3 Elektrische Leitung

3.1 Strom und Ladungserhaltung

Elektrischer Strom wird durch die Bewegung von Ladungsträgern hervorgerufen. Er ist definiert über die Änderung der Ladung in einem bestimmten Volumen,

$$\boxed{I = \partial_t\, q} \tag{3.1}$$

Wir betrachten in einem Leiter zunächst ein quaderförmiges Volumen $V = A\,x$ mit konstanter Raumladungsdichte ϱ und Ladung $q = \varrho\, V$.

Mikroskopisch betrachten wir Ladungsträger mit mittlerer Geschwindigkeit $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$, die in der Zeit t die Strecke x zurücklegen. Die durch die Fläche A in der Zeit t transportierte Ladung ist

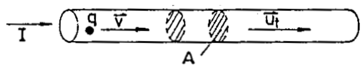

Abb. 3.1 Stromdichte durch Ladungsträger.

$$q = \varrho\; A\; x$$

so dass für den konstanten Strom I

$$I = \frac{q}{t} = \varrho\; A\; \frac{x}{t} = \varrho\,\vec{v}\;\vec{A} = \vec{j}\;\vec{A}$$

gilt mit der konstanten Stromdichte

$$\boxed{\vec{j} = \varrho\,\vec{v}} \tag{3.2}$$

In Realität werden ϱ, $\vec{v}$ und damit $\vec{j}$ nicht konstant sondern ortsabhängig sein. Betrachtet man daher lieber eine infinitesimal kleine Fläche $d\vec{A}$ mit beliebigem Winkel zur Geschwindigkeit und damit zur Stromdichte $\vec{j}$, so ist der entsprechende inifitesimale Strom

$$dI = \vec{j}\,d\vec{A} \tag{3.3}$$

Richtungskonvention: Für positiv geladene Ladungsträger zeigt die Stromdichte in Richtung ihrer Geschwindigkeit (technische Stromdichterichtung).

Für beliebig geformte, makroskopische Oberflächen gilt entsprechend

$$\boxed{I = \iint \vec{j}\,d\vec{A}} \tag{3.4}$$

Insbesondere gilt für eine geschlossene Fläche mit dem Gauß'schen Integralsatz

$$I = \oiint \vec{j}\,d\vec{A} = \iiint (\nabla\vec{j})\,dV \tag{3.5}$$

Makroskopisch bedeutet Ladungserhaltung, dass ein Strom I von Ladungsträgern von Innen durch die Oberfläche des Volumens die Ladung innerhalb des Volumens verringert,

$$I = -\partial_t\, q = -\partial_t \iiint \varrho\,dV = -\iiint (\partial_t\varrho)\,dV \tag{3.6}$$

Diese Definition des Stroms ist ebenfalls für beliebig geformte Volumen anwendbar.

Da die letzten beiden Formeln auch für beliebige Volumen gelten müssen, folgt durch Vergleich der Integranden als Folge der elektrischen Ladungserhaltung die sogenannte Kontinuitätsgleichung in integraler und differentieller Form,

Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\nabla\vec{j} = -\partial_t\,\varrho} \tag{3.7}$$

$$\boxed{\oiint \vec{j}\,d\vec{A} = -\partial_t\,q} \tag{3.8}$$

3.2 Mechanismen des Ladungstransports

Ladungsträger, die aufgrund eines äußeren elektrischen Feldes zum Strom beitragen, liegen in vielen verschiedenen Materialien vor. Ihre mittlere Geschwindigkeit $\vec{v}$ entsteht durch die Coulombkraft, sollte also in einem homogenen E-Feld linear mit der Zeit wachsen. Viele Streuprozesse der Ladungsträger mit den Atomen im Material sorgen allerdings dafür, dass diese einen Teil ihrer kinetischen Energie abgeben, effektiv also gebremst werden.

Der Energieübertrag auf das Material geht als thermische Energie verloren und führt zu einer Temperaturerhöhung. Die Verlustleistung P ist die Arbeit pro Zeit,

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(q\,U) \tag{3.9}$$

Bei konstanter Spannung gilt

$$\boxed{P = U\frac{dq}{dt} = U\,I} \tag{3.10}$$

Die Einheit dieser Leistung ist das Watt, $[P] = 1\ \mathrm{W} = 1\,\mathrm{VA} = 1\,\mathrm{Nms}^{-1}$.

Wie bei einem Vorgang mit Reibung stellt sich ein Gleichgewicht zwischen beschleunigender Kraft und Reibung ein. Die im Mittel erreichte Geschwindigkeit und damit auch die Stromdichte ist normalerweise proportional zum äußeren Feld,

Ohm'sches Gesetz

$$\boxed{\vec{v} = \mu\,\vec{E}, \qquad \vec{j} = \varrho\,\vec{v} = \varrho\,\mu\vec{E} = \sigma_{el}\,\vec{E}} \tag{3.11}$$

Die Beweglichkeit μ beziehungsweise die elektrische Leitfähigkeit σ_{el} sind Materialkonstanten. Das Ohm'sche Gesetz gilt, wenn genügend Stöße vorkommen, entsprechend effektiv Energie abgegeben wird und durch die Energieübertragung selber keine neuen Ladungsträger entstehen (Ionisation). In den meisten Materialien ist dies erfüllt, so dass μ und σ_{el} unabhängig von $\vec{E}$ sind.

Drückt man das E-Feld durch die Potentialdifferenz $U = EL$ entlang des Stromwegs L aus, so folgt

$$I = j\,A = \sigma_{el} EA = \sigma_{el}\,\frac{A}{L}\,U$$

Damit ist der elektrische Widerstand R eines langen Leiters gegeben durch

$$\boxed{R = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sigma_{el}}\frac{L}{A}} \tag{3.12}$$

mit der Einheit Ohm, $[R] = \Omega = V/A$. Der materialspezifische Widerstand ρ_s hingegen ist das Inverse der Leitfähigkeit,

$$\boxed{\rho_S = \frac{1}{\sigma_{el}} = R\frac{A}{L}} \tag{3.13}$$

und hat die Einheit Ωm.

Material	ρ_S
Kupfer	$1{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega m$
Porzellan	$3 \cdot 10^{16}\,\Omega m$

- In Metallen liegen, wie bereits erwähnt, Elektronen in großer Zahl als Ladungsträger vor, die sich im Kristallgitter frei bewegen können. Der Widerstand ensteht durch Streuprozesse der Elektronen an Brüchen oder Fehlstellen im Kristall sowie bei höheren Temperaturen durch die Störung des Gitters aufgrund der thermischen Bewegung der Atome im Kristall. Der Widerstand steigt daher mit der Temperatur.

- In perfekten Halbleiterkristallen brauchen Elektronen eine Mindestenergie ΔE, um aus der Valenzbindung in das sogenannte Leitungsband zu gelangen (Silizium: $\Delta E = 1{,}1$ eV). Erst dann tragen sie zur Leitfähigkeit bei. Licht oder auch thermische Energie kann hierfür ausreichend Energie liefern. Die Wahrscheinlichkeit bei einer Temperatur T die Energielücke zu überspringen ist proportional zu $\sim exp(-\Delta E/kT)$, die Ladungsträgerdichte ϱ steigt also schnell mit der Temperatur[4]. Atome im Kristall, die ein Elektron an das Leitungsband abgegeben haben, können von Nachbaratomen ein Elektron aufnehmen. Durch weitere Prozesse dieser Art entsteht effektiv ein zusätzlicher Strom, der als Bewegung positiver Ladungsträger (Defektelektronen) beschrieben werden kann. Diese haben eine andere Dichte und Beweglichkeit als die Elektronen im Valenzband. Für den Gesamtstrom gilt dann

$$\vec{j} = (\varrho_- \mu_- + \varrho_+ \mu_+)\,\vec{E}$$

  Bei nicht perfekten Kristallen mit Fremdatomen anderer Bindungsstrukturen können diese weitere Elektronen an das Leitungsband abgeben (Donatoren) oder von benachbarten Kristallatomen Elektronen aufnehmen (Akzeptoren). Besteht der Halbleiter aus 4-wertigem Silizium, so können 3- oder 5-wertige

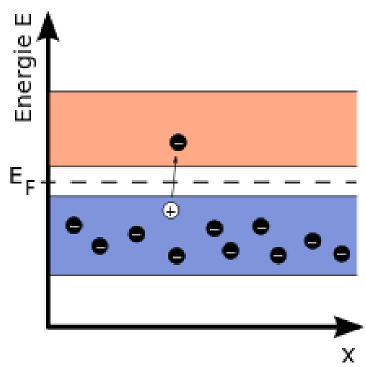

Abb. 3.2 Energieniveaus im Halbleiter

[4]Ohne Kühlung besteht daher die Gefahr, dass die Verlustwärme den Halbleiter aufheizt, hierduch mehr Ladungsträger entstehen, wodurch der Strom und damit wiederum die Verlustwärme steigt (Thermal Runaway).

Atome in Konzentrationen von z.B. $\sim 10^{-7}$ eingebracht werden. Der durch Dotierung entstehende Anteil der Ladungsdichte ist unabhängig von der Temperatur und führt zu deutlich erhöhter Leitfähigkeit.

- In Lösungen liegen in der Regel Anionen und Kationen vor, die beide zur Leitfähigkeit beitragen.

- Gasentladungen entstehen bei sehr hohen Spannungen durch Stoßionisation, d.h. beschleunigte Elektronen ionisieren weitere Gasatome und es entsteht ein Lawineneffekt (Luft: 3,3 kV/mm).

3.3 Stromkreise

Leiter: Wie bereits diskutiert ist der Widerstand eines Metalldrahts extrem klein, es sei denn, der Draht ist extrem lang oder extrem dünn. Die Leitungen in einem Stromkreis haben daher in der Regel einen vernachlässigbaren Widerstand und Energieverlust. In dieser Näherung ist die Spannung an jedem Punkt eines Leiters in einem Stromkreis gleich.

Ohm'scher Widerstand: An einem extrem dünnen und langen Draht tritt ein Ohm'scher Widerstand R auf. Es entsteht daher an ihm ein Spanungsabfall von $U = RI$.

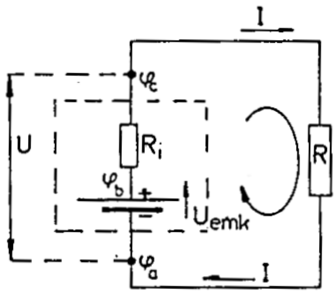

Abb. 3.3 Stromkreis mit Spannungsquelle, Innenwiderstand R_i und äußerem Verbraucherwiderstand R.

Spannunsgquellen: In einer Spannungs- oder Stromquelle wird Energie z.B. durch eine chemische Reaktion oder aufgrund mechanischer Bewegung in einem Generator so umgewandelt, dass Elektronen Energie gewinnen und damit auf höheres Potential gehoben werden. In der Spannungsquelle fließen also Elektronen aufgrund einer sogenannten "elektro-motorischen Kraft" (emk) anders als bisher diskutiert von negativem zu positivem Potential.

Dies ist nicht mit beliebiger Effizienz möglich, so dass auch in der Spannungsquelle ein Energieverlust auftritt, der in einem Schaltbild ersatzweise als Innen-Widerstand R_i dargestellt werden kann. Diese sind in der Regel klein, $R_i \leq 1\Omega$, können aber nur vernachlässigt werden, wenn die Außenwiderstände deutlich größer sind, $R_i << R$.

Knotenregel: Elektrische Ladungserhaltung gilt an jedem Punkt eines Leiters und insbesondere auch an Kontaktstellen zwischen 3 oder mehr Leitern (Knoten). Für die Ströme in den beteiligten Leitern muss daher gelten

$$\boxed{\partial_t q = 0 = \sum_i I_i} \tag{3.14}$$

Maschenregel: Da in einer geschlossenen Leiterschleife

$$\sum U = -\oint \vec{E}\, d\vec{s} = 0$$

gilt, folgt, dass die Spannungsverluste U_a an äußeren Widerständen R_a von den Spannungsquellen U_{emk} kompensiert werden müssen,

$$\boxed{\sum U_{emk} = \sum_a U_a = \sum_a R_a I_a} \qquad (3.15)$$

Addition von Widerständen: Bereits aus der Gleichung 3.12 für den Widerstand eines langen Drahts ist klar, dass eine Verlängerung des Drahts zu einer linearen Erhöhung des gesamten Widerstands führt,

$$L_{ges} = L_1 + L_2 \qquad \Rightarrow \qquad R_{ges} = R_1 + R_2 \qquad (3.16)$$

Für die **Reihen-Schaltung** in Abbildung 3.4 folgt auch aus der Knotenregel, dass der Strom durch alle Widerstände gleich ist, $I = I_1 = I_2$. Kann man den Innenwiderstand der Spannungsquelle vernachlässigen, so folgt mit der Maschenregel

$$U_{emk} = U_1 + U_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 = (R_1 + R_2)\, I$$

Hierbei wurden die Vorzeichen der einzelnen Beiträge durch die Stromdichte-Richtung in der Abbildung festgelegt. Es folgt wie in Gleichung 3.16 antizipiert für die Reihenschaltung

$$\boxed{R_{ges} = \frac{U_{ges}}{I_{ges}} = \frac{U_1 + U_2}{I} = R_1 + R_2} \qquad (3.17)$$

Falls relevant muss der Innenwiderstand der Spannungsquelle addiert werden, $R_{ges} = R_i + R_1 + R_2$.

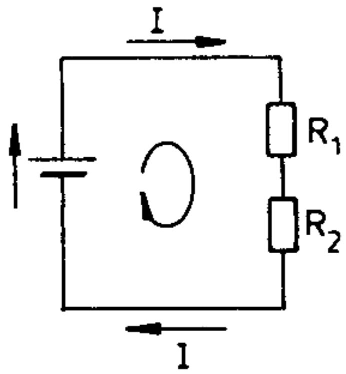

Abb. 3.4 Stromkreis mit zwei Widerständen in Reihe geschaltet.

In der **Parallel-Schaltung** von Widerständen in Abbildung 3.5 gibt es zwei Schleifen und zwei Knoten. Mit den Vorzeichen wie in der Abbildung ergibt sich aus den Knoten

$$I = I_1 + I_2$$

und damit für die Maschenregeln

$$0 = U_1 - U_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2$$

$$U_{emk} = U_1 = R_1 I_1$$

Aus den drei Gleichungen folgen die drei Unbekannten I_1, I_2, I_3 und damit der Gesamt-Widerstand für die Parallel-Schaltung

$$R_{ges} = \frac{U_{ges}}{I_{ges}} = \frac{R_1 I_1}{I_1 + I_2} = \frac{R_1 I_1}{I_1 + \frac{R_1}{R_2} I_1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

oder

$$\boxed{\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \qquad (3.18)$$

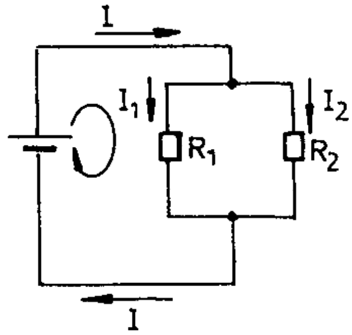

Abb. 3.5 Stromkreis mit zwei parallel geschalteten Widerständen.