

2.5 Elektrisches Potential und Spannung

Die potentielle Energie einer Probeladung q' am Ort \vec{r} in einem festen elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r})$ ist aufgrund der Coulomb-Kraft

$$E_{pot}(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -q' \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{s}$$

Hierbei ist \vec{r}_0 ein beliebig wählbarer Bezugspunkt. Physikalische Bedeutung hat nur die Differenz der potentiellen Energien an zwei Orten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 , da sie unabhängig vom Bezugspunkt \vec{r}_0 ist,

$$E_{pot}(\vec{r}_2) - E_{pot}(\vec{r}_1) = -q' \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{E} d\vec{s} + q' \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E} d\vec{s} = -q' \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} d\vec{s}$$

Wir definieren das elektrische Potential $\varphi(\vec{r})$ durch

$$E_{pot}(\vec{r}) = q' \varphi(\vec{r}) \quad (2.9)$$

so dass

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{s} \quad (2.10)$$

Die Umkehrung dieser Beziehung mit Hilfe des Gradienten lautet

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad (2.11)$$

Das Potential ist also ein skalares Feld. Es ist unabhängig von der Probeladung q' . Aus ihm lässt sich leicht das \vec{E} -Feld berechnen. Potentialdifferenzen werden als Spannung bezeichnet, also

$$U = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) \quad (2.12)$$

Die Einheit des Potentials und der Spannung ist das Volt (V)

$$[\varphi] = [U] = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{A s}^3} = 1 \text{ V}$$

Für das elektrische Feld ist damit eine praktische Einheit

$$[E] = \frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Beispiel 1: Durchläuft ein Teilchen mit einer Elementarladung ($q' = 1e$) eine Potentialdifferenz von $U = 1$ Volt, so ändert sich seine potentielle Energie und seine kinetische Energie (je nach Bewegungsrichtung) um $q'U = 1e \cdot 1\text{V}$. Diese Energieeinheit wird als ein eV bezeichnet und beträgt

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (2.13)$$

Chemische Bindungsenergien zwischen Atomen in einem Molekül liegen typisch im Bereich $E = 1$ eV, die Masse des Elektrons beträgt $E_e = m_e c^2 = 511000$ eV, die des Protons $E_p = m_p c^2 = 938000000$ eV.

elektrisches Potential φ

Spannung U

Elektronvolt eV

Beispiel 2: Wir betrachten eine Punktladung q , die am Ursprung ($\vec{r} = 0$) festgehalten wird. Im Feld \vec{E} dieser Ladung wird eine Probeladung q' aus unendlich großer Entfernung auf die Ladung q zu bewegt. Für eine Punktladung wählt man als Bezugspunkt $r_0 = \infty$ und legt die potentielle Energie dort per Konvention fest zu

$$E_{pot}(r_0 = \infty) = 0, \quad \varphi(r_0 = \infty) = 0$$

Haben beide Ladungen das gleiche Vorzeichen so stoßen sich die Ladungen ab. Gegen diese Kraft muss Arbeit verrichtet werden, dem System wird also potentielle Energie zugeführt. Für ein Zentralfeld \vec{E} gilt

$$\vec{E} d\vec{s} = E \vec{e}_r d\vec{s} = E dr$$

so dass die potentielle Energie nur vom Abstand r vom Ursprung abhängt, $\varphi = \varphi(r)$. Damit erzeugt das E-Feld eine konservative Kraft, das Integral ist unabhängig vom Weg.

$$\varphi(r) = - \int_{\infty}^r E dr = - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \Big|_{\infty}^r$$

und damit

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}} \tag{2.14}$$

Das Potential ist nur vom Betrag von r abhängig. Damit sind Flächen gleichen Potentials (Äquipotentialflächen) Kugelflächen um die Punktladung und immer senkrecht zu den Feldlinien. Äquipotentialflächen mit $\varphi(\vec{r}) = const$ stehen senkrecht auf dem E -Feld, da eine Ladung bei einer Bewegung senkrecht zum E -Feld keine Arbeit verrichtet. Da φ nur von r abhängt gilt für eine Punktladung

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -(\partial_r\varphi) \vec{e}_r$$

Der Gradient von φ steht senkrecht auf den Äquipotentialflächen $\varphi = const$.

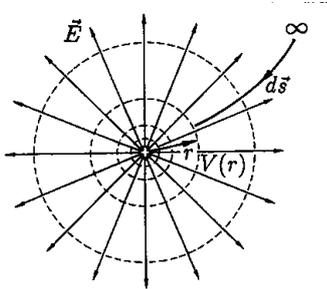


Abb. 2.7
Ebenen konstanten Potentials um eine Punktladung.

2.6 Influenz und Metalle

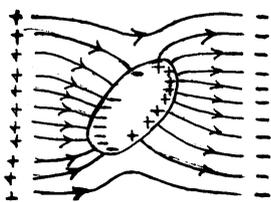


Abb. 2.8
Metall in einem äußeren E -Feld

Metalle zeichnen sich durch Kristallstrukturen aus, die aus positiv geladenen Atomrümpfen bestehen, während Valenzelektronen über das ganze Gitter verteilt sind und nicht mehr an ein einzelnes Atom gebunden sind. Diese frei beweglichen Elektronen liegen in hoher Zahl vor und können ihre Position durch äußere \vec{E} -Felder leicht ändern. Metalle sind daher sehr gute elektrische Leiter. Bringt man einen Leiter in ein stationäres elektrisches Feld, so bewegen sich so lange Ladungen auf die Oberfläche zu, bis die dadurch aufgebaute Oberflächenladung das äußere Feld im Innern kompensiert. Diese Verschiebung der Elektronen erfolgt sehr schnell und endet, wenn sich durch die Ladung der Elektronen und Atomrümpfe ein Gegenfeld aufgebaut hat, das das äußere Feld kompensiert. Für statische E -Felder gilt daher sobald sich ein Gleichgewicht eingestellt hat:

- Das gesamte E -Feld im Innern eines Metalls ist Null, denn $\vec{E} \neq 0$ würde zu einer weiteren Verschiebung der Leitungselektronen führen.
- Das E -Feld steht senkrecht auf der Oberfläche des Metalls, denn jede Tangentialkomponente führt zu einer weiteren Verschiebung der Elektronen parallel zur Oberfläche.
- Das Potential im Innern des Metalls ist damit konstant, die Oberfläche eines Metalls also eine Äquipotentialfläche, $\varphi = \text{const.}$

Diese Verschiebung der Elektronen durch ein äußeres E -Feld nennt man Influenz. Sie führt auch dazu, dass ein elektrisch neutrales Metall von einem äußeren Feld angezogen wird, siehe Fig. 2.2.

Beispiel: Trennung von Ladungen

In einem Feld E wird eine Leiterplatte von einer anderen getrennt. Danach tragen beide Platten entgegengesetzt gleiche Ladungen.

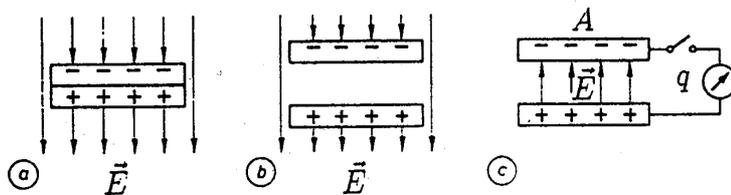


Abb. 2.9 Trennung zweier Leiterplatten in einem äußeren Feld

Spiegelladung Wir betrachten eine Ladung vor einer insgesamt ungeladenen Metallplatte. Die influenzierte Ladung in der Platte ändert das E -Feld außerhalb des Leiters, so dass die Feldlinien senkrecht auf der Metalloberfläche stehen. Das entstehende Gesamtfeld entspricht dem eines Feldes, das eine Spiegelladung mit entgegengesetztem Vorzeichen auf der anderen Seite der Metalloberfläche erzeugen würde. Das E -Feld einer Punktladung im Abstand a vor einer ebenen Leiterfläche lässt sich durch eine Spiegelladung im gleichen Abstand hinter der Leiterfläche darstellen.

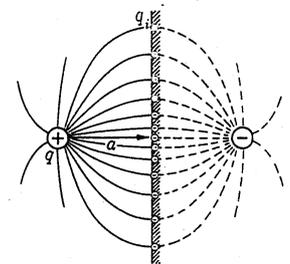


Abb. 2.10

Feld einer Ladung vor einer Metallfläche mit Spiegelladung

Faraday'scher Käfig Ist ein Hohlraum von einem Leiter umgeben, so schirmt die influenzierte Ladung ein äußeres E -Feld komplett ab. Der feldfreie Innenraum wird Faraday'scher Käfig genannt. Dies macht man sich auch beim Van de Graaf Generator zunutze. Hierbei rotiert ein Band über zwei Rollen. Es wird mit Ladungen (aus einer Spannungsquelle) besprüht, die dann im Innern einer metallischen Hohlkugel auf die Kugel abgeleitet werden. Da im Innern der Kugel (fast) kein Feld ist, können immer weiter Ladungen nachgeführt werden. Die Ladungen stoßen sich gegenseitig ab und fließen daher auf die äußere Oberfläche der Kugel. Dort baut sich eine hohe Oberflächenladung und Spannung auf. Diese hängt nur von der Isolation der Kugel und der Luftfeuchtigkeit ab und beträgt oft bis zu 100 kV.

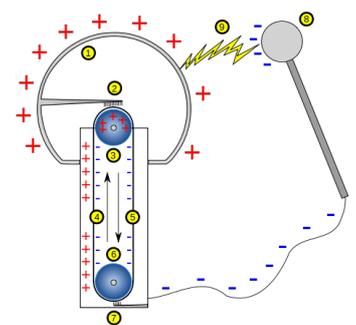


Abb. 2.11

Van de Graaf Generator

2.7 Ladungsverteilungen

2.7.1 Superpositionsprinzip

Experimentell findet man, dass sich die Coulomb-Kraft mehrerer Ladungen q_i addieren lässt, so dass für eine Probeladung q_0 gilt

$$\vec{F}_{ges} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{(\vec{r}_0 - \vec{r}_1)^2} \vec{e}_{01} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_2}{(\vec{r}_0 - \vec{r}_2)^2} \vec{e}_{02} + \dots$$

mit \vec{e}_{0i} als Einheitsvektor mit Richtung von q_i nach q_0 . Da \vec{F} linear von \vec{E} abhängt, folgt für elektrische Felder und auch für das Potential allgemein

$$\boxed{\vec{E}_{ges} = \sum_i \vec{E}_i, \quad \varphi_{ges} = \sum_i \varphi_i} \quad (2.15)$$

Ähnliche Gleichungen gelten auch für Magnetfelder und die dazugehörigen Potentiale. Diese Superpositionsgesetze für Kräfte und Felder scheinen trivial. Sie hängen aber kritisch davon ab, dass in den Gleichungen des Elektromagnetismus alle Felder nur linear auftauchen. Tatsächlich ist dies für die Maxwell-Gleichungen gegeben. Diese Linearität ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass die Felder sich gegenseitig nicht stören oder beeinflussen (Licht wechselwirkt nicht mit sich selber). Für die schwache und starke Wechselwirkung gilt das nicht. Die entsprechenden Felder reagieren miteinander, so dass auch das Superpositionsgesetz für diese Wechselwirkungen nicht im obigen Sinn gilt.

Das Superpositionsgesetz für den Elektromagnetismus bedeutet, dass sich die Felder für Ladungsverteilungen leicht wie oben gezeigt (als Summen) berechnen lassen.

Da die Elementarladung sehr klein ist und häufig sehr viele Elektronen oder Protonen betrachtet werden, macht es Sinn, auch (Integrale über) kontinuierliche Ladungsverteilungen zu betrachten. Hierzu definiert man die Raumladungsdichte

Raumladungsdichte ρ

$$\varrho(\vec{r}) = \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad \text{für} \quad \Delta V \rightarrow 0 \quad (2.16)$$

Damit ist die Gesamtladung q in einem Volumen V gegeben durch

$$q = \iiint \varrho dV \quad (2.17)$$

Flächenladungsdichte σ

Analog ist die Flächenladungsdichte σ z.B. an der Oberfläche eines Leiters definiert durch

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{\Delta q}{\Delta A} \quad \text{für} \quad \Delta A \rightarrow 0$$

Die Gesamtladung q auf einer Fläche A ist dann

$$q = \iint \sigma dA$$

2.7.2 Elektrischer Dipol in einem äußeren Feld

Ein Dipol ist eine Anordnung von zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen $\pm q$, die sich im Abstand $\vec{a} \neq 0$ befinden. \vec{a} zeigt von der negativen zur positiven Ladung. Das elektrische Dipolmoment \vec{p} ist definiert durch

$$\vec{p} = q \cdot \vec{a} \quad (2.18)$$

In einem homogenen äußeren E -Feld wirkt auf den Dipol insgesamt keine Kraft,

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q \cdot \vec{E} - q \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.19)$$

Das Drehmoment \vec{M} auf den Dipol ist in diesem Fall

$$\vec{M} = \sum \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\vec{a}}{2} \times \vec{F}_+ + \frac{-\vec{a}}{2} \times \vec{F}_- = q \cdot \vec{a} \times \vec{E} \quad (2.20)$$

und daher

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (2.21)$$

Die potentielle Energie des Dipols im homogenen E -Feld ist

$$E_{pot} = q_+ \varphi_+ + q_- \varphi_- = q \varphi_+ - q \varphi_- \quad (2.22)$$

$$= -q \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_+} \vec{E} d\vec{s} + q \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_-} \vec{E} d\vec{s} = -q \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{E} d\vec{s} \quad (2.23)$$

$$= -q \vec{E} \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} d\vec{s} = -q \vec{E} \vec{a} \quad (2.24)$$

oder

$$E_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (2.25)$$

Der Dipol dreht sich also im E -Feld so, dass \vec{p} in Richtung des \vec{E} -Feldes zeigt. Er ist im Gleichgewicht, wenn er parallel zum Feld steht, denn dann ist die potentielle Energie minimal.

In einem inhomogenen E -Feld ist die gesamte Kraft auf den Dipol

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) \neq 0$$

Für einen im \vec{E} -Feld ausgerichteten Dipol wird der Dipol also insgesamt in die Richtung gezogen, in der das \vec{E} -Feld stärker wird.

2.7.3 Das Potential eines Dipols

Durch Überlagerung der Einzelpotentiale im Punkt \vec{R} ergibt sich

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}$$

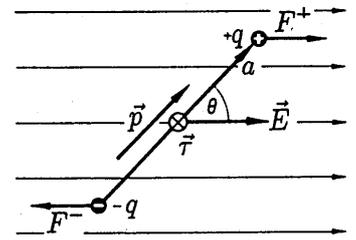


Abb. 2.12
Dipol in einem homogenen \vec{E} -Feld

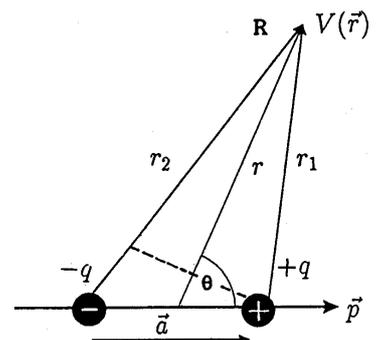


Abb. 2.13
Elektrischer Dipol

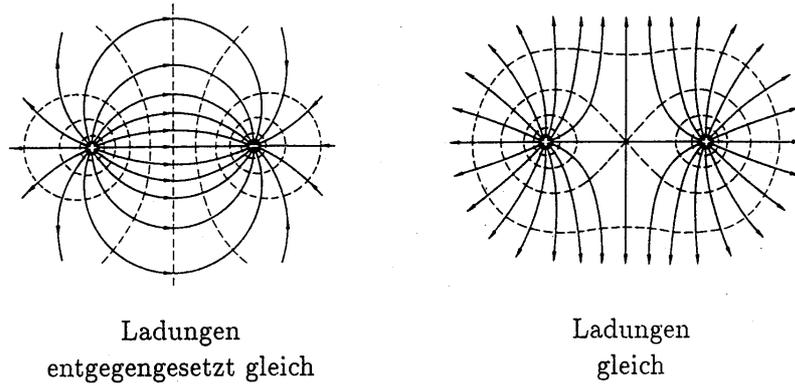


Abb. 2.14 Elektrisches Feld eines Dipols (links) und von zwei gleich großen Ladungen (rechts).

Häufig reicht es in erster Näherung, das Feld in großer Entfernung $r \gg a$ vom Dipol zu berechnen. Hierfür gilt

$$r_2 - r_1 \approx a \cos \theta \qquad r_1 r_2 \approx r^2$$

so dass

$$\varphi_{fern} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a \cos \theta}{r^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$\varphi_{fern} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \qquad (2.26)$$

Weggelassen sind Terme, die stärker abfallen als r^{-2} . Das Potential eines Dipols fällt also mit r^{-2} ab, das Potential einer Punktladung dagegen mit r^{-1} .

Die elektrische Feldstärke eines Dipols (in Fernfeld Näherung) ergibt sich aus

$$\vec{E}_{fern} = -\nabla \varphi_{fern}$$

Die x-Komponente lautet

$$E_{fern,x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \qquad (2.27)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{3x \vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{p_x}{r^3} \right) \qquad (2.28)$$

so dass insgesamt

$$\vec{E}_{fern} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{3\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) \qquad (2.29)$$

Die radiale und die transversale Feld-Komponente ergeben sich aus der Darstellung des ∇ -Operators in Kugelkoordinaten (siehe Formelsammlung)

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \qquad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Die Komponente E_ϕ ist aus Symmetriegründen gleich Null.

2.7.4 Flächenladungen, Kondensator und Kapazität

Die Flächenladungsdichte σ einer unendlich ausgedehnten Metallfläche sei konstant. Berechnet werden soll das \vec{E} -Feld im Punkt P mit Abstand z von der Platte. Für einen schmalen Kreisring (wie in Abb. 2.15 gezeigt) mit Ladung $dq = \sigma \cdot dA = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$ ist

$$d\vec{E}(z, r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{R^2} \cos\theta \vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{R^2} \frac{z}{R} \vec{e}_z \quad (2.30)$$

Aus Symmetriegründen wird das \vec{E} -Feld nur in z -Richtung zeigen. Der Faktor $\cos\theta = z/R$ sichert, dass von jedem Teil des Kreisrings nur die \vec{E} -Feld Komponente in z -Richtung benutzt wird. Hierbei ist $R(r)$ der Abstand des Kreisrings von P . Das Integral über die ganze Fläche von $r = 0$ bis $r = \infty$ kann wegen $R^2 = z^2 + r^2$ und damit $r dr = R dR$ umgerechnet werden in

$$\vec{E} = \int_{r=0}^{r=\infty} d\vec{E}(z, r) = \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{R^2} \frac{z}{R} \vec{e}_z \quad (2.31)$$

$$= \int_{R=z}^{R=\infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R dR}{R^2} \frac{z}{R} \vec{e}_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \int_{R=z}^{R=\infty} \frac{dR}{R^2} \quad (2.32)$$

und damit

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z} \quad (2.33)$$

Da die Fläche unendlich ausgedehnt sein soll, ist das Ergebnis unabhängig von z ; das Feld ist überall im Raum gleich (homogen).

Plattenkondensatoren bestehen im einfachsten Fall aus zwei parallelen Metallplatten im Abstand d . Werden die Platten mit entgegengesetzt gleicher Ladungsdichte $\pm\sigma$ aufgeladen, so addieren sich im Raum zwischen den Platten die \vec{E} -Felder vektoriell, $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$,

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z} \quad (2.34)$$

wobei \vec{E} von der positiv geladenen zur negativ geladenen Platte zeigt. Die Spannung zwischen der + und - Platte ist dann

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_+} \vec{E} d\vec{s} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_-} \vec{E} d\vec{s} = - \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{E} d\vec{s} \quad (2.35)$$

$$\boxed{U = E \cdot d} \quad (2.36)$$

Auch für endlich große Platten mit Radius r wird obige Rechnung gültig bleiben, solange der Abstand viel kleiner als die Ausdehnung r der Platten ist, $d \ll r$. Für eine Plattenfläche A erhält man als Gesamtladung $q = \sigma \cdot A$ und damit

$$U = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{A} q \quad (2.37)$$

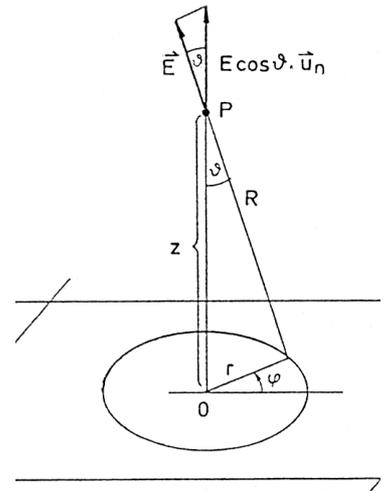


Abb. 2.15
 E -Feld über einer geladenen Metallplatte.

Feld eines Plattenkondensators

Kapazität

Die Kapazität einer Anordnung aus Leitern wird allgemein definiert als

$$C = \frac{q}{U} \tag{2.38}$$

und gibt an, wieviel Ladung bei gegebener Spannung gespeichert ist. Im Fall des Plattenkondensators ist also

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{2.39}$$

Kapazitäten werden oft in der Einheit 'Farad' angegeben, wobei $1 F = 1 C/V$ ist.

Die Homogenität des Feldes in einem Plattenkondensator lässt sich z.B. mit der Braun'schen Röhre zeigen, bei der ein Strahl von Elektronen in den Kondensator gelenkt wird. Bei konstanter Kraft ergibt sich eine Parabelbahn.

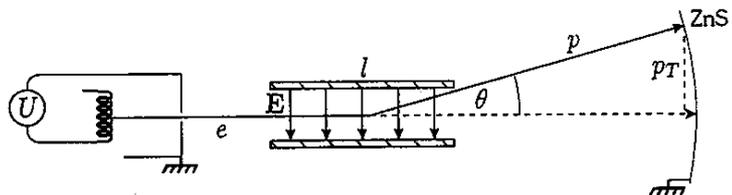


Abb. 2.16 Ablenkung eines Elektronen-Strahls in einer Braun'schen Röhre

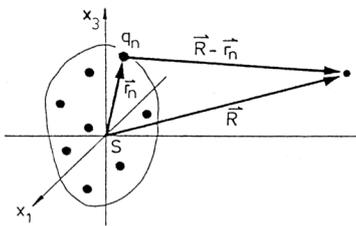


Abb. 2.17 Multipolentwicklung

2.7.5 Raumladungen und Multipole

Für mehrere Ladungen an beliebigen Positionen im Raum oder eine beliebige Raumladungsdichte reicht es nicht mehr aus, nur die Gesamt-Ladung oder das Dipolmoment zu betrachten. Da wir bereits gesehen haben, dass das Coulomb-Potential für

- eine Punktladung $\sim R^{-1}$
- einen Dipol im Fernfeld $\sim R^{-2}$

mit dem Abstand R abfällt, bietet es sich an, für den allgemeinen Fall das Potential als eine Reihenentwicklung in Potenzen von R^{-n} zu beschreiben, die sogenannte Multipolentwicklung. Die einzelnen Terme nennt man Monopol, Dipol, Quadrupol, Sextupol etc.. Die Multipol-Näherung ist nur gut für Abstände, die sehr viel größer sind als die Abstände der Ladungen untereinander.

Bei mehreren diskreten Ladungen $q_1, q_2 \dots q_n$ mit den Koordinaten $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_n$ ergibt sich das

- Monopolmoment (die Gesamt-Ladung) zu $q = \sum_i q_i$
- Dipolmoment zu

$$\vec{p} = q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2 \dots + q_n \vec{r}_n = \sum_i q_i \vec{r}_i \tag{2.40}$$

wobei $\sum_i q_i = 0$ sein muss.

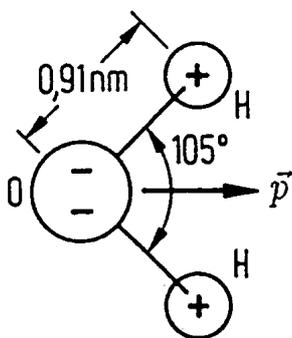


Abb. 2.18 Dipol-Moment eines H_2O Moleküls.

Für den kontinuierlichen Fall mit der Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$ definiert man entsprechend

- Monopolmoment:

$$q = \iiint \varrho dV$$

- Dipolmoment:

$$\vec{p} = \iiint \varrho \vec{r} dV$$

- Quadrupolmoment: (analog für $Q_{yy}, Q_{zz}, Q_{xz}, Q_{yz}$)

$$Q_{xx} = \iiint \varrho x^2 dV \quad Q_{xy} = \iiint \varrho xy dV$$

Das Potential $\varphi(\vec{R})$ am Ort $\vec{R} = (X, Y, Z)$ ist dann gegeben durch

$$4\pi\epsilon_0 \varphi = \frac{q}{R} + \frac{\vec{p}\vec{R}}{R^3} + \frac{1}{2R^5} (Q_{xx}(3X^2 - R^2) + \dots + Q_{xy}6XY + \dots) + \frac{1}{R^7} \dots$$

2.8 Gauß'scher Satz

2.8.1 Integrale und Differentielle Form

Nach dem Coulomb-Gesetz und dem Superpositionsprinzip lässt sich das Feld einer Ladungsverteilung aus der Addition der Felder aller Ladungen berechnen. Eine dazu äquivalente aber oft einfachere Formulierung ist der Gauß'sche Satz der Elektrostatik. Er besagt, dass der Fluß Φ des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Oberfläche A proportional zur gesamten eingeschlossenen Ladung q ist,

$$\Phi = \oiint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.41)$$

Dabei ist die Ladung innerhalb A im Volumen V

$$q = \iiint_V \varrho dV \quad (2.42)$$

Dies ist die erste Maxwell'sche Formel in integraler Form. Die Oberfläche A kann beliebig geformt sein. Der Flächenvektor $d\vec{A}$ zeigt überall nach außen. Ladungen außerhalb der Oberfläche tragen nicht bei (obwohl ihre Felder natürlich auch die Oberfläche durchdringen).

Unter Benutzung des Gauß'schen Integralsatzes der Mathematik (siehe Formelsammlung in Abschnitt A) folgt

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \oiint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \varrho dV \quad (2.43)$$

1. Maxwell'sche Formel in integraler Form

Da diese Gleichung auch für beliebig kleine Volumen gilt, folgt durch Vergleich der Integranden die differentielle Form der 1. Maxwell'schen Gleichung. Feld und Dichte sind hierbei am gleichen Ort auszuwerten.

$$\boxed{\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \tag{2.44}$$

1. Maxwell'sche Formel in differentieller Form

Unter Verwendung von Gleichung 2.11, $\vec{E} = -\nabla\varphi$, folgt die Poisson-Gleichung für das Potential,

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \tag{2.45}$$

Poisson-Gleichung und Laplace-Gleichung

Von Interesse ist häufig auch die Lösung für das Potential in räumlichen Bereichen ohne Ladung, in denen daher die sogenannte Laplace-Gleichung gilt,

$$\Delta\varphi = 0 \tag{2.46}$$

2.8.2 Begründung des Gauß'schen Satzes

Wir betrachten zunächst eine Punktladung q bei $\vec{r} = 0$ mit dem Coulomb-Feld wie in Gleichung 2.8. Die Fläche soll eine Kugelfläche A mit dieser Ladung im Zentrum sein.

Eine anschauliche Begründung ergibt sich aus dem Bild der Feldlinien. Die Feldstärke E entspricht der Dichte der Feldlinien, der Fluß Φ ist dann einfach die Anzahl der Feldlinien, die die Fläche durchqueren. Offenbar durchqueren immer alle Feldlinien der von A komplett eingeschlossenen Ladung die Fläche A , egal wie A geformt ist. Es macht Sinn, dass die Anzahl der Feldlinien einer Ladung proportional zur Ladung sein soll.

Quantitativer ist für eine Kugelfläche A um eine Punktladung im Ursprung ein Flächenelement $d\vec{A} = \vec{e}_r \cdot dA$. Da auch das Feld aus Symmetriegründen radial nach außen zeigt, $\vec{E} = E \cdot \vec{e}_r$, folgt

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA$$

Da E aus Symmetriegründen nur von r und nicht von θ und ϕ abhängt, folgt mit dem Coulomb-Gesetz

$$\oiint_{\text{Kugel}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oiint_{\text{Kugel}} dA = E 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{2.47}$$

Für diese Wahl der Fläche sind also Coulomb-Gesetz und Gauß'scher Satz äquivalent. Die Abhängigkeiten vom Abstand heben sich für das Feld ($\sim r^{-2}$) und der Kugelfläche ($\sim r^2$) gegenseitig auf, so dass die Größe der Fläche oder des eingeschlossenen Volumens offenbar keine Rolle spielt.

Um anders geformte Flächen zu diskutieren, drehen wir das Flächenelement $d\vec{A}$ um einen Winkel α und vergrößern es gleichzeitig um einen Faktor $1/\cos\alpha$, so dass es den gleichen Raumwinkel abdeckt, $dA_1 = dA/\cos\alpha$. Der entsprechende Fluß durch das neue Flächenelement \vec{A}_1 bleibt unverändert, denn

$$d\Phi_1 = \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = E \cdot dA_1 \cos\alpha = E \cdot dA = d\Phi$$

Es kommt also nur auf die Abdeckung des ganzen Raumwinkels an. Man kann also die Kugel verschieben oder die Ladung in der Kugel verschieben oder die Form der Integrationsfläche ganz anders wählen, ohne dass sich der Fluß ändert.

Nach dem Superpositionsgesetz addieren sich die Felder aller Ladungen innerhalb der Fläche. Da im Gauß'schen Satz sowohl das Feld als auch die Ladungen linear auftreten, kann man die entsprechenden Gleichungen für alle Ladungen innerhalb der Fläche einfach addieren, der Gauß'sche Satz gilt also für die Gesamtladung innerhalb der Fläche, egal wie sie dort verteilt ist.

Ladungen außerhalb der Fläche A tragen nicht bei, denn ihre Feldvektoren durchdringen die Fläche erst von außen und dann von innen. Da der Flächenvektor immer nach außen zeigt, gibt es also negative und positive Beiträge zum Integral, die sich gegenseitig aufheben.

2.8.3 Anwendung des Gauß'schen Satzes

Bei beliebigen Ladungsverteilungen lässt sich das \vec{E} -Feld am Besten durch Integration der Ladungsdichte mit dem Coulomb-Gesetz berechnen. Hingegen ist für Ladungsverteilungen, die Symmetrien aufweisen, die Anwendung des Gauß'schen Satzes viel einfacher. Dies können vor allem ebene Symmetrien, Zylindersymmetrien oder Kugelsymmetrien sein.

Punktladung, Hohlkugel und Vollkugel

Zur Berechnung des \vec{E} -Feldes außerhalb einer Vollkugel oder Hohlkugel mit Gesamt-Ladung q , Radius R betrachtet man als Integrationsfläche eine zentrierte Kugeloberfläche mit Radius $r > R$. Aus Symmetriegründen ist $\vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$, so dass mit $d\vec{A} = \vec{e}_r dA$ folgt:

$$\Phi = \oiint_A \vec{E}(r) d\vec{A} = E(r) 4\pi r^2$$

Da beim Gauß'schen Satz nur die eingeschlossene Gesamt-Ladung, nicht aber deren räumliche Verteilung, eine Rolle spielt, folgt das gleiche Feld wie für eine Punktladung gleicher Größe in der Mitte dieser Kugeln, also einfach das Coulomb-Gesetz für eine entsprechende Punktladung q .

$$\vec{E}_{q, \text{Kugel}, r > R} = \vec{E}_{q, \text{Punkt}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \quad (2.48)$$

Zur Berechnung des \vec{E} -Feldes im Innern einer homogen geladenen Vollkugel mit Ladung q und Ladungsdichte $\rho = q / (\frac{4}{3}\pi R^3)$ betrachtet man als Integrationsfläche eine zentrierte Kugeloberfläche mit Radius $r < R$. Nur die eingeschlossene Ladung $q_{r < R}$ darf beim Gauß'schen Satz berücksichtigt werden,

$$q_{r < R} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = q \frac{r^3}{R^3} \quad (2.49)$$

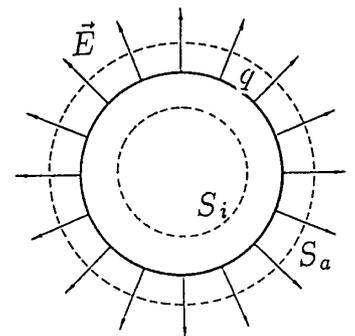


Abb. 2.19
Flächen zur Integration für das Feld von Kugeln.

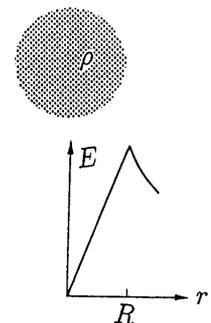


Abb. 2.20
Feld im Innern einer homogen geladenen Kugel.

so dass

$$\vec{E}_{q, \text{Kugel}, r < R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{r < R}}{r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{r}{R^3} \vec{e}_r \quad (2.50)$$

Das Feld steigt also im Innern einer homogen geladenen Kugel linear an. Im Zentrum ist das Feld aus Symmetriegründen Null.

Bei einer homogen geladenen Kugelschale ist das Feld im Innern überall gleich Null, denn die von einer kugelförmigen Integrationsfläche im Innern eingeschlossene Ladung ist Null.

Feld einer homogen geladenen, ebenen Oberfläche

Wie in Abschnitt 2.7.4 betrachten wir eine ausgedehnte Ebene mit Flächenladung σ . Als Integrationsfläche A für den Gauß'schen Satz wählen wir die Oberfläche eines Zylinders, dessen ebene Flächen knapp oberhalb (Fläche A_1) und unterhalb (A_2) der Ladungsebene liegen. Die eingeschlossene Ladung ist dann $q = \sigma A_1$. Für eine ausgedehnte Ladungsebene ist aus Symmetriegründen das Feld \vec{E}_1 und \vec{E}_2 homogen und senkrecht zur Ladungsebene, so dass $\Phi_1 = \vec{E}_1 \vec{A}_1 = E_1 A_1$ ist. Aus Symmetriegründen ist $\Phi_1 = \Phi_2$. Auf dem Zylindermantel (Fläche A_3) ist $\vec{E}_3 \perp d\vec{A}_3$. Aus dem Gauß'schen Satz folgt dann

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 2\Phi_1 = 2 E_1 A_1 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A_1}{\epsilon_0} \quad (2.51)$$

Dies stimmt mit dem Ergebnis aus der viel komplizierteren Integration von Gleichung 2.33 überein,

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \quad (2.52)$$

Da $\vec{E}_3 \perp d\vec{A}_3$ kann man den Zylinder beliebig hoch machen (A_3 beliebig groß), ohne dass sich der Fluß ändert. Damit gilt auch, dass das Feld E_1, E_2 unabhängig vom Abstand von der Ladungsfläche und damit homogen ist.

Feld eines geladenen Drahtes

Wir betrachten einen unendlich langen Draht mit Ladung/Länge= λ . Als Integrationsfläche wählen wir aus Symmetriegründen einen Zylinder mit Radius R und Höhe z , der den Draht zentrisch umschließt. Die Ladung innerhalb der Fläche ist dann $q = \lambda L$. In Zylinderkoordinaten R, ϕ, z ist das Feld aus Symmetriegründen radial, $\vec{E} = E \vec{e}_R$, so dass nur der Zylindermantel zum Fluß beiträgt,

$$\Phi = \oiint \vec{E} d\vec{A} = E(r) 2\pi R z = \frac{\lambda z}{\epsilon_0} \quad (2.53)$$

und damit

$$\vec{E}(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{e}_R \quad (2.54)$$

Ladungsdichte in Metallen

Im Abschnitt 2.6 ergab sich für den elektrostatischen Fall, dass im Innern eines Metalls $\vec{E} = 0$ gilt. Aus der differentiellen Form des Gauß'schen Satzes $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ folgt dann als neues Ergebnis, dass die Ladungsdichte innerhalb von Metallen $\rho = 0$ ist.

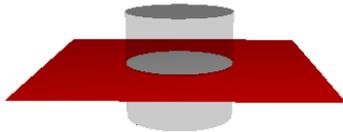


Abb. 2.21
Integration für eine geladene Ebene.

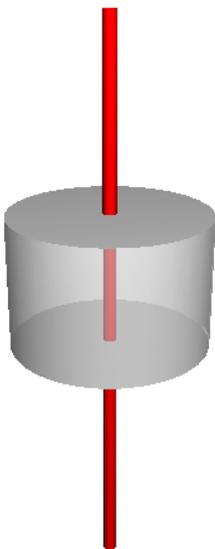


Abb. 2.22
Integration für einen geladenen Draht.

2.9 Energie des E -Feldes

Ein Plattenkondensator sei mit der Ladung $\pm q$ aufgeladen, so dass die Platten sich gegenseitig anziehen. Bei der Erhöhung des Plattenabstandes um d muß daher am System Arbeit verrichtet werden. Da die Feldstärke zwischen den Platten unabhängig vom Plattenabstand ist besteht also die einzige Änderung darin, dass in einem zusätzlichen Volumen $V = A \cdot d$ ein elektrisches Feld E aufgebaut wird. Die Arbeit wird also vollständig in die Energie dieses Feldes transferiert. Die Kraft \vec{F} auf die positiv geladene Platte im Feld \vec{E}_- der negativ geladenen Platte ist

$$\vec{F} = q_+ \vec{E}_-$$

Da nach Gleichung 2.33 und Abbildung 2.23

$$\vec{E}_+ = -\frac{q_+}{2\epsilon_0 A} \vec{e}_x, \quad \vec{E}_- = -\vec{E}_+, \quad E = 2E_+$$

folgt auch

$$\vec{F} = -2\epsilon_0 A E_+^2 \vec{e}_x = -\frac{1}{2} \epsilon_0 A E^2 \vec{e}_x$$

Die im Feld des Kondensators gespeicherte Arbeit ist dann

$$W = - \int_x^{x+d} \vec{F} d\vec{x} = \frac{1}{2} \epsilon_0 A d E^2 \quad (2.55)$$

Mit der Definition der Kapazität aus Gleichung 2.38 und $U = Ed$ zeigt sich, dass die gespeicherte Energie proportional zur Kapazität des Kondensators ist,

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \quad (2.56)$$

Die im Volumen $V = Ad$ gespeicherte Energiedichte ist dann

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (2.57)$$

Diese Gleichung gilt ganz allgemein, also auch für inhomogene E -Felder.

Alternativ kann man die Energie in einem Kondensator auch herleiten, indem man kleine Ladungsmengen von einer Platte zur anderen bringt, gegen die sich langsam durch die schon verschobene Ladungsmenge aufbauende Potentialdifferenz. Viel allgemeiner gilt jedoch für beliebige Anordnungen, dass man zur Verschiebung einer kleinen Ladungsmenge dq um eine Potentialdifferenz $U = \Phi_2 - \Phi_1$ die Arbeit

$$dW = U dq = \frac{1}{C} q dq$$

aufbringen muss, wobei die Potentialdifferenz U für jede schon transferierte Ladungsmenge q durch $C = q/U$ gegeben ist. Integration ergibt dann wieder Gleichung 2.56,

$$W = \int dW = \frac{1}{C} \int q dq = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2 = \frac{1}{2} C U^2$$

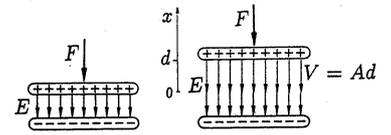


Abb. 2.23

Kraft zwischen zwei Kondensatorplatten

2.10 Dielektrika

Bringt man Metalle in ein E -Feld, so wandern die frei beweglichen Elektronen, bis deren eigenes E -Feld das äußere Feld komplett abschirmt.

Bei nicht-metallischen Stoffen ohne frei bewegliche Ladungsträger (Monopole) ist dies nicht möglich. Die nächste Näherung der Reaktion des Stoffes auf das äußere Feld ist daher die Ausrichtung von Dipolen im Material.

- Manche Moleküle haben bereits aufgrund ihrer Bindungsstruktur ein Dipolmoment. Hierzu gehören z.B. $NaCl$ und H_2O . Solche Dipole erfahren im äußeren E -Feld ein Drehmoment (siehe Abschnitt 2.7.2).
- Bei anderen Atomen oder Molekülen ohne natürliches Dipolmoment kann durch das äußere E -Feld die Atomhülle gegen den Kern verschoben werden. Der entstehende Dipol ist ebenfalls im äußeren Feld ausgerichtet.

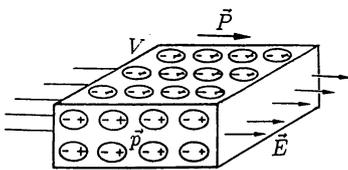


Abb. 2.24
Orientierung elementarer Dipole in einem äußeren Feld.

Orientieren sich die Dipole im Material im Mittel in eine Richtung (Polarisation), so bleibt das Material im Innern elektrisch neutral, allerdings entstehen effektiv an den Rändern Oberflächenladungen $\pm\sigma_p$, die - ähnlich wie bei Metallen - das äußere Feld teilweise abschirmen. Das gesamte Dipolmoment des Dielektrikums ergibt sich aus der Summe der elementaren Dipolmomente \vec{p}_i (Superpositionsprinzip). Dieses muss gleich dem makroskopischen Dipolmoment aufgrund der Oberflächenladung sein, das sich aus der Dicke d und Volumen $V = Ad$ des Dielektrikums ergibt,

$$\sum_i \vec{p}_i = \sigma_p A d \vec{e}_E = \sigma_p V \vec{e}_E \quad (2.58)$$

Die Dipolvektoren zeigen in Richtung des \vec{E} -Feldes. Die Polarisation \vec{P} ist definiert als das Dipolmoment pro Volumeneinheit. Für ein Dielektrikum im homogenen Feld eines Plattenkondensators ergibt sich

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i = \sigma_p \vec{e}_E \quad (2.59)$$

Für die Anwendung des Gauß'schen Satzes mit der Integrationsfläche wie in Abbildung 2.25 gilt:

- Das Feld außerhalb des Kondensators ist Null.
- Das Feld an den Seiten der Integrationsfläche ist senkrecht zu den Flächenvektoren und trägt daher nicht zum Integral bei.
- Das Feld im Innern ist homogen und parallel zum Flächenvektor.

Für die Summe aus Oberflächenladung der Kondensatorplatte (σ) und des Dielektrikums ($-\sigma_p$) folgt dann

$$\oiint \vec{E} d\vec{A} = \frac{q - q_p}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A - \sigma_p A}{\epsilon_0}$$

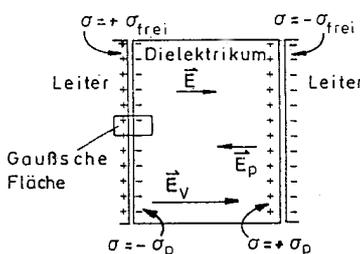


Abb. 2.25
Dielektrikum in einem Kondensator.

so dass für das homogene \vec{E} -Feld gilt:

$$\vec{E} = \frac{\sigma - \sigma_p}{\epsilon_0} \vec{e}_E \quad (2.60)$$

Im Vergleich zum Feld ohne Dielektrikum ($E_V = \sigma/\epsilon_0$) ist das Feld im Dielektrikum reduziert um die Polarisierung des Dielektrikums,

$$\vec{E} = \vec{E}_V - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (2.61)$$

Die elektrische Verschiebungsdichte \vec{D}

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_V = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.62)$$

ist hingegen unabhängig von den Polarisierungseigenschaften und nur von den frei beweglichen Ladungen abhängig. Das Verhältnis

$$\epsilon_r = \frac{E_V}{E} \quad (2.63)$$

ist eine reine Materialkonstante und wird als relative Dielektrizitätszahl bezeichnet. Hiermit gilt

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (2.64)$$

Auch die Spannung zwischen den Kondensatorplatten $U = Ed$ ist damit kleiner als im Vakuum ($U_V = E_V d$), so dass bei gleicher Ladung q

$$\epsilon_r = \frac{E_V}{E} = \frac{U_V}{U} = \frac{C}{C_V} \quad (2.65)$$

Die Kapazität des Kondensators steigt also mit einem Dielektrikum,

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad (2.66)$$

Es kann also mehr Ladung gespeichert werden. Schiebt man ein Dielektrikum in einen Kondensator ein, so beobachtet man:

- Liegt eine feste Spannung U am Kondensator an, so fließen zusätzliche Ladungen auf den Kondensator.
- Ist der Kondensator aufgeladen aber isoliert, so bleibt die Ladung q konstant, aber die Spannung U sinkt.

Der Energieinhalt des Feldes

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} E^2 d^2 \quad (2.67)$$

und damit die Energiedichte

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (2.68)$$

sind also geringer, wenn das Dielektrikum im Feld ist als außerhalb. Es wird also ins Feld hineingezogen.

Material	ϵ_r
Vakuum	1
Luft	1,000576
H_2O	82
Plexiglas	3,5
Keramiken	bis 8000