zwei Seiten einer Medaille.

Historisches und Phänomenologisches

Historisch gesehen wurden elektrische und magnetische Phänomene über Jahrhunderte als voneinander unabhängig wahrgenommen, weil man nicht in der Lage war, länger andauernde elektrische Ströme zu erzeugen. Der Magnetismus wurde im Wesentlichen durch das Auffinden natürlicher, permanentmagnetischer Steine und deren Wechselwirkung untereinander sowie mit dem magnetischen Erdfeld bekannt. Einer der Fundorte, die antike Stadt: „Magnesia“ in der West-Türkei, heißt heute Manisa. Unglücklicherweise sind ausgerechnet diese magnetischen Phänomene (Permanentmagnete, Erdfeld) am schwierigsten zu erklären und mit den elektrischen Erscheinungen in Verbindung zu bringen.

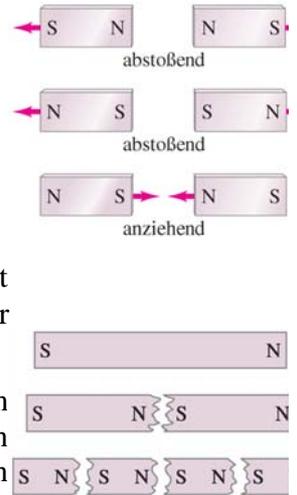
Man hat Folgendes gefunden:

- Es gibt eine Kraftwirkung, die nichts mit der Gravitationskraft und auch nichts mit elektrischen Kräften zu tun hat.
- Jeder „Magnet“ hat zwei Orte, **Pole** genannt, an denen die magnetische Kraftwirkung am stärksten ist. (Genau) einer dieser beiden Pole richtet sich, wenn keine anderen Kräfte ihn daran hindern, nach Norden aus.



Dieser Pol wird **Nordpol** des Magneten genannt, der andere **Südpol**.
(Wie wir gleich sehen werden, keine sehr glückliche Wahl!).

- Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an.
- Im Gegensatz zum elektrischen Dipol können die magnetischen Pole nicht isoliert werden: Wenn man einen Magneten zerbricht, entstehen an der Bruchstelle zwei neue Pole!



Nachdem erkannt wurde, dass die Erde selbst ein großer Magnet ist, war klar, dass im Sinne der obigen Definition der „geomagnetische Nordpol“ eigentlich ein magnetischer Südpol ist, und der eigentliche magnetische Nordpol der Erde sich in der Nähe des geografischen Südpols befindet.

Bemerkung: die geomagnetischen Pole befinden sich nicht genau am Ort der geografischen Pole (Durchstoßpunkte der Rotationsachse). Dies führt zur Kompass-Missweisung“.

Bewegung elektrischer Ladungen im Magnetfeld

Im Prinzip ist es unerheblich, mit welcher der anfangs gemachten Aussagen 3, 4 wir uns zuerst beschäftigen müssen: Keine von beiden ist grundlegender als die andere. Wir beginnen mit der Aussage 4 und setzen zunächst also die Existenz eines magnetischen Feldes voraus.

Das Magnetfeld

Wir gehen ähnlich vor wie bei der Definition des elektrischen Feldes.

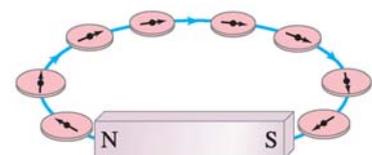
Experimentelle Befunde:

- Die magnetische Kraft \vec{F}_m ist proportional zur elektrischen Ladung: $|\vec{F}_m| \propto q$.
- \vec{F}_m ist proportional zur Geschwindigkeit der Ladung: $|\vec{F}_m| \propto v$, Allerdings zeigt \vec{F}_m nicht in die gleiche Richtung wie \vec{v} , sondern senkrecht dazu!
- Es gibt keine weiteren Objekt-Parameter, von denen die Kraft abhängt, d.h. alle Objekte mit derselben Ladung q und derselben Geschwindigkeit \vec{v} erfahren dieselbe magnetische Kraft. Wenn wir also die magnetische Kraft auf diese beiden Parameter normieren, dann erhalten wir eine Größe, aus der wir die magnetische Kraft auf beliebige Objekte berechnen können. Diese Größe nennen wir das **Magnetfeld** \vec{B} .

Richtung von \vec{B} : Wir legen die Richtung des Magnetfeldes durch die Richtung fest, in die sich ein vorhandener magnetischer Nordpol ausrichtet.

Die **magnetische Kraft** ist dann:

$$\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (88)$$

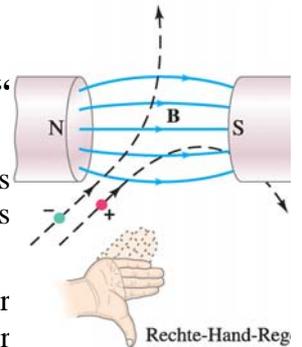


Einheit von \vec{B} : **Tesla**: $1 \text{ T} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$

Um sich die Krafrichtung klar zu machen, hat sich die „**Rechte-Hand-Regel**“ bewährt:

Version 1: Wenn die Geschwindigkeit in Richtung des Zeigefingers und das Magnetfeld in Richtung des Mittelfingers der rechten Hand zeigt, dann zeigt das Magnetfeld in Richtung des Daumens (bei positiver Ladung!).

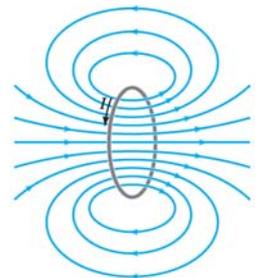
Version 2: Man halte die rechte Hand so, dass die gestreckte Hand in Richtung der Geschwindigkeit zeigt und die gebeugte in Richtung des Feldes. Dann zeigt der Daumen in Richtung der Kraft (positive Ladung).



Analog zum elektrischen Feld kann man das Magnetfeld durch **magnetische Feldlinien** beschreiben, die überall im Raum in die momentane Richtung des Feldes zeigen.

Achtung:

1. Da die Kraft nicht in die Richtung der Feldstärke zeigt, sollte man diese Feldlinien nicht als „magnetische Kraftlinien“ bezeichnen, wie das gelegentlich getan wird!
2. Im Gegensatz zu elektrischen Feldlinien beginnen und enden die Feldlinien nirgendwo, weil es keine magnetischen Ladungen („Monopole“) gibt. Die Feldlinien durchdringen also den das Feld erzeugenden Magneten.



Ein eventuell ebenfalls vorhandenes elektrisches Feld wird vektoriell überlagert, ebenso die entsprechenden Kraftwirkungen. Damit ergibt sich die

Lorentzkraft:
$$\vec{F} = \underbrace{q \cdot \vec{E}}_{\text{elektr.}} + \underbrace{q \cdot \vec{v} \times \vec{B}}_{\text{magn. Kraft}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (89)$$

Bemerkung zur Begriffsbezeichnung:

Traditionell wird als „Magnetfeld“ die Größe $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ bezeichnen, mit der

magnetischen Feldkonstante
$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}, \quad (90)$$

während die Größe \vec{B} als „**magnetische Flussdichte**“ oder „**magnetische Induktion**“ bezeichnet wird.

Im Einklang mit neueren Lehrbüchern nenne ich \vec{B} das Magnetfeld und bezeichne \vec{H} als das „magnetisierende Feld“.

Begründung:

- In der Kraftwirkung (Lorentzkraft) auf geladene Teilchen kommt \vec{B} vor, aber nicht \vec{H} .

- In der Relativitätstheorie (s. später) wird gezeigt, dass \vec{B} und \vec{E} gemeinsam transformiert werden, also dieselbe Natur haben.

\vec{H} ist ein Hilfsfeld, das zur Berechnung von Magnetfeldern in Materie benötigt wird.

Bewegung eines geladenen Teilchens im Magnetfeld

Die Bewegungsgleichung lautet:
$$m\vec{\ddot{r}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}. \quad (91)$$

Da die magnetische Kraft immer senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor steht, kann nur die Richtung der Geschwindigkeit, aber nicht ihr Betrag geändert werden. Diese Tatsache kann man auch anders ausdrücken: Die Leistung, die ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ an einem Teilchen verrichtet, welches sich unter Einfluss dieses Kraftfeldes mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, beträgt bekanntlich $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Die Leistung des Magnetfeldes beträgt also $P = \vec{F}_m \cdot \vec{v} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$, weil $\vec{v} \times \vec{B}$ immer senkrecht auf \vec{v} steht.

Ein Magnetfeld kann nicht die kinetische Energie eines Teilchens ändern. Es ändert zwar die Richtung der Geschwindigkeit (d.h. es findet sehr wohl eine Beschleunigung statt), aber nicht deren Betrag!

Die Lorentz-Kraft leistet keine Arbeit!

Bewegung im homogenen Magnetfeld

Wir nehmen zunächst an, dass das Magnetfeld in y-Richtung zeigt und die Geschwindigkeit zu Beginn keine Komponente in y-Richtung hat. Da die Kraft (91) dann ebenfalls keine Komponente in y-Richtung besitzt, muss sich die Bewegung vollständig in der x/z-Ebene abspielen d.h. es gilt immer $\vec{v} \perp \vec{B}$. Der Betrag der Geschwindigkeit muss sowieso konstant bleiben, und da auch $|\vec{B}|$ überall konstant ist (homogenes Feld!) gilt $|\vec{F}| = qvB = const$: Die Kraft bleibt betragsmäßig konstant und steht immer senkrecht auf dem aktuellen Geschwindigkeitsvektor. Die einzige Bahn, die diese Bedingung erfüllt ist eine Kreisbahn mit Radius R , bei der die magnetische Kraft durch die Zentrifugalkraft ausbalanciert wird:

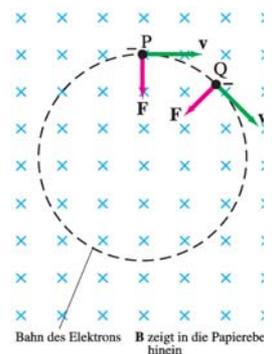
$\frac{mv^2}{R} = qvB$ bzw. $\frac{mv}{R} = qB$. In der Notation $\boxed{R = \frac{p}{qB}}$ ($p = \text{Impuls}$) gilt diese

Gleichung auch für „relativistische“ Teilchen mit v nahe der Lichtgeschwindigkeit c .

Die Zeit für eine Umlauf beträgt $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$. Die Umlauffrequenz $\nu_{cyc} = \frac{1}{T}$

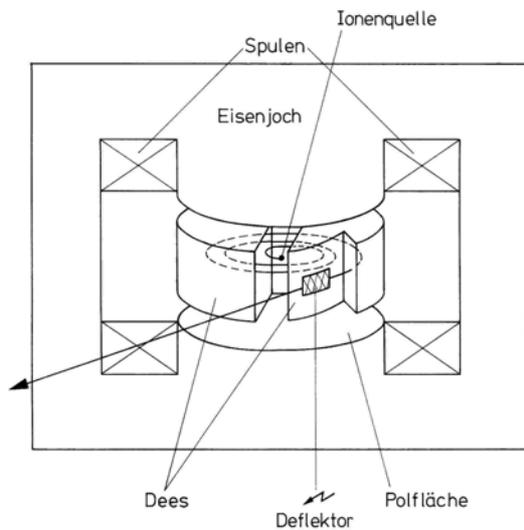
heißt **Zyklotronfrequenz**:

$$\boxed{\nu_{cyc} = \frac{qB}{2\pi m}} \quad (92)$$



Man kann dieses Ergebnis natürlich auch durch komponentenweise Lösung der Bewegungsgleichung erhalten.

Bemerkenswert: Die Zyklotronfrequenz hängt nicht von der Teilchengeschwindigkeit ab (solange $v \ll c$). Dieser Umstand wurde 1931 von Lawrence und Livingston zur Konstruktion des Zyklotrons verwendet. Zwischen zwei hohlen Elektroden (den „Dees“) wird eine elektrische Spannung U angelegt, bei deren Durchlauf die Teilchen beschleunigt werden. Diese Spannung wird bei jedem halben Umlauf der Teilchen umgepolt, sie oszilliert also mit der Zyklotronfrequenz. Dadurch gewinnen die Teilchen bei jedem Umlauf die kinetische Energie qU .



Prinzip des Zyklotrons



Zyklotron des FZ Karlsruhe

Beispiel:

1. Protonen ($m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$), $B = 1 \text{ T}$, $v = \frac{1}{10} c = 3 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, kinetische Energie: 4.7 MeV

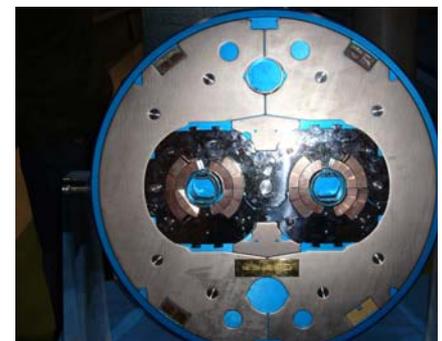
$$R = \frac{m_p v}{eB} = \frac{m_p c^2 v}{ecB c} = \frac{938 \text{ MeV}}{e} \frac{1}{cB} 0.1 = 9.38 \cdot 10^8 \text{ V} \frac{0.1}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}} = 0.31 \text{ m}$$

2. Protonen, $B = 8.33 \text{ T}$ (supraleitenden Elektromagnete bei LHC),

$v = 0.999999991 \cdot c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, kinetische Energie:

$E_{kin} = 7 \text{ TeV} = 7 \cdot 10^{12} \text{ eV} = 7463 \cdot m_0 c^2$ (hoch-relativistisch zu rechnen!)

$$R = \frac{m_p v}{eB} \approx \frac{E_{kin}}{ecB} = \frac{7 \cdot 10^{12} \text{ eV}}{e} \frac{1}{cB} = 7 \cdot 10^{12} \text{ V} \frac{1}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 8.33 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}} \approx 2800 \text{ m}$$



Supraleitenden Ablenkmagnete für LHC/CERN

Bemerkung: Wenn die Geschwindigkeit zu Beginn der Bewegung eine Komponente in Richtung des Magnetfeldes besitzt, entsteht eine Spiralbahn um die Feldlinien herum. Beim Zyklotron würde dies zum Verlust der Teilchen an der Vakuumkammer führen, man muss also etwas dagegen unternehmen. In der Geophysik kann man damit das Polarlicht erklären.

Weitere Anwendungen:

In der **Kathodenstrahlröhre** (Fernsehröhre) wird ein Elektronenstrahl durch ein zeitlich veränderliches Magnetfeld abgelenkt.

Geschwindigkeitsfilter:

Wenn man zusätzlich ein elektrisches Feld \vec{E} anlegt, welches senkrecht zu \vec{B} und \vec{v} orientiert ist, entsteht ein Geschwindigkeitsfilter: Teilchen, für die $qvB = qE$ gilt, werden überhaupt nicht abgelenkt, d.h. die Teilchen mit der Geschwindigkeit $v = \frac{E}{B}$ können so identifiziert und durch eine Blende selektiert werden. (Achtung Experimentator: elektrisch neutrale Teilchen werden natürlich ebenfalls nicht abgelenkt und werden ggf. ebenfalls die Blende passieren!).

$\frac{e}{m}$ -Bestimmung:

Man kann im o.a. Experiment zusätzlich die Geschwindigkeit der Teilchen bestimmen, indem die Teilchen durch eine gemessene Spannungsdifferenz U beschleunigt werden: $v = \frac{p}{m} = \frac{\sqrt{2mE_{kin}}}{m} = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$. Dies in $v = \frac{E}{B}$ eingesetzt liefert:

$$\boxed{\frac{e}{m} = \frac{E^2}{2UB^2}} \quad (93).$$

Auf der rechten Seite von Gl. (93) stehen ausschließlich Größen, die leicht gemessen werden können. J.J. Thomson hat auf diese Weise erstmals das $\frac{e}{m}$ -Verhältnis von Elektronen gemessen (1897).

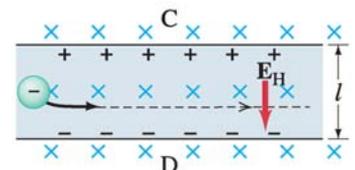
(Achtung, hier gibt es einen schlimmen Fehler in [Gia] S. 934).

Mit der 15 Jahre später erfolgten Messung der Elementarladung durch Millikan hatte man schließlich die Masse des Elektrons bestimmt!

Auf ähnliche Weise funktionieren **Massenspektrometer**, die eine große Rolle in der analytischen Chemie etc. spielen.

Der Hall-Effekt

Die Kraft auf den o.a. stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld wirkt eigentlich nicht auf den Leiter sondern zunächst nur auf die bewegten Ladungen (im Metall also die auf die Elektronen). Diese übertragen die Kraft (per Reibung) auf die Atome des Leiters.



Wenn der Leiter daran gehindert wird, sich zu bewegen, werden sich die freien Elektronen trotzdem „seitlich“ bewegen (in der Skizze Richtung D), und zwar so lange, bis auf dieser Seite so viel Ladungsüberschuss entstanden ist, dass das dadurch

entstehende elektrische Feld \vec{E}_H gerade die Lorentz-Kraft kompensiert: $qE_H = qv_d B$. Wenn die Breite l des Leiterstücks bekannt ist, dann ergibt sich aus $U_H = E_H \cdot l$ die (von Edwin Hall erstmals gemessenen)

Hall-Spannung:
$$U_H = v_d B \cdot l \quad (94)$$

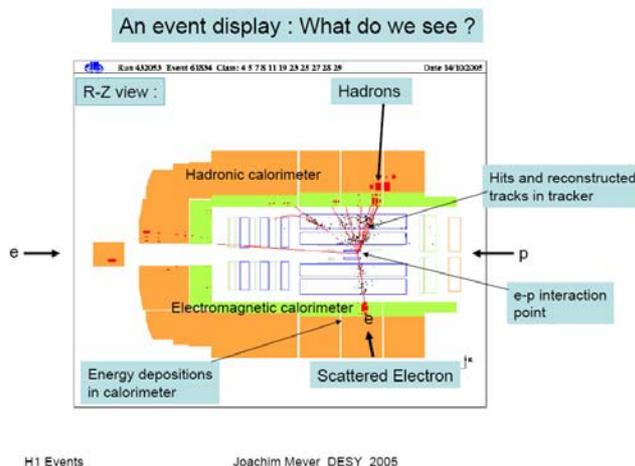
Die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger kann über Gl. (64) mit der Stromdichte j_{\pm} und der Dichte n_{\pm} der Ladungsträger in Verbindung gebracht werden: $j_{\pm} = n_{\pm} q v_d$. Wenn zusätzlich die Querschnittsfläche A bekannt ist, lässt sich schließlich durch Messung von $I = jA$, B und U_H die Dichte n_{\pm} der Ladungsträger bestimmen. Aus dem Vorzeichen der Spannung ergibt sich das Vorzeichen der Ladungsträger.

Beschleuniger

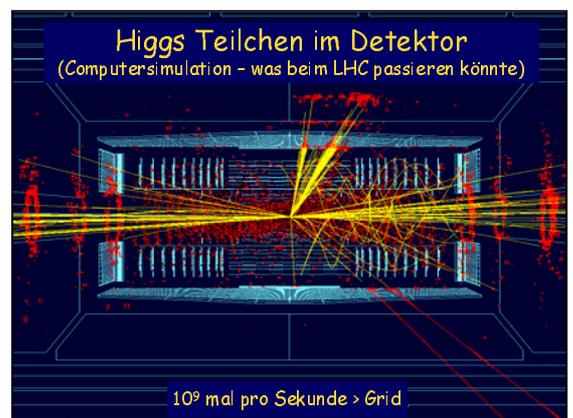
Da das Zyklotron in der erreichbaren kinetischen Energie begrenzt ist, wurden andere **Beschleuniger-Typen** entwickelt. Bei allen werden Magnetfelder so angeordnet, dass sich die Teilchenstrahlen auf der gewünschten Teilchenbahn bewegen. Durch magnetische „Linsen“ kann man sogar erreichen, dass sie in einer Vakuumröhre stundenlang gespeichert bleiben, ohne jemals die Vakuumkammer zu berühren. Die Magnetfelder sind dabei (fast) ausnahmslos transversal zur Bewegungsrichtung des Strahl ausgerichtet, damit die Lorentz-Kraft maximal wird.

Beispiele: BESSY, HERA, LHC

In der Teilchenphysik werden hochenergetische Teilchen frontal zur Kollision gebracht. Die entstehenden „interessanten“ Teilchen bewegen sich nach der Kollision transversal zur Strahlrichtung. Man kann ihre Eigenschaften analysieren (Masse, Impuls, Ladung,...), indem im Bereich des Kollisionspunktes ein starkes longitudinales Feld erzeugt wird, häufig unter Verwendung einer großen supraleitenden Spule. Beispiele: HERA/DESY, LHC/CERN



Teilchen-Spurverfolgung im H1-Experiment bei HERA/DESY



Teilchen-Spurverfolgung bei LHC/CERN

Kraft auf Ströme

Mit Gl. (88) kann man sofort die Kraft auf ein beliebiges, stromdurchflossenes Leiterstück berechnen, welches sich in einem Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ befindet:

Sei $d\vec{l}$ die Länge und Richtung eines Leiterabschnitts, in dem der Strom I fließt. Mit Gl. (63) ($\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$) kann man schreiben: $I \cdot d\vec{l} = \vec{j} dA \cdot dl = \rho \cdot \vec{v} \cdot dA dl = Q \cdot \vec{v}$. Im Leiterabschnitt fließt also die Ladung Q mit der Geschwindigkeit \vec{v} . Wobei die Aufteilung zwischen Q und \vec{v} unbekannt ist, aber auch keine Rolle spielt, weil in Gl. (88) nur das Produkt eingeht:

Kraft auf Leiterabschnitt am Ort \vec{r} :
$$\vec{F}(\vec{r}) = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (95)$$

Für einen beliebig gebogenen langen Draht, der sich von \vec{s}_1 nach \vec{s}_2 erstreckt und sich in einem homogenen Feld \vec{B} befindet, ergibt sich daraus:

Kraft auf beliebig geformten Draht mit Strom I :
$$\vec{F} = I \cdot \left(\int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} d\vec{l} \right) \times \vec{B} \quad (96)$$

Insbesondere erkennt man, dass die Gesamtkraft auf eine geschlossene Leiterschleife

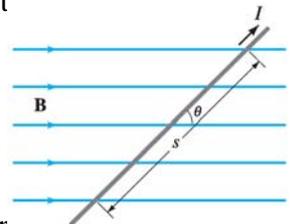
Null ist:
$$\vec{F} = I \cdot \left(\oint_s d\vec{l} \right) \times \vec{B} = 0 \quad (\text{weil } \oint_s d\vec{l} = 0).$$

Im Spezialfall eines geraden Leiter der Länge \vec{s} in einem homogenen Feld \vec{B} ergibt sich:

Kraft auf gerade Leiter:
$$|\vec{F}| = I \cdot |\vec{s} \times \vec{B}| = ILB \sin \varphi \quad (97)$$

mit dem zwischen \vec{s} und \vec{B} eingeschlossenen Winkel φ .

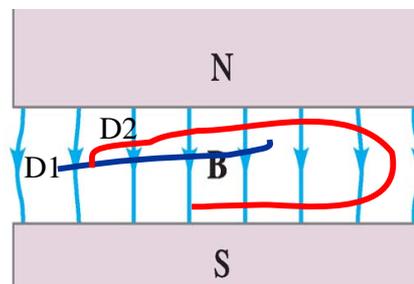
Achtung Vorzeichen: Für I wird die konventionelle Stromrichtung verwendet, und für die Zählrichtung von φ gilt die bekannte Regel des Kreuzprodukts – d.h. es gilt wieder die „**Rechte-Hand-Regel**“.



Quick Quiz:

In einem homogenen Magnetfeld gebe es zwei Drähte D1 und D2 mit dem gleichen Strom. Welcher erfährt die größere Ablenkkraft?

Antwort: D1, weil es nur auf den Abstand der Endpunkte der in die Ebene senkrecht zu B projizierten Strecke ankommt.



Anwendungen

1. Drehmoment auf eine Leiterschleife

Wir betrachten eine Leiterschleife im homogenen Magnetfeld, die so gelagert ist, dass sie sich nur um eine Rotationsachse drehen kann, siehe Skizze. Laut Gl. (97) entstehen im linken bzw. rechten Leiterstück die Kräfte $F_1 = IaB = -F_2$ (der zwischen \vec{B} und \vec{v} eingeschlossenen Winkel ist einmal 90° und einmal 270°). Beide Kräfte bewirken ein Drehmoment $\tau_1 = \left| \frac{\vec{b}}{2} \times \vec{F}_1 \right| = IaB \cdot \frac{b}{2} \sin \theta = \left| \frac{-\vec{b}}{2} \times \vec{F}_2 \right| = \tau_2$ in dieselbe

Richtung. Das gesamte

Drehmoment auf eine Leiterschleife lautet also: $\tau = IabB \sin \theta = IAB \sin \theta$, (98)

Wobei A die von der Leiterschleife eingeschlossene Fläche ist.

Wenn die Leiterschleife N Windungen hat, lautet dies: $\tau = NIAB \sin \theta$ (99)

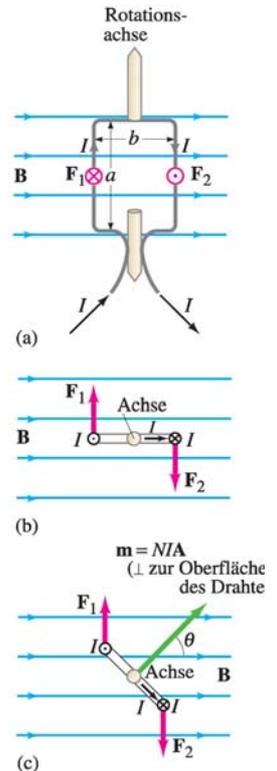
Die Größe $\vec{m} = NI\vec{A}$ wird magnetisches Dipolmoment der Leiterschleife genannt:

magnetisches Dipolmoment: $\vec{m} = NI\vec{A}$ (100)

Der Vektor \vec{A} zeigt senkrecht zur eingeschlossenen Fläche A , und es gilt wieder die Rechte-Hand-Regel: Die Finger der rechten Hand zeigen in die Richtung des Stromes, der Daumen zeigt dann in die Richtung von \vec{A} . In Vektorschreibweise lautet

das **Drehmoment auf ein magnetisches Dipolmoment:** $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ (101)

Man beachte die vollständige Analogie zum Drehmoment auf elektrische Dipole!



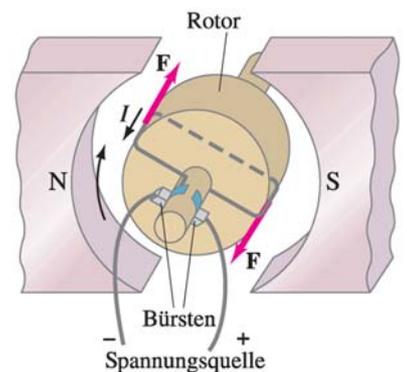
2. Gleichstrom-Motor

Das soeben beschriebene Prinzip wäre wunderbar geeignet, mit der Rotationsachse eine Maschine anzutreiben, wenn es nicht einen Nachteil hätte: Das Drehmoment ändert periodisch mit $\sin \theta$ sein Vorzeichen, d.h. es dreht sich alle 180° um. Dies kann vermieden werden, wenn sich die Stromrichtung ebenfalls umdreht. Das wird durch einen Gleitkontakt („Bürsten“) vermieden, mit dessen Hilfe sich die Stromrichtung ebenfalls umdreht. Das Magnetfeld wird oft durch einen Permanentmagneten erzeugt.

Nachteile dieses Gleichstrommotors:

1. Das Drehmoment hat immer noch Nullstellen
2. die Drehrichtung ist nicht festgelegt
3. Die Bürsten können sich mechanisch abnutzen.

Abhilfe: Man verteilt mehrere Leiterschleifen so über den Rotor, dass immer ein Drehmoment vorliegt. Auf diese Weise kann man auch sicherstellen (wenn man das will), dass der Motor nur in einer bestimmten Richtung läuft.



Achtung: Dieser Motor liefert ein (mehr oder minder) gleichbleibendes Drehmoment auf seiner Achse und kann damit kontinuierlich mechanische Arbeit leisten. **Aber:**

wir hatten doch anfangs gesehen, dass ein Magnetfeld gar keine Arbeit an den bewegten Ladungen verrichten kann ?!?! Wir haben also noch gar nicht verstanden, wo diese Energie eigentlich herkommt. Die einzige Arbeit, die wir hier identifizieren können, sind die ohmschen Verluste in der Leiterschleife, aber diese werden in Wärme umgesetzt und können keine mechanische Arbeit leisten. Die Antwort kommt erst mit der Behandlung zeitabhängiger Ströme (Induktion). Es muss nämlich Energie aufgewendet werden, um bei der Bewegung den Strom in der Leiterschleife konstant zu halten (Kompensation der induzierten Gegenspannung), und weitere Energie, um das Magnetfeld aufrecht zu erhalten (induziertes Gegenfeld). Diese Energien kommen aus der Spannungsversorgung, die dafür sorgen muss, dass der Strom in der Leiterschleife konstant bleibt.

Bemerkungen zum magnetisches Dipolmoment:

Die Arbeit, die das magnetische Feld verrichtet, um den magnetischen Dipol um den Winkel θ zu drehen, ist $\Delta W = \tau d\theta$. Im selben Maße verringert sich die potentielle Energie des Dipols:

$$\Delta U = -\tau d\theta = -mB \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = mB(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

Wenn wir $U=0$ für den Fall $\theta_1 = 90^\circ$ setzen, dann gilt

$$\boxed{U_{mech} = -\vec{m} \cdot \vec{B}} \quad \text{mechanische, potentielle Energie eines magnetischen Dipols} \quad (102)$$

Auch hier beachte man wieder die **völlige Analogie zum elektrischen Dipol**, s. Gl. (8,9).

Wir hatten dort gesehen: Drehmoment und potentielle Energie des elektrische Dipols hängen nur von der Ladungsverteilung ab – wobei die detaillierte Geometrie gar keine Rolle spielt, solange nur das resultierende Dipolmoment einen bestimmten Wert hat!

Beim magnetischen Dipolmoment gilt analog:

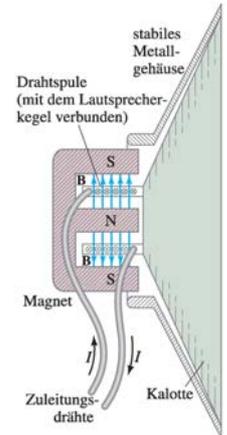
Die detaillierte Verteilung der Ströme, die ein bestimmtes Dipolmoment erzeugen, spielt gar keine Rolle, solange nur das resultierende Dipolmoment einen bestimmten Wert hat! Im Unterschied zum elektrostatischen Fall kann man aber das magnetische Dipolmoment nicht auf identifizierbare „magnetische Ladungen“ zurückführen. Das Dipolmoment ist eine integrale Eigenschaft einer Anordnung von Strömen im Raum. (Man beachte, dass bei genauerem Hinsehen das gleiche auch für den elektrischen Dipol gilt: auch dort ist die Existenz identifizierbarer Punktladungen nicht erforderlich.)

Da es keine magnetischen Monopole gibt, gibt es auch keine, der Coulombkraft analoge magnetische Kraft auf einen magnetischen Einzelpol.

Wie schon beim Motor betont, beachte man, dass Gl. (102) unmöglich die gesamte Energiebilanz beschreiben kann, weil ein statisches Magnetfeld keine Arbeit verrichten kann. Gl. (102) beschreibt nur die mechanische Arbeit, was durch den Index „mech“ angezeigt wird.

Achtung: Wenn das Feld inhomogen ist, dann kompensieren sich die Kräfte auf die einzelnen Leiterabschnitte (s. Gl. (96)ff) im Allgemeinen nicht mehr vollständig und es kann durchaus eine resultierende Nettokraft auf den Dipol wirken - wiederum wie beim elektrischen Dipol. Es ist diese Kraft auf die (durch das externen Feld ausgerichteten) molekularen magnetischen Dipole im Eisen, durch die ein Eisenkörper in einem externen Magnetfeld angezogen wird.

Anwendungsbeispiel: **Lautsprecher**: Eine Spule wird in ein inhomogenes Magnetfeld gesetzt und mit der Kalotte mechanisch verbunden. Der Audio-Verstärker erzeugt einen Strom in der Spule, der proportional zu den gewünschten akustischen Schwingungen ist. Die Spule stellt also ein sich zeitlich veränderndes magnetisches Dipolmoment dar, welches sich in einem inhomogenen Magnetfeld befindet. Deshalb ändert sich die Nettokraft auf die Spule und erzeugt so die gewünschte Schwingung der Kalotte.



Erzeugung von Magnetfeldern

Wir haben gesagt: Magnetische Felder werden durch bewegte elektrische Ladungen erzeugt. Der elementarste Prozess zur Magnetfelderzeugung sollte also die Bewegung einer Punktladung sein. Eine sich bewegende Punktladung stellt aber einen zeitabhängigen Strom dar, so dass das Magnetfeld zeitabhängig ist. Zeitabhängige Felder wollen wir aber erst später behandeln, weil dort einige zusätzliche Effekte zu berücksichtigen sind. Wir werden hier deshalb schnell zum Fall stationärer Ströme übergehen, fangen aber trotzdem mit der Punktladung an, damit die Zusammenhänge klar werden.

Magnetfeld einer bewegten Punktladung

Der momentane Ort der Ladung q sei \vec{r}' , ihre Geschwindigkeit \vec{v} , und wir betrachten das Magnetfeld am sogenannten „Aufpunkt“ \vec{r}_0 . Wenn die Bewegung geradlinig-gleichförmig ist (d.h. $\vec{v} = const$), sagt das Experiment:

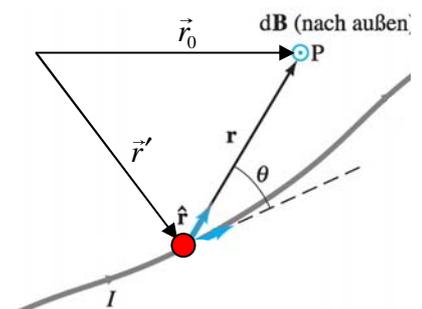
Magnetfeld einer Punktladung:
$$\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q \cdot \vec{v} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}')}{(\vec{r}_0 - \vec{r}')^3} \quad (103)$$

Da der Ort der Punktladung zeitabhängig ist ($\vec{r}' = \vec{r}'(t) = \vec{v} \cdot t$), ist auch $\vec{B}(\vec{r}_0)$ in Gl. (103) zeitabhängig. Um diese Komplikation zu vermeiden, wird der Aufpunkt häufig durch seinen Abstand \vec{r} von der Ladung beschrieben: $\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}'$. Aus Gl. (103) wird dann:

Magnetfeld einer Punktladung:
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q \cdot \vec{v} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (104)$$

Bemerkungen:

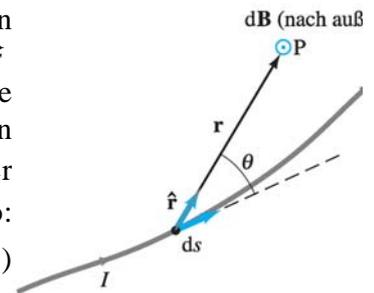
1. Beide Gleichungen weisen eine starke Ähnlichkeit mit der Coulomb'schen Gesetz auf, siehe Gl. (3): Das Feld ist proportional zu q und zu $1/r^2$, und auch der Vorfaktor kommt uns bekannt vor. Allerdings hängt das erzeugte Magnetfeld zusätzlich von der Geschwindigkeit der erzeugenden Ladung ab – ebenso wie die Lorentzkraft *auf* eine bewegte Ladung, siehe Gl. (88), und auf ebensolche Weise über das Kreuzprodukt.



2. Gl. (103/104) ist ein experimenteller Befund und kann nicht hergeleitet werden. Allerdings wird man durch die Relativitätstheorie viel besser verstehen, warum die Natur die Gleichung genau so eingerichtet hat: Nur durch diese Form wird erreicht, dass ein Beobachter, der mit dem Teilchen mitfliegt, gar kein Magnetfeld sieht.
3. Man könnte auf den Gedanken kommen, dass durch die Beschreibung in der Form (104) bereits eine Transformation in ein mit der Ladung q mitbewegtes Koordinatensystem stattgefunden hat. **Das stimmt nicht!** Wir beschreiben das Magnetfeld nach wie vor im Laborsystem, in welchem sich die Ladung bewegt, und wir messen den Aufpunkt nach wie vor in Laborkoordinaten, aber eben in Bezug auf den Ort der Ladung.
4. Man könnte Gl. (104) so interpretieren, dass das Teilchen sein Feld mit sich herumträgt und sich also die Feldlinien gemeinsam mit dem Teilchen bewegen (das wird im Jargon auch von Fachleuten häufig so formuliert). Die Vorstellung von sich „bewegenden Feldlinien“ ist aber Unsinn! Die korrekte Vorstellung ist: Die Feldlinien sind zeitabhängig.
- 5.

Das Biot-Savart-Gesetz

Wir stellen uns einen mit dem Strom I durchflossenen Leiter vor und betrachten das Magnetfeld, das von einem kleinen Leiterabschnitt mit der Länge $d\vec{s}$ erzeugt wird. In diesem Abschnitt befindet sich die bewegte Ladungsmenge $Q = \rho \cdot A \cdot ds$, wobei A der Leiterquerschnitt und ρ die Dichte der bewegten Ladungen im Leiter ist. Diese hängt mit der Geschwindigkeit der Ladungsträger und der Stromdichte über Gl.(63) zusammen: $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$. Daraus ergibt sich also: $I d\vec{s} = \vec{j} \cdot A \cdot |d\vec{s}| = \rho \vec{v} \cdot A \cdot ds = Q \cdot \vec{v}$. Dies können wir direkt in Gl. (104) einsetzen und erhalten



das Biot-Savart-Gesetz:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (104)$$

Hier wurde die magnetische Feldkonstante $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$ verwendet

(siehe Gl. (90)). Für einen Leiter entlang einer Raumkurve \vec{S} , die sich von \vec{s}_1 nach \vec{s}_2 erstreckt, ergibt sich (Hier müssen wir wieder auf die Notation von Gl.(103) zurückgreifen, weil über die Orte der Stromelemente integriert werden muss):

Biot-Savart-Gesetz für einen Draht von \vec{s}_1 nach \vec{s}_2 :

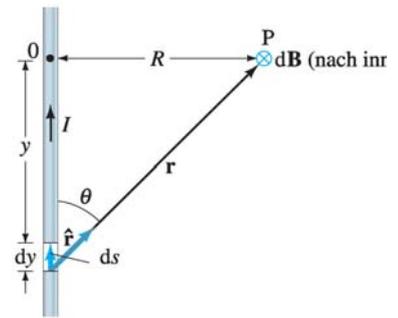
$$\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \frac{I d\vec{s}' \times (\vec{r}_0 - \vec{r}')}{(\vec{r}_0 - \vec{r}')^3} \quad (105)$$

Wir haben jetzt also eine Vorschrift, wie aus einer beliebig im Raum verteilten Anordnung von Strömen das Magnetfeld an einer beliebigen Stelle berechnet werden kann. Das Biot-Savart-Gesetz hat also eine ähnliche Bedeutung wie das Coulombgesetz für eine Ladungsverteilung, siehe Gl. (4).

Beispiele:

1. Magnetfeld eines geraden Drahtes der Länge L (mit Endpunkten $-a, b$) und Strom I :

Wir legen die y -Achse in Stromrichtung und die x -Achse senkrecht dazu durch den Aufpunkt. \vec{r} hat dann nur Komponenten in x - und y - Richtung. Da $d\vec{s}$ senkrecht auf der x - Komponente von \vec{r} steht, aber parallel zur y -Komponente, gilt $d\vec{s} \times \vec{r} = -x dy \cdot \vec{e}_z$:



$$\vec{B}(\vec{r}) = B_z(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-a}^b \frac{x dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I x \left[\frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right]_{-a}^b = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\frac{b}{x \sqrt{x^2 + b^2}} - \frac{-a}{x \sqrt{x^2 + a^2}} \right) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x}$$

Hier haben wir angenommen, dass der Abstand des Aufpunktes zu den Endpunkten des Drahtes viel größer ist als sein senkrechter Abstand r zum Draht.

Magnetfeld eines langen gerade Leiters:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \quad (106)$$

Das Magnetfeld verläuft also kreisförmig um den Leiter herum, wobei seine Stärke mit $1/r$ abnimmt (vgl. elektrisches Feld eines geladenen Drahtes!). Auf die Angabe des Vorzeichens konnte verzichtet werden, wenn man sich die **Rechte-Hand-Regel** merkt:

Wenn der Strom in Richtung des Daumens der rechten Hand zeigt, dann zeigt das Magnetfeld in Richtung der gekrümmten Finger.



2. Magnetfeld einer Leiterschleife mit dem Radius R und Strom I :

Wir berechnen das Feld zunächst nur auf der Symmetrieachse. Aus Symmetriegründen dürfen wir annehmen, dass das Feld dort nur eine x -Komponenten hat. Sie lautet:

Magnetfeld auf der Achse einer Leiterschleife:

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_x(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi R} \frac{R ds}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Wenn wir den Ausdruck $m = IA = I \cdot \pi R^2$ für das magnetische Dipolmoment der Leiterschleife verwenden, erhalten wir:

Magnetfeld auf der Achse einer Leiterschleife:

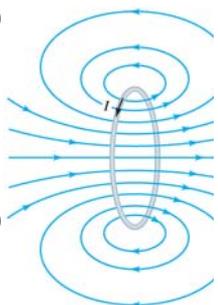
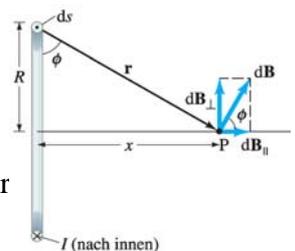
$$B_x(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (107)$$

Das Feld der Schleife in großem Abstand $x \gg R$ ist:

$$B_x(x \gg R) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{x^3} \quad (108)$$

Dies stimmt (mit $(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r} = mr^2$ auf der Achse) überein mit dem Ergebnis aus Übungsaufgabe 52, in der das Feld im gesamten Raum (aber für $x \gg R$) berechnet wurde:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 3 \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^5} \cdot \vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right\} \quad (109)$$



Bemerkung:

Das magnetische Dipolfeld ist nicht nur eine hübsche Besonderheit der Leiterschleife. Man kann im Gegenteil zeigen, dass **jede beliebige Anordnung** von Stromkreisen auf eine Feldverteilung führt, die **in hinreichend großer Entfernung** der Stromkreise mit der Feldverteilung (109) eines magnetischen Dipols identisch ist („Multipolentwicklung der Felder)! Auch unter dem Gesichtspunkt der Felderzeugung gilt also: **Das Dipolmoment ist eine integrale Eigenschaft einer Anordnung von Strömen im Raum.**

3. Kraft zwischen zwei Leitern:

Wir haben mit Gl. (106) das Feld eines geraden Leiters (Strom I_1) berechnet und gesehen, dass $B(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$ gilt und dass das Feld kreisförmig um den Leiter herum verläuft. Ferner haben wir mit Gl. (97) die Kraft berechnet, die ein gerade Leiter der Länge L mit Strom I_2 im homogenen Feld erfährt: $F = I_2 L B \sin \varphi$. Wenn wir zwei parallele Drähte betrachte bei denen die Ströme I_1, I_2 in dieselbe Richtung fließen, dann ist $\sin \varphi = \sin 90^\circ = 1$ und $F = I_2 L \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$, wo r der Abstand der Drähte ist.

Also: **Kraft pro Längeneinheit zwischen zwei Leitern:**
$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \quad (110)$$

Wenn die Ströme in dieselbe Richtung fließen, ziehen sich die Drähte an.

Alle Bestimmungsgrößen dieser Anordnung sind experimentell leicht kontrollierbar. Sie kann deshalb dazu dienen, durch eine Messung von Kraft und Abstand entweder μ_0 oder die Einheit des Stroms zu definieren. Man tut Letzteres, indem man **festlegt**:

$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$ und dann das Ampere über eine Messvorschrift definiert:

Das Ampere ist diejenige (konstante) Stromstärke, bei der zwei parallele Drähte unendlicher Länge im Abstand von 1 Meter die Kraft von exakt $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ pro laufenden Meter aufeinander ausüben, wenn sie beide vom gleichen Strom durchflossen sind und sich die Anordnung im Vakuum befindet.

Magnetischer Fluss

Wir hatten mit dem Gauss'schen Gesetz eine leistungsfähige Aussage über den Fluss eines elektrischen Feldes erhalten. Wie verhält sich der magnetische Fluss? Wir müssen dafür zunächst den magnetischen Fluss definieren:

Für ein beliebiges gerichtetes Flächenelement $d\vec{A}$ ist der magnetische Fluss $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A}$. Achtung, hier wird derselbe Buchstabe Φ wie für den elektrischen Fluss verwendet. Aber das ist eigentlich ok, denn die Definition ist völlig gleich!

In der Theoretischen Physik wird gezeigt (vgl. Skript Scharnberg vom 20.11.06, wo gezeigt wird, dass das Vektorpotential aus der Stromverteilung berechnet werden kann. Wenn aber ein solches Vektorpotential angegeben werden kann, dann muss $\text{div}\vec{B}=0$ sein wegen $\text{div}\text{rot}\vec{A}\equiv 0$), dass für beliebige Magnetfelder, die nach dem Biot-Savart'schen Gesetz aus vorhandenen Stromverteilungen berechnet werden können, stets gilt:

$$\boxed{\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint_A d\Phi = 0} \quad (111)$$

Das bedeutet:

**Der magnetische Fluss durch eine beliebige geschlossene Oberfläche ist Null.
Es gibt keine magnetischen Ladungen.**

Man versteht jetzt etwas besser, warum \vec{B} häufig die Bezeichnung „magnetische Flussdichte“ hat.

In differentieller Schreibweise lautet Gl. (111) (Anwendung des Gauss'schen Satzes):

$$\boxed{\text{div}\vec{B} = 0} \quad (112)$$

Anmerkung: Gln. (111,112) gelten für beliebige Magnetfelder, die aus vorhandenen Stromverteilungen resultieren, und sie gelten auch für zeitabhängige Felder. **Dies ist eine der vier Maxwell-Gleichungen** (i.a. als Nr 3 bezeichnet) und gehört somit zu den Grundlagen der Theorie elektromagnetischer Felder. Aber: Wer sagt denn, dass alle magnetischen Felder „aus vorhandenen Stromverteilungen resultieren“ müssen? In der Tat ist die Suche nach „**magnetischen Monopolen**“ noch immer im Gange, obwohl sie bislang vergeblich war.

Das Ampère'sche Gesetz

Wir hatten in der Elektrostatik gesehen, dass das Coulombgesetz zwar allgemein gültig ist, aber zur Berechnung der elektrischen Feldstärke in vielen Fällen recht kompliziert ist. In vielen Fällen war die Anwendung des Gauss'schen Gesetzes viel einfacher (z. B. das Feld außerhalb und innerhalb einer homogen geladenen Kugel)! Frage: Gibt es etwas Ähnliches Nützliches wie das Gauss'sche Gesetz auch für Magnetfelder?

In der Theoretischen Physik wird gezeigt (vgl. Skript Scharnberg vom 20.11.06, wo die Herleitung „rückwärts“ gegeben wird): Aus dem Biot-Savart'schen Gesetz folgt:

Das Ampère'sche Gesetz:

Das Wegintegral des magnetisierenden Feldes $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ über einen beliebigen

geschlossenen Weg ist gleich dem vom Weg eingeschlossenen Strom: $\boxed{\oint_s \vec{H} d\vec{s} = I} \quad (113)$

In differentieller Schreibweise lautet dies (Anwendung des Stokes'schen Satzes, mit der Stromdichte \vec{j}):

$$\boxed{\text{rot}\vec{H} = \vec{j}} \quad (114)$$

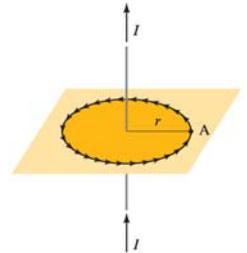
Bemerkung: Der Grund, warum das Gesetz hier für $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ formuliert wurde und nicht wie z.B. im [G1a] für \vec{B} in der Form $\oint_S \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$ liegt darin, dass das Gesetz in der Form (113) auch in Materie gilt (kommt später). Aus Gl. (113) wird (hoffentlich) auch klar, warum wir \vec{H} als „magnetisierende Feld“ bezeichnen.

Anwendungen:

1. Magnetfeld eines langen geraden Leiters:

Wir führen das Wegintegral entlang eines Kreises in dessen Zentrum der Draht liegt. Aus Symmetriegründen sehen wir folgendes:

- a) Die azimuthale Feldkomponente muss überall gleich sein.
- b) Die radiale Feldkomponente muss Null sein: Wenn sie es nicht wäre, müsste sie – wiederum wegen der Symmetrie – überall radial nach außen oder nach innen zeigen, im Widerspruch zu Gl. (111).

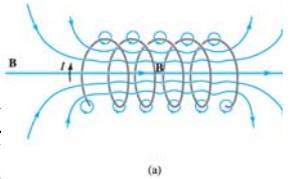


Die Integration ergibt also: $\oint \vec{H} d\vec{s} = H_\phi(r) \cdot 2\pi r = I$, und damit : $H(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r}$ bzw.

$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$. Das stimmt mit Gl.(106) überein, aber die Rechnung ist viel einfacher!

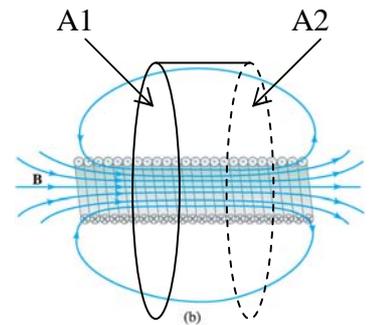
2. Magnetfeld einer langen geraden Spule:

Im Prinzip kann man das Gesamtfeld aus vielen Leiterschleifen zusammensetzen. Man sieht dann zum Beispiel, dass sich die Feldbeiträge zwischen den einzelnen Windungen gegenseitig kompensieren. Wenn man nur das Feld im Inneren einer sehr langen geraden Spulen wissen will, kann man mit Hilfe der Integralsätze schneller zu Ziel kommen:

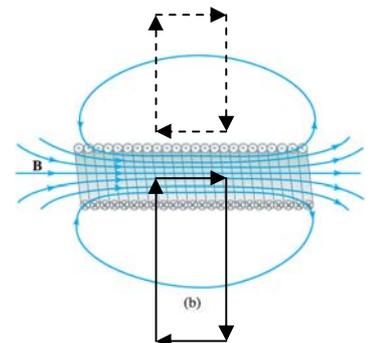


Wir wenden zunächst den Gauss'schen Satz auf einen Zylinder an, der den mittleren Bereich der Spule symmetrisch umfasst: $\oiint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ Aus

Symmetriegründen kompensieren sich die Flüsse durch die beiden Stirnflächen A1, A2. Was bleibt ist das Integral über die Mantelfläche des Zylinders. Wiederum aus Symmetriegründen ist aber der Fluss durch diese Mantelfläche (näherungsweise) überall gleich. Daraus können wir schließen, dass die radiale Magnetfeldkomponente Null (oder jedenfalls sehr klein) sein muss: $B_r = 0$.



Für die Bestimmung der Longitudinalkomponente wenden wir das Ampère'schen Gesetz auf zwei verschiedene geschlossene Wege an. Die radialen Teile beider Wegintegrale sind aus dem ebenenannten Grund ($B_r = 0$) Null. Der Wegabschnitt im jeweils größeren Abstand von der Spule kann in sehr große Entfernung gelegt werden. Das Biot-Savart'sche Gesetz sagt uns, dass das erzeugt Feld etwa mit $1/r^2$ abnimmt, in großer Entfernung also sehr klein ist. Was vom gestrichelten Wegintegralen bleibt ist also das Stück in Längsrichtung außen entlang der Spule. Da der eingeschlossene Strom Null ist, folgt aus dem Ampère'schen



Gesetz: $\oint_{\text{gestrichelt}} \vec{H} d\vec{s} = 0$, d.h. auch **das Feld im Außenbereich der Spule muss Null (oder sehr klein) sein.**

Für den durchgezogenen Weg gilt $\oint_{\text{durchgezogen}} \vec{H} d\vec{s} = I_{\text{ges}} = \int_{\text{Weg im Inneren}} \vec{H} d\vec{s}$, wo I_{ges} der gesamte von Weg eingeschlossene Strom ist. Da das Feld im Inneren aus Symmetriegründen über große Bereiche konstant sein muss, gilt schließlich:

$$H_{\text{innen}} = \frac{I_{\text{ges}}}{\Delta s_{\text{innen}}} \quad (115)$$

Wenn wir die Zahl der Windungen pro Längeneinheit mit n bezeichnen und mit I den Strom durch eine einzelne Windung, erhalten wir in guter Näherung:

Feld im Inneren einer langen Spule: $H_{\text{innen}} = n \cdot I$ bzw. $B_{\text{innen}} = \mu_0 \cdot n \cdot I$ (116)

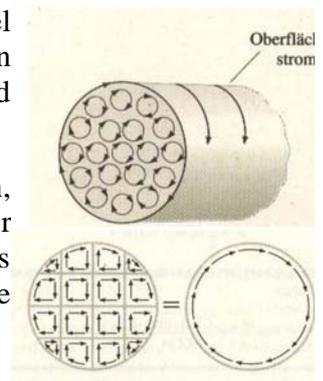
Bemerkung: Eine genauere Untersuchung zeigt, dass die Skizze einen Fehler hat: Wenn man Feldlinien zeichnet, die im Inneren konstante Abstände voneinander haben, dann zeigt es sich, dass nur die Hälfte der Feldlinien wirklich durch die Enden austreten. Die andere Hälfte „leckt“ seitlich durch die Windungen. Ferner zeigt es sich, dass das Feld auf der Achse am Ende der Spule genau 50% der Feldstärke im Zentrum beträgt (sehr lange, dünne Spule).

Magnetismus in Materie

Viele Stoffe enthalten auf atomarer Skala permanente magnetische Dipole, die beispielsweise durch atomare Kreisströme entstehen. Diese elementaren Dipolmomente \vec{m}_i sind normalerweise unregelmäßig ausgerichtet. Wenn jedoch ein äußeres Magnetfeld existiert, entsteht ein Drehmoment (siehe Gl. (101)), und sie werden sich so ausrichten, dass sie die Position minimaler potentieller Energie einnehmen. Lt. Gl.(102), ist das dann der Fall, wenn die Dipolmomente sich parallel zum äußeren Feld ausrichten haben. Thermische Effekte werden dem entgegen wirken. All dies hört sich ganz ähnlich an wie bei der Polarisation in Materie und wird auch ähnlich beschrieben. Die Details sind aber anders!!

Wenn sich existierende magnetische Momente im externen Feld \vec{H} ausrichten, kann man sich vorstellen, dass sich alle inneren Kreisströme so überlagern, dass nur ein resultierender Oberflächenstrom übrig bleibt (Ampère'sche Kreisströme). Es wird ein zusätzliches makroskopisches Feld entstehen, durch welches das externe Feld \vec{H} **verstärkt** wird. Dieses Verhalten wird **Paramagnetismus** genannt.

Eine Alternative dazu liegt vor, wenn ein Stoff keine permanenten magnetischen Dipole besitzt. Dann kann es immer noch geschehen, dass atomare Ringströme **induziert** werden, sowie ein äußeres Magnetfeld eingeschaltet wird. Der Effekt der Induktion wird erst später behandelt. Er führt zu magnetischen Momenten, die dem äußeren Magnetfeld **entgegen** gerichtet sind. Solche Stoffe werden **diamagnetisch** genannt. In der Realität ist Diamagnetismus fast immer vorhanden, wird aber vom Paramagnetismus übertönt, sofern dieser zusätzlich vorhanden ist.



Wie können wir diese „Magnetisierung“ eines Stoffes beschreiben?

Wir haben bei der Behandlung der langen Spule gesehen, dass sich das magnetisierende Feld im Inneren aus $H_{\text{innen}} = \frac{I_{\text{ges}}}{\Delta s_{\text{innen}}}$ ergibt. Wenn wir den Bruch

mit der Querschnittsfläche A der Spule erweitern und den Ausdruck $I_{\text{ges}} \cdot \vec{A} = \vec{M}_{\Delta V}$ als magnetisches Dipolmoment des Volumens $\Delta V = \Delta s_{\text{innen}} \cdot A$ bezeichnen, erhalten

wir:
$$\vec{H}_{\text{innen}} = \frac{I_{\text{ges}} \vec{A}}{\Delta s_{\text{innen}} A} = \frac{\vec{M}_{\Delta V}}{\Delta V} = \vec{M}.$$

\vec{H}_{innen} ist also gleichbedeutend mit einem magnetischen Dipolmoment pro Volumeneinheit im inneren der Spule!

Da die Ampère'sche Kreisströme im Prinzip auch nichts anderen sind, ist es sinnvoll, die zusätzliche Magnetisierung durch die

Magnetisierung \vec{M} zu beschreiben:
$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad (117)$$

\vec{M} ist das magnetische Dipolmoment pro Volumeneinheit der Substanz, also

die Dichte der atomaren magnetischen Dipolmomente:
$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\text{Volumen}} \quad (118)$$

Da die Ursache der Magnetisierung in der Existenz des magnetisierende Feldes liegt, kann man erwarten, dass $\vec{M} \propto \vec{H}$, und das ist über weite Bereiche von H tatsächlich der Fall! Die Proportionalitätskonstante wird magnetische Suszeptibilität genannt:

magnetische Suszeptibilität:
$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (119)$$

Typische Werte:

Paramagnetische Substanzen: $\chi_m \approx 10^{-6} \dots 10^{-4}$

Diamagnetische Substanzen: $\chi_m \approx -10^{-9} \dots -10^{-5}$

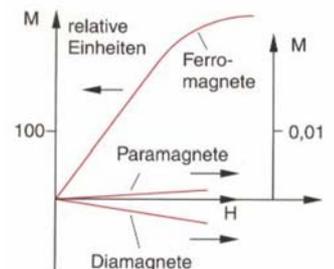
Mittels G. (119) wird aus Gl. (117):

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu\mu_0\vec{H} \quad (120)$$

mit der **relativen Permeabilität**
$$\mu = 1 + \chi_m \quad (121).$$

Es ist offensichtlich, dass die gemessene Abhängigkeit $M(H)$ eine große Bedeutung bei der Charakterisierung einer Substanz hat. Sie wird **Magnetisierungs-Kurve** genannt.

Aus dem Gesagten wird (hoffentlich) klar, warum die Größe \vec{H} , die nur von den äußeren Strömen abhängt, als magnetisierendes Feld bezeichnet wurde.



Wegen der konkurrierenden thermischen Bewegung gibt es (ähnlich wie bei der Dielektrizitätskonstanten) eine Temperaturabhängigkeit, die durch das **Pierre**

Curie'sche Gesetz beschrieben wird: $\chi_m = \frac{C}{T}$ (mit der Curie-Konstante C).

Dieses Gesetz gilt bei steigendem \vec{H} so lange, bis alle Dipole ausgerichtet sind (Sättigung).

Ferromagnetismus

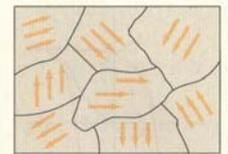
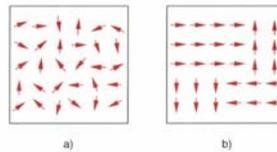
Es gibt Stoffe, bei denen die permanenten elementaren magnetischen Dipole sehr stark untereinander gekoppelt sind. Diese Kopplung bewirkt, dass sich unterhalb einer kritischen Temperatur (der Curie-Temperatur T_{Curie}) die Dipole über große Bereiche parallel ausrichten, **ohne dass es eines externen magnetisierenden Feldes bedarf!**

Diese Bereiche heißen „Weiß'sche Bezirke“.

Normalerweise ist die Magnetisierung aller Bezirke unregelmäßig, so dass keine makroskopische Magnetisierung beobachtet wird.

Wenn ein externes Feld angelegt wird, verschieben sich die Wände der Weiß'schen Bezirke zu Gunsten

derjenigen Domänen, die sowieso schon parallel zum externen Feld ausgerichtet waren, so dass eine sehr starke resultierende Magnetisierung entsteht. Dieses Verhalten wird **Ferromagnetismus** genannt. Die relative Permeabilität kann für diese Stoffe $\mu \approx 10^4$ erreichen. Man kann also mit vergleichsweise geringem magnetisierendes Feld – d.h. mit geringer Stromstärke in einer Spule!! – sehr große Magnetfeldstärken erzeugen.



Wie groß ist das maximal erreichbare Feld?

Hierzu muss man wissen, wie groß die elementaren magnetischen Dipolmomente sind. Es hat sich gezeigt, dass für den Ferromagnetismus **KEINE** atomaren Kreisströme verantwortlich sind, sondern der Spin der Elektronen. Dieser, nur quantenmechanisch zu verstehende „Eigendrehimpuls“ der Elektronen (Achtung: hier dreht sich nichts!!) ist an ein fundamentales magnetisches Moment gekoppelt:

$\mu_e = 9.3 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$. Im Eisen gibt es pro Atom zwei Elektronen, der Spins sich nicht gegenseitig kompensieren. Mit der Zahl der Atome pro Volumeneinheit für Eisen:

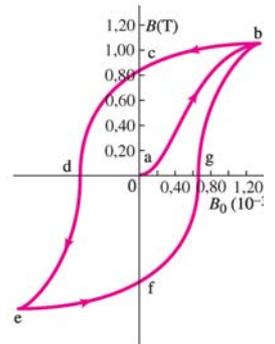
$n = 8.6 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ergibt sich eine maximale „Sättigungsmagnetisierung“ von

$$M = n \cdot 2\mu_e = 1.6 \cdot 10^6 \frac{\text{A} \cdot \text{m}^2}{\text{m}^3} = 1.6 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}}, \text{ und damit}$$

$$\boxed{B_{\max} = \mu_0 M = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} 1.6 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}} \approx 2 \text{ T}} \quad (122)$$

Hysteresese

Wenn das externe Feld wieder entfernt wird, bleiben die „Weiß'sche Bezirke“ großteils bestehen, es bleibt ein „**remanentes Feld**“ bestehen. Erst wenn ein hinreichend starkes Gegenfeld, die „**Koerzitivfeldstärke**“ angelegt wird, wird die Magnetisierung Null. Dies führt zum Verhalten. Je nach dem, welche technische Anwendung geplant ist, werden spezielle Legierungen verwendet, die entweder einen starken Hysteresese-Effekt haben (**magnetisch harte Stoffe**, Remanenzfeld bei 1T, z.B. für Permanentmagnete) oder einen geringen Hysteresese-Effekt (**magnetisch weiche Stoffe**, Remanenzfeld bei 0.001T, z.B. für Elektromagnete oder Transformatoren).



Randbedingungen:

Ähnlich wie bei den Dielektrika kann man für den Übergang zwischen einem Ferromagneten und der Luft aus den Feldgleichungen Randbedingungen herleiten.

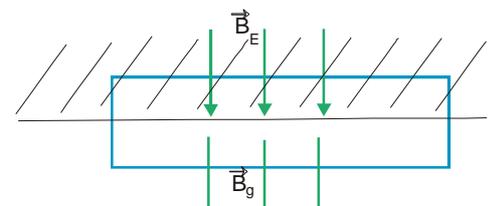
a) Normalkomponente: Aus $\oint \vec{B} d\vec{f} = 0$ ergibt sich:

$$\rightarrow \vec{B}_{\perp, \text{Eisen}} = \vec{B}_{\perp, \text{Luft}} \rightarrow \vec{B}_{\perp} \text{ ist stetig beim Übergang Eisen} \rightarrow \text{Gap.}$$

Für hochpermeables Eisen ($\mu_E \approx 10^4$) gilt also:

$$H_{\perp, E} = \frac{B_{\perp, E}}{\mu_E \mu_0} = \frac{B_{\perp, \text{Luft}}}{\mu_E \mu_0} = \frac{H_{\perp, \text{Luft}}}{\mu_E} \rightarrow \boxed{H_{\perp, \text{Luft}} = \mu_E H_{\perp, E} \gg H_{\perp, E}} \quad (123)$$

Das magnetisierende Feld ist also in der Luft viel größer als im Eisen.



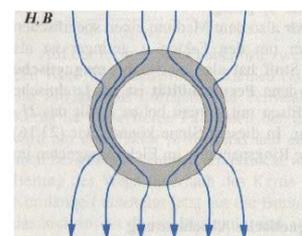
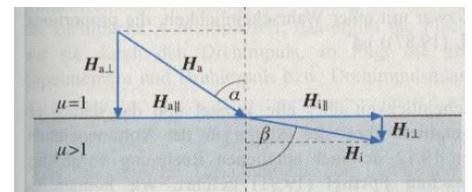
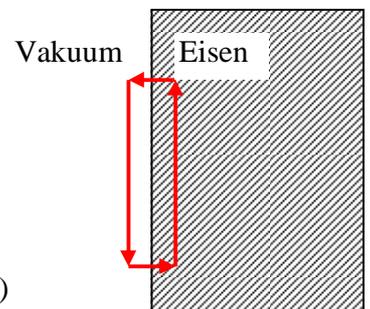
a) Tangentialkomponente:

Wenn man das Linienintegral $\oint \vec{H} d\vec{s}$ über einen Weg erstreckt, der außen dicht am Eisen entlang läuft, und auf dem Rückweg dicht innerhalb des Eisens zurück läuft, erkennt man:

Die Tangentialkomponente von \vec{H} muss stetig sein:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \underbrace{\vec{H}_1 d\vec{s}_1}_{=0} + \vec{H}_{\text{Luft}} d\vec{s}_2 + \underbrace{\vec{H}_3 d\vec{s}_3}_{=0} + \vec{H}_{\text{Eisen}} d\vec{s}_4 \rightarrow \boxed{H_{\parallel, \text{Eisen}} = H_{\parallel, \text{Luft}}} \quad (124)$$

Da aber für die Normalkomponente $H_{\perp, \text{Luft}} \gg H_{\perp, \text{Eisen}}$ gilt, können wir schließen, dass die magnetischen Feldlinien immer (nahezu) senkrecht aus einem hochpermeablen Stoff (Eisen) austreten müssen. Dies gilt, solange das Eisen nicht gesättigt ist.



Anwendung:

Elektromagnet mit hochpermeablem Eisen und einem Luftspalt („Gap“) der Höhe h und dem Feld H_G im Gap (beachte: $H_G \gg H_E$):

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = hH_G + \ell H_E = nI \quad \rightarrow \quad \oint \vec{H} d\vec{s} \approx hH_G = nI$$

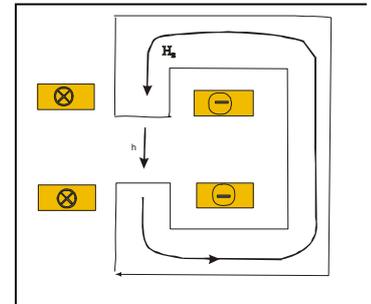
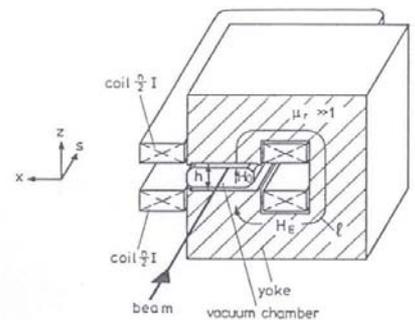
$$\rightarrow \quad \boxed{B_G \approx \frac{\mu_0 n I}{h}} \quad (125)$$

Beispiel: Zahl der Windungen $n = 2 \cdot 10 = 20$,

$$I = 200 \text{ A}, \quad h = 40 \text{ mm} \rightarrow B_G = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs} \cdot 20 \cdot 200 \text{ A}}{\text{Am} \cdot 0.04 \text{ m}} \approx 0.13 \text{ T}$$

Durch das Eisen wird das durch den Strom erzeugte magnetisierende Feld H in das Gap konzentriert.

Achtung: Gl. (125) gilt nur, solange das Magnetfeld im Eisen nicht sättigt!



Kleiner Exkurs zum Thema „Vektorpotential“

Eigentlich scheint das Vektorpotential „nur“ eine Hilfsgröße zu sein, um die

Berechnung von Feldern aus Strömen etc. mittels $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{Vol}} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$

zu vereinfachen, siehe Skript Scharnberg vom 20.11.06. Man findet auch, dass das Vektorpotential gar nicht eindeutig festliegt, wobei die Freiheit sogar noch größer ist als beim elektrostatischen Potential, bei welchem die Freiheit nur aus einer willkürlichen Konstanten besteht. Dem Experimentator stellt sich jetzt die Frage, ob denn nun \vec{A} ein „echtes“ Feld ist oder eben nur ein Hilfsfeld?

Ist diese Frage sinnvoll? Was ist ein „echtes“ Feld?

Ein „echtes“ Feld beschreibt die beobachtbare Wirkung eines weit entfernten Objektes (z.B. einer elektrische Ladung oder einer Masse) auf ein Probeteilchen an einem bestimmten Ort durch eine **lokale** Wechselwirkung mit dem Feld, ohne also auf eine Fernwirkung mit dem weit entfernten Objekt angewiesen zu sein. Die Wirkung setzt sofort, ohne Zeitverzögerung ein, sowie die „Probeladung“ an den bestimmten Ort gebracht wird. Die lokale, sofortige Wechselwirkung ist also entscheidend.

Das Bemerkenswerte ist nun, dass es Stromanordnungen gibt, bei denen an Orten, wo das Magnetfeld Null ist, trotzdem ein Vektorpotential existieren muss (z.B. der Außenbereich einer Spule). Es gibt ein Experiment zur Wellennatur des Elektrons, bei dem die Elektronen nur durch diesen Bereich fliegen, und tatsächlich eine Wirkung verspüren! → Aharonov-Bohm-Effekt

In der Tat zeigt es sich in der Quantenmechanik, dass die Felder E, B fast überhaupt nicht mehr auftreten, sondern nahezu ausschließlich die „Hilfsgrößen“ V, \vec{A} . Es scheint also fast so, als wären diese Größen die grundlegenden.