

7 Maxwell - Gleichungen

7.1 Der Verschiebungsstrom

Das Faraday'sche Gesetz

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\partial_t \iint \vec{B} d\vec{A}$$

beschreibt, dass die zeitliche Veränderung des magnetischen Flusses durch eine Fläche wirbelförmige $\vec{E}$ -Felder um diese Fläche herum erzeugt. Im Folgenden wird gezeigt, dass dies auch anders herum gelten muss: Die zeitliche Änderung von $\vec{E}$ -Feldern erzeugt $\vec{B}$ -Felder.

Zunächst kann man sehen, dass das Ampere'sche Gesetz in der Form, in der es in der Magnetostatik benutzt wurde,

$$\nabla \times B = \mu_0 \vec{j}$$

nicht allgemein gültig sein kann. Wendet man nämlich die Divergenz auf diese Gleichung an, so findet man

$$\nabla(\nabla \times B) = \mu_0 \nabla \vec{j}$$

Die linke Seite mit $\nabla(\nabla \times \dots)$ ist mathematisch für alle Vektorfelder immer Null. Die rechte Seite $\nabla \vec{j}$ ist aber nur Null, wenn die Stromdichte räumlich überall konstant ist. Das ist sicher nicht allgemein der Fall. Wegen der Ladungserhaltung $\nabla \vec{j} = -\partial_t \rho$ dürfte sich dann auch die Ladungsdichte zeitlich nicht ändern. Z.B. beim Aufladen eines Kondensators geschieht aber genau das. Benutzt man zusätzlich das Coulomb-Gesetz $\nabla \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, so ergibt sich

$$\nabla \vec{j} = -\partial_t \rho = -\partial_t (\epsilon_0 \nabla \vec{E}) = -\nabla (\epsilon_0 \partial_t \vec{E}) \quad (7.1)$$

Ladungserhaltung und Coulomb-Gesetz erzwingen also, dass man $\nabla \times \vec{B}$ nur schreiben kann als

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E}) \quad (7.2)$$

Magnetische Wirbelfelder werden also von Strömen und zusätzlich von zeitlich veränderlichen elektrischen Feldern hervorgerufen. Anwendung des Stokes'schen Integralsatzes ergibt

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \iint \vec{E} d\vec{A} \quad (7.3)$$

Maxwell nannte den zusätzliche Term $\epsilon_0 \partial_t \vec{E}$ die Verschiebungsstromdichte.

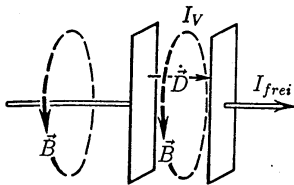


Abb. 7.1 Magnetfeld erzeugt durch einen Strom beziehungsweise durch den Verschiebungsstrom des $\vec{E}$ -Feldes in einem Kondensator.

Ampere-Maxwell'sches Gesetz in differentieller Form

Ampere-Maxwell'sches Gesetz in integraler Form

Experimentell kann man auch tatsächlich in einem Plattenkondensator, der mit Wechselstrom auf und entladen wird, ein Magnetfeld nachweisen. Man stellt dafür eine Ringspule mit Magnetkern in den Kondensator. Das sich im Kondensator auf- und abbauende $\vec{E}$ -Feld erzeugt ein wirbelförmiges $\vec{B}$ -Feld, das in der Ringspule verläuft und dadurch in den Spulenwicklungen eine Spannung induziert. Der Effekt ist allerdings durch die zusätzliche Konstante $\epsilon_0 = 8.8 \cdot 10^{-12} C^2/(Nm^2)$ sehr klein. Er spielt aber für elektromagnetische Wellen eine entscheidende Rolle.

Obige Argumentation mit Hilfe der differentiellen Gleichungen kann man auch mit den Integralgleichungen veranschaulichen. Im Detail betrachtet man einen Kondensator beim Aufladen und berechnet das Magnetfeld um eines der Zuleitungskabel.

$$\underbrace{\oint \vec{B} d\vec{s}}_{\text{Integral über Kreisbahn}} = \underbrace{\mu_0 \iint \vec{j} d\vec{A}}_{\text{Integral über Kreisfläche}} = \mu_0 I \quad (7.4)$$

Man kann, bei gleicher Kreisbahn als Rand der Fläche, aber auch eine Fläche wählen, die keine Ebene ist, sondern mitten durch den Kondensator verläuft. Da mitten zwischen den Kondensatorplatten kein Strom fließt, gilt

$$\underbrace{\oint \vec{B} d\vec{s}}_{\text{Integral über Kreisbahn}} = \underbrace{\mu_0 \iint \vec{j} d\vec{A}}_{\text{Integral mittendurch Kondensator}} = 0 \quad (7.5)$$

Mathematisch gibt es also einen Widerspruch zwischen diesen beiden Gleichungen. Maxwell interpretierte dies so, dass das Amperes'sche Gesetz nicht vollständig sein kann. Die heutige Vorstellung ist, dass das sich im Kondensator aufbauende $\vec{E}$ -Feld die Funktion des Stroms übernimmt. Mit der Kapazität $C = \epsilon_0 \epsilon_r A/d$ gilt für die Ladung im Kondensator

$$Q = C U = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} U = \epsilon_0 A E$$

Daraus folgt

$$I = \partial_t Q = \epsilon_0 A \partial_t E$$

Damit definiert man die "Verschiebungsstromdichte" als

$$j_V = \frac{I}{A} = \epsilon_0 \partial_t E$$

Dies ist ein symbolischer Strom, der im Kondensator gegeben ist nur durch das zeitabhängige $\vec{E}$ -Feld.

7.2 Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen

Aus den bisher diskutierten Experimenten ergeben sich die 4 Maxwellgleichungen und die Lorentzkraft als Grundlage der klassischen Elektrodynamik:

Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes.

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \oiint \vec{E} d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (7.6)$$

B -Felder haben keine Quellen.

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad \oiint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (7.7)$$

E -Felder werden von variablen B -Feldern erzeugt.

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad \oint \vec{E} d\vec{s} = -\partial_t \iint \vec{B} d\vec{A} \quad (7.8)$$

B -Felder werden von Strömen und von variablen E -Feldern erzeugt.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \quad \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \iint \vec{E} d\vec{A} \quad (7.9)$$

Lorentzkraft durch E - und B -Felder

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.10)$$

- Die Erhaltung der elektrischen Ladung ist in diesen Gleichungen bereits enthalten. Wendet man die Divergenz auf Gleichung 7.9 an

$$\nabla(\nabla \times \vec{B}) = 0 = \mu_0(\nabla \vec{j} + \epsilon_0 \partial_t \nabla \vec{E})$$

und benutzt Gleichung 7.6, so folgt

$$\nabla \vec{j} + \partial_t \rho = 0$$

- Die Maxwell-Gleichungen ändern ihre Form nicht bei einer Lorentz-Transformation, wenn Zeit und Ortskoordinaten sowie die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ adäquat transformiert werden. Sie gehorchen also den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie.
- Die Ladungen, Ströme und Felder beinhalten Effekte durch Materialien. Möchte man nur äußere (freie) Ladungen q_{frei} und Ströme I_{frei} berücksichtigen, so müssen statt der Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ die Felder $\vec{D}$ und $\vec{H}$ benutzt werden. Mit

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

folgt in Materialien

$$\nabla \vec{D} = \rho_{frei} \quad \oiint \vec{D} d\vec{A} = q_{frei} \quad (7.11)$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad \oiint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (7.12)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad \oint \vec{E} d\vec{s} = -\partial_t \iint \vec{B} d\vec{A} \quad (7.13)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{frei} + \partial_t \vec{D} \quad \oint \vec{H} d\vec{s} = I_{frei} + \partial_t \iint \vec{D} d\vec{A} \quad (7.14)$$

7.3 Skalares Potential und Vektorpotential

7.3.1 Maxwell-Gleichungen und Potentiale

Die Maxwell-Gleichungen stellen ein System gekoppelter Differentialgleichungen dar. Nimmt man die Ladungsdichte ϱ und Stromdichte $\vec{j}$ als gegeben an, so werden die sechs Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch die 8 Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \vec{E} &= \frac{\varrho}{\epsilon_0} & \nabla \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}\end{aligned}$$

bestimmt. Die $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Felder sind also nicht unabhängig. Es gibt nicht nur eine elektrische Wechselwirkung und eine magnetische Wechselwirkung, sondern nur eine kombinierte, elektromagnetische Wechselwirkung.

Man sollte also zunächst versuchen, dieses überbestimmte System auf weniger Komponenten zu reduzieren. In einem ersten Schritt wird die Anzahl der Gleichungen von 8 auf 6 reduziert und die Anzahl der Feldkomponenten von 6 auf 4. Dies geschieht durch die Einführung der Potentiale.

Ansatzpunkt ist, dass die beiden homogenen Gleichungen $\nabla \vec{B} = 0$ und $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ nicht von Ladungen und Strömen abhängen. Man konstruiert daher Potentiale so, dass diese homogenen Gleichungen automatisch erfüllt sind.

Jedes Vektorfeld ist durch die Angabe von Rotation und Gradient vollständig bestimmt. Wegen $\nabla \vec{B} = 0$ kann man daher das Magnetfeld vollständig auf die Rotation eines Vektorpotentials $\vec{A}$ zurückführen,

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}} \quad (7.15)$$

Vektor-Potential $\vec{A}$

Damit ist die eine homogene Gleichung automatisch erfüllt, denn für jedes Feld $\vec{A}$ gilt

$$\nabla \vec{B} = \nabla(\nabla \times \vec{A}) = 0$$

Setzt man dies in die zweite homogene Gleichung ein,

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} = -\partial_t(\nabla \times \vec{A})$$

und vertauscht die Zeit- und Ortsableitungen, so folgt

$$\nabla \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = 0$$

Für den Ausdruck in der Klammer verschwindet die Rotation; er kann daher komplett durch eine Divergenz beschrieben werden,

$$\vec{E} + \partial_t \vec{A} = -\nabla \varphi$$

Skalares Potential φ

oder

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla \varphi - \partial_t \vec{A}} \quad (7.16)$$

Im Fall der Elektrostatik ($\partial_t \vec{A} = 0$) ist dies das bereits diskutierte Potential in Gleichung 2.11. Durch die beiden Potentialgleichungen 7.15 und 7.16 sind die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen automatisch erfüllt.

Nun kann man $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in den beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen durch die Potentiale ersetzen. Die Gleichung $\nabla \cdot \vec{E} = \varrho/\epsilon_0$ ergibt

$$\boxed{\nabla^2 \varphi + \partial_t (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\varrho}{\epsilon_0}} \quad (7.17)$$

Mit

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

folgt für die letzte Gleichung

$$\boxed{(\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 \vec{A}) - \nabla (\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \varphi) = -\mu_0 \vec{j}} \quad (7.18)$$

Diese Gleichungen in 7.17 und 7.18 enthalten die gleiche Information wie die Maxwell-Gleichungen. Es sind aber nur noch 4 Feld-Komponenten ($\varphi, \vec{A}$) aus 4 Gleichungen zu bestimmen.

7.3.2 Eichtransformationen

Die messbaren Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ müssen bei gegebenem $\varrho, \vec{j}$ eindeutig bestimmt sein. Dies gilt aber nicht für die Potentiale, denn diese sind nicht direkt messbar. Insbesondere kann man die Potentiale so "eichtransformieren", dass sich $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nicht ändern. Diese Eigenschaft einer unmessbaren Größe ist die Grundlage der theoretischen Ableitung der Maxwell-Gleichungen.

Eine Eichtransformation ändert die Potentiale,

$$\vec{A} \Leftrightarrow \vec{A}' \quad \varphi' \Leftrightarrow \varphi$$

ohne dass sich die zugehörigen Messgrößen $\vec{E}, \vec{B}$ ändern,

$$\vec{E} = \vec{E}' \quad \vec{B} = \vec{B}'$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda \quad \varphi' = \varphi - \partial_t \lambda$$

Hierbei ist λ eine beliebige skalare Funktion $\lambda(\vec{r}, t)$. Wichtig ist, dass $\vec{A}$ und φ simultan mit dem gleichen λ transformiert werden. Einsetzen zeigt, dass die Messgrößen tatsächlich unverändert bleiben¹³.

Es gibt unendlich viele mögliche Eichungen. Die Wahl der praktischsten Eichung hängt von dem konkreten Problem ab.

¹³

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \underbrace{\nabla \times (\nabla \lambda)}_{=0} = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\nabla \varphi' - \partial_t \vec{A}' = -\nabla \varphi + \nabla \partial_t \lambda - \partial_t \vec{A} - \partial_t \nabla \lambda = -\nabla \varphi - \partial_t \vec{A} = \vec{E}$$

Coulomb-Eichung Die Messgröße $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ legt nur die Rotation, aber nicht die Divergenz von $\vec{A}$ fest. In der Coulomb-Eichung wählt man¹⁴

$$\nabla \vec{A} = 0$$

Gleichung 7.17 ergibt dann die Poisson-Gleichung,

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\varrho}{\epsilon_0}$$

Die andere Potentialgleichung Gleichung 7.18 wird aber nur im magnetostatischen Fall ($\partial_t \vec{A} = 0$) einfach.

Lorentz-Eichung Hierfür wählt man

$$\nabla \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \partial_t \varphi$$

Damit erhält man aus Gleichung 7.17

$$\boxed{(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2) \varphi = -\frac{\varrho}{\epsilon_0}} \quad (7.19)$$

und aus Gleichung 7.18

$$\boxed{(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2) \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}} \quad (7.20)$$

Bei gegebenem $\varrho, \vec{j}$ sind dies 4 unabhängige, entkoppelte Wellengleichungen für die 4 Komponenten von $\vec{A}, \varphi$. Es ist viel einfacher, erst diese Gleichungen zu lösen und daraus $\vec{E}, \vec{B}$ zu bestimmen als direkt die Maxwell-Gleichungen zu benutzen.

In der Klammer steht der sogenannte D'Alembert-Operator

$$\boxed{\square = \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2} \quad (7.21)$$

der allgemein die Ausbreitung von Wellen beschreibt. Die Wellengeschwindigkeit ist hier die Lichtgeschwindigkeit

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}} \quad (7.22)$$

Im D'Alembert-Operator stehen Ort- und Zeitableitungen gleichberechtigt, wie erforderlich für die spezielle Relativitätstheorie.

7.3.3 Bedeutung der Potentiale

Es ist eine interessante Frage, ob die Felder $\vec{E}, \vec{B}$ oder die Potentiale $\varphi, \vec{A}$ die fundamentalen Größen im Elektromagnetismus sind.

- Messgrößen sind die Felder $\vec{E}, \vec{B}$.

¹⁴Konkret wählt man die beliebige Funktion λ so, dass $\nabla^2 \lambda = \nabla \cdot \vec{A}'$, denn damit folgt

$$\nabla \vec{A} = \nabla \vec{A}' - \nabla^2 \lambda = 0$$

Wellengleichungen der Potentiale

Lichtgeschwindigkeit c

7.3 Skalares Potential und Vektorpotential

- Die Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$ beinhalten unnötig viele Feldkomponenten, die Potentiale nicht.
- Die Potentiale bilden einen Vierervektor $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$, mit dem der Elektromagnetismus relativistisch invariant formuliert werden kann.
- In den Grundgleichungen der Quantenmechanik geladener Teilchen erscheinen direkt die Potentiale $\varphi, \vec{A}$.
- Photonen als Quanten des elektromagnetischen Feldes sind Anregungen der Potentiale $\varphi, \vec{A}$.
- Postuliert man eine Eichfreiheit der Potentiale, so lassen sich daraus die Maxwellgleichungen einschließlich Erhaltung der elektrischen Ladung ableiten. Das Ergebnis stimmt mit allen Experimenten überein.