A Mathematische Formeln

Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r})$, skalares Feld $f(\vec{r})$

Kartesische Koordinaten x, y, z

Ortsvektor	$\vec{r} = (x, y, z) = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z = r\,\vec{e}_r$
Linienelement:	$d\vec{s} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$
Volumenelement	$dV = dx\,dy\,dz$
Nabla, $\nabla = \vec{\nabla} = \frac{d}{d\vec{r}}$	$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}, \qquad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x} = \partial_1$
Gradient (Steigung)	$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \qquad (\nabla f)_i = \partial_i f$
Divergenz (Quellstärke)	$\nabla \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \sum_i \partial_i E_i$
Rotation (Wirbelstärke)	$\nabla \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix}$
Laplace Δ	$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \Delta$
	$\nabla^2 f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f = \Delta f$

Kugelkoordinaten: Betrag r, Polarwinkel θ, Azimuthwinkel φ

Koordinaten	$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \tan\theta = \sqrt{x^2 + y^2}/z, \qquad \tan\varphi = y/x$
Ortsvektor	$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,\sin\theta\,\cos\varphi \\ r\,\sin\theta\,\sin\varphi \\ r\,\cos\theta \end{pmatrix}$
Einheitsvektoren	$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\varphi \\ \sin\theta\,\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\,\cos\varphi \\ \cos\theta\,\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ +\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$
Linienelement:	$d\vec{s} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\vec{e}_\varphi$
Volumenelement	$dV = r^2\,\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$
Gradient	$\nabla f = \vec{e}_r \partial_r f + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta f + \vec{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta} \partial_\phi f$
Divergenz	$\nabla \vec{E} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \left(\partial_\phi E_\phi + \partial_\theta (\sin\theta E_\theta)\right)$
Laplace	$\Delta f = \frac{1}{r} \partial_r^2 (rf) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \left(\sin\theta \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta f) + \partial_\phi^2 f\right)$

Zylinderkoordinaten: Abstand zur Achse R, Azimuth φ, Höhe z

Koordinaten	$R^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\varphi = y/x \qquad z$
Ortsvektor	$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi \\ r\,\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$
Einheitsvektoren	$\vec{e}_R = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ +\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Linienelement:	$d\vec{s} = dR\, e_R + R\, d\varphi + dz\, e_z$
Volumenelement	$dV = R\, dR\, d\varphi\, dz$
Gradient	$\nabla f = \vec{e}_R \partial_R f + \vec{e}_\phi \frac{1}{R} \partial_\phi f + \vec{e}_z \partial_z f$
Divergenz	$\nabla \vec{E} = \frac{1}{R} \partial_R (R E_R) + \frac{1}{R} \partial_\phi E_\phi + \partial_z E_z$
Laplace	$\Delta f = \frac{1}{R} \partial_R (R \partial_R f) + \frac{1}{R^2} \partial_\phi^2 f + \partial_z^2 f$

Ableitungs-Identitäten

$\nabla \vec{r} = 3, \quad \nabla r = \vec{e}_r, \quad \nabla \times \vec{r} = 0$

$\nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$

$\nabla \times (\nabla f) = 0 \qquad\qquad \nabla(\nabla \times \vec{E}) = 0$

$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$

$\nabla \times (f \vec{E}) = f(\nabla \times \vec{E}) + (\nabla f) \times \vec{E}$

Integralsätze:

Gradientensatz	$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\nabla f)\; d\vec{s} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$
Gauß'scher Integralsatz	$\iiint_V (\nabla \vec{E})\; dV = \oiint_A \vec{E}\, d\vec{A}$
	geschlossene Fläche $\vec{A}$ um Volumen V
	Orientierung $(d\vec{A})$ nach außen
Stokes'scher Integralsatz	$\iint_A (\nabla \times \vec{E})\; d\vec{A} = \oint_S \vec{E}\, d\vec{s}$
	geschlossene Linie S um Rand der Fläche $\vec{A}$
	Orientierung $(d\vec{A},\, d\vec{s})$ nach rechter Hand Regel

Komplexe Zahlen: z

$i = \sqrt{-1}, \qquad i^2 = -1, \qquad 1/i = -i$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\, \sin\varphi, \qquad e^{i\pi/2} = i$

$z = a + ib = |z|\, e^{i\varphi} = |z|\, (\cos\varphi + i\, \sin\varphi) \qquad (a, b, \varphi$ reell)

$z^* = a - ib, \qquad |z|^2 = z\, z*$

$|z|^2 = zz^* = (Re(z))^2 + (Im(z))^2, \qquad \tan\varphi = Im(z)\; /\; Re(z)$

$Re(z) = a = |z| \cos\varphi, \qquad Im(z) = b = |z| \sin\varphi$

B Formeln zum Elektromagnetismus

Konstanten	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{\text{N}}{\text{A}^2}$	$= 1,2566 \cdot 10^{-6}\frac{\text{N}}{\text{A}^2}$
	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0\, c^2} = \frac{10^7}{4\pi\, c^2}\frac{\text{A}^2}{\text{N}}$	$= 8,854187817 \cdot 10^{-12}\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$
Elementarladung	$e = 1,602176565 \cdot 10^{-19}$ C	$e = q_p = -q_e$
Massen	Elektron: $m_e = 511$ KeV	Proton: $m_p = 938$ MeV

Strom u. Ladung	$I = \partial_t\, q$	
Strom- u. Ladungsdichte	$I = \iint \vec{j}\; d\vec{A}$	$q = \iiint \varrho\; d\vec{r}$
Ladungserhaltung	$\nabla\vec{j} = -\partial_t\, \varrho$	$\oint\!\!\!\oint \vec{j}\; d\vec{A} = -\partial_t\, q$
Maxwell-Gleichungen		
Gauß für $\vec{E}$	$\nabla\vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}$	$\oint\!\!\!\oint \vec{E}\; d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$
Gauß für $\vec{B}$	$\nabla\vec{B} = 0$	$\oint\!\!\!\oint \vec{B}\; d\vec{A} = 0$
Faraday-Henry	$\nabla\times\vec{E} = -\partial_t\, \vec{B}$	$\oint \vec{E}\; d\vec{s} = -\partial_t \iint \vec{B} d\vec{A}$
Ampere-Maxwell	$\nabla\times\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0\; \partial_t\vec{E})$	$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0(I + \epsilon_0\partial_t \iint \vec{E} d\vec{A})$
Lorentz-Kraft	$\vec{F} = q\; \left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$	
Energiedichte w	$w = \frac{1}{2}E\, D + \frac{1}{2}B\, H$	
Dielektrikum	$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E}$	
Magnetismus	$\vec{B} = \mu_0\, (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0\mu_r\vec{H}$	

Potentiale	$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$	$\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t\vec{A}$
Eichtransformation	$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$	$\varphi' = -\varphi - \partial_t\lambda$
Superpositionsprinzip	$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$	$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$
	$\varphi = \sum_i \varphi_i$	$\vec{A} = \sum_i \vec{A}_i$

Elektrostatik

Potentielle Energie	$W_p = -\int_1^2 \vec{F}\, d\vec{s}$	$\varphi = \frac{W_p}{q'}$
Potential φ	$\vec{E} = -\nabla\varphi$	$\varphi = -\int \vec{E}\, d\vec{s}$
Spannung U	$U = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)$	
Punktquelle q	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\vec{e}_r$	$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$
Dipol-Feld $\pm q$	$\vec{p} = q\,\vec{d}\quad(-q \to +q)$	$\varphi \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\ \cos\theta}{r^2}$
Dipol-Energie	$E_{pot} = -\vec{p}\,\vec{E}$	$\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}$
Plattenkondensator	$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\vec{n}$	$U = E\,d$
	$C = q/U$	$C = \epsilon_0\epsilon_r\frac{A}{d}$
	$W = \frac{1}{2}CU^2$	
Poisson-Gleichung	$\Delta\,\varphi = -\varrho\,/\,\epsilon_0$	

Elektrische Leitung

Stromdichte	$\vec{j} = \varrho\,\vec{v} = \varrho\,\mu\,\vec{E} = \sigma_{el}\,\vec{E}$	
Ohm'sches Gesetz	$R = U/I = \frac{1}{\sigma_{el}}\frac{L}{A}$	
Stromkreise	Masche: $U_{emk} = \sum_a U_a$	Knoten: $\sum_a I_a = 0$
Widerstände	Reihe: $R_{ges} = R_1 + R_2$	Parallel: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Magnetostatic

Biot-Savart	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\int\frac{d\vec{L}\times\vec{r}}{r^3}$	
B-Feld eines Leiters	$\vec{B} = \frac{\mu_0\,I}{2\pi\,R}\,\vec{e}_\varphi$	
Kreisbahn	$P_T = q\,B\,R$	
Spule	$B = \mu_0\,n\,I$	
Kraft auf Leiter	$\vec{F} = I\int d\vec{l}\times\vec{B}$	
Kraft zwischen Leitern	$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0\,I^2}{2\pi\,R}$	
magnetischer Dipol	$\vec{m} = I\,\vec{A}$	$\vec{B} = \frac{\mu_0\,\vec{m}}{2\pi\,r^3}$ auf der Achse
Dipol-Energie	$E_{pot} = -\vec{m}\,\vec{B}$	$\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$
Hall Effekt	$U_H = v\,b\,B$	
Vektor-Potential	$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{j}}{r}\,dV$	

Induktion

induzierte Spannung	$U_{ind} = -\partial_t \iint \vec{B}\,\vec{A}$
Selbstinduktion	$U_{ind} = -L\,\partial_t I$
Spule	$L = \mu_o\,\mu_r\,n^2\,V$

Schaltkreise

Einschaltvorgänge	$\tau\,\partial_t I + I = I_\infty$	$I(t) = I_\infty\,(1 - e^{-t/\tau})$
Zeitkonstanten	$\tau = R\,C$	$\tau = L\,/\,R$
Wechselspannung	$U = U_0 e^{i\omega t}$	$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$
Leistung	$P = U\,I$	$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T U\,I\,dt = \frac{1}{2}U_0 I_0\,\cos(\varphi_U - \varphi_I)$
komplexe Widerstände	$U = Z\,I$	
	$Z_R = R$	$Z_L = i\omega L \qquad Z_C = 1/(i\omega C)$
RCL-Reihenschwingkreis	$\partial_t U = R\partial_t I + \frac{1}{C}I + L\partial_t^2 I$	
	$Z = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L$	$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \qquad R_{LC} = \sqrt{L/C}$
RCL-Parallelschwingkreis	$Z = R + Z_{LC}$	$\frac{1}{Z_{LC}} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L}$