Lösung der Wellengleichung

$$\Box \varphi(\vec r, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec r, t). \qquad \text{(Lorentz-Eichung!)}$$

$$\left[\rho(\vec r, t) = \int d^3\vec r\,' \int dt'\,\rho(\vec r, t')\,\delta(\vec r - \vec r\,')\,\delta(t - t')\right]$$

$$\varphi(\vec r, t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3\vec r\,' \int dt'\, G^{R}(\vec r - \vec r\,', t - t')\,\rho(\vec r\,', t') =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\vec r\,' \int dt'\, \frac{\delta(t' - t_r)}{|\vec r - \vec r\,'|}\rho(\vec r\,', t') =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\vec r\,' \frac{\rho(\vec r\,', t_r)}{|\vec r - \vec r\,'|}, \qquad t_r = t - \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}.$$

Analogerweise für $\vec A$.

$$\Box \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\vec r\,' \frac{\rho\left(\vec r\,', t - \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}\right)}{|\vec r - \vec r\,'|},$$

$$\Box \vec A = -\mu_0 \vec j \Rightarrow \vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec r\,' \frac{\vec j\left(\vec r\,', t - \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}\right)}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

retardierte Potentiale.

Das $\vec{E}$-Feld und das $\vec{B}$-Feld.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$\nabla\varphi$: $$\frac{\partial\rho}{\partial t_r} \equiv \dot{\rho} = \frac{\partial\rho}{\partial t} .$$

$$\nabla_r \rho(\vec{r}\,', t_r) = \frac{\partial\rho}{\partial t_r} \cdot (\nabla_r t_r) = -\frac{1}{c}\dot{\rho}\, \nabla_r |\vec{r} - \vec{r}\,'|$$

$$\left[\; t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c} \Rightarrow \nabla_r t_r = -\frac{1}{c}\nabla_r |\vec{r} - \vec{r}\,'| \;\right].$$

$$\vec{r} - \vec{r}\,' \equiv \vec{R} \quad , \qquad \nabla_R |\vec{R}| = \hat{e}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} .$$

$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$: $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_r}$: $$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\partial_t \vec{J}(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} .$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \left\{ \frac{\rho(\vec{r}\,', t_r)}{R^3}\vec{R} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}\,', t_r)}{c R^2}\vec{R} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,', t_r)}{c^2 R} \right\}$$

zeitabhängige Coulomb-Gesetz.

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \left\{ \frac{\nabla_r \times \vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \vec{J} \times \left(\nabla_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right\}$$

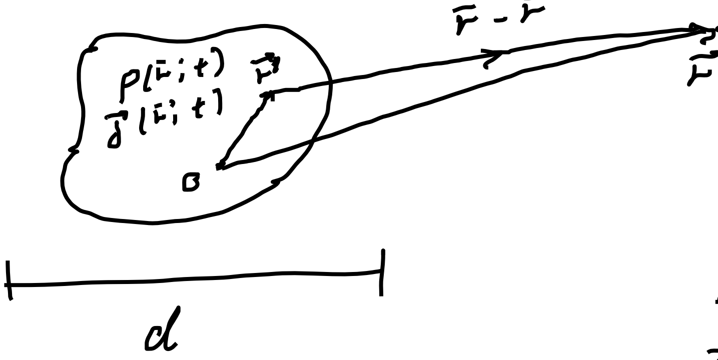
$$\left(\nabla \frac{1}{R} \right) = - \frac{1}{R^2} (\nabla R) = - \frac{1}{R^2} \hat{e}_R = - \frac{\vec{R}}{R^3} .$$

$$\nabla \times \vec{J} = \dot{\vec{J}} \times \left(\nabla \frac{R}{c} \right) = \frac{1}{c} \dot{\vec{J}} \times \frac{\vec{R}}{R} . \qquad t_r = t - \frac{R}{c}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{R^3} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c R^2} \right\} \times \vec{R} .$$

$(\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}')$, Zeitabhängige Biot-Savart-Gesetz.

Strahlung



$\vec E(\vec r,t)$ – ?
$\vec B(\vec r,t)$

$|\vec r| \gg |\vec r\,'|$.

$$\left.\begin{aligned}\rho(\vec r\,';t)&=\rho(\vec r\,')\,e^{-i\omega t}\\ \vec j(\vec r\,';t)&=\vec j(\vec r\,')\,e^{-i\omega t}\end{aligned}\right\}\ \text{harmonische Feldquellen}$$

Annahme: keine Monopolladungen;

$$\int_V \rho(\vec r)\,d^3r = 0.$$

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho(\vec r,t)}{\partial t} + \nabla\cdot\vec j(\vec r,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec j(\vec r) = i\omega\rho(\vec r)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\vec r\,' \frac{\rho(\vec r\,'; t_r)}{|\vec r - \vec r\,'|}.$$

$$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec r\,' \frac{\vec j(\vec r\,', t_r)}{|\vec r - \vec r\,'|}. \qquad t_r = t - \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}$$

z. B. $\quad \vec j(\vec r\,'; t_r) = \vec j\left(\vec r\,'; t - \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}\right) =$

$$= \vec j(\vec r\,')\, e^{-i\omega\left(t - \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}\right)} = \vec j(\vec r\,')\, e^{-i\omega t}\, e^{ik|\vec r - \vec r\,'|}$$

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \text{(Skalar)}$$

Analogerweise

$$\rho(\vec r\,'; t_r) = \rho(\vec r\,')\, e^{-i\omega t}\, e^{ik|\vec r - \vec r\,'|}.$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda - \text{Wellenlänge}$$