5 Scheinkräfte

Im Alltag kennen wir viele Phänomene, die sich durch Trägheitskräfte, Fliehkräfte und Corioliskräfte erklären lassen. Wir werden im Folgenden sehen, dass diese Kräfte Scheinkräfte sind, die in Inertialsystemen nicht auftreten, sondern nur in beschleunigten oder rotierenden Bezugssystemen.

Wir beschränken uns im Folgenden auf den nicht-relativistischen Fall. Insbesondere heißt das, dass die Zeit in den betrachteten Bezugssystemen die gleiche ist und die Massen ebenfalls,

$$t' = t \qquad\qquad m' = m \tag{5.1}$$

5.1 Transformationen zwischen Bezugssystemen

Wir betrachten ein Inertialsystem S, in dem ein Beobachter Bahnkurven $\vec{r}(t)$ durch Koordinaten in einem Bezugssystem mit zeitlich konstanten Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ messen kann.

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \sum r_i\vec{e}_i \tag{5.2}$$

Da die Einheitsvektoren zeitlich konstant sind, $\dot{\vec{e}}_i = 0$, gilt für die Zeitableitungen einfach

$$\vec{r} = \sum r_i\,\vec{e}_i \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum \dot{r}_i\,\vec{e}_i \qquad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \sum \dot{v}_i\,\vec{e}_i \tag{5.3}$$

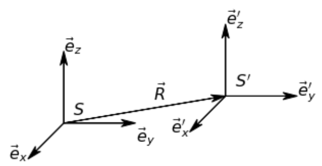

Abb. 5.1 Zur Koordinatentransformation.

Was passiert nun, wenn in einem anderen Bezugssystem S' ein Beobachter die gleiche Teilchenbewegung misst? Wir definieren nun die Messung in jedem beliebigen Koordinatensystem so, dass die Form der Geichungen 5.3 unverändert sein sollen, also

$$\vec{r}' = \sum r'_i\,\vec{e}'_i \qquad \vec{v}' = \dot{\vec{r}}' = \sum \dot{r}'_i\,\vec{e}'_i \qquad \vec{a}' = \dot{\vec{v}}' = \sum \dot{v}'_i\,\vec{e}'_i \tag{5.4}$$

Der Beobachter S' nimmt also an, dass seine Einheitsvektoren zeitlich konstant sind.

5.2 Galilei-Transformationen

Wir haben in Abschnitt 4.1.1 Inertialsysteme so definiert, dass in ihnen Newton's Axiome gelten und dass sie sich gleichförmig geradlinig zueinander bewegen.

Nehmen wir allgemein an, dass die Relativgeschwindigkeit zwischen den Inertialsystemen $\vec{V}$ ist. Dann kann man das Koordinatensystem in S' immer so wählen, dass die Axen parallel zueinander sind und die Ursprünge der Koordinatensysteme zur Zeit $t = t' = 0$ an der gleichen Stelle sind. Dann gilt für die Bahnkurve $\vec{r}$ in System S und die Bahnkurve $\vec{r}'$ in System S'

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}\,t \tag{5.5}$$

Für die daraus folgenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gilt

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \qquad\qquad \vec{a}' = \vec{a} \tag{5.6}$$

Für $m' = m$ folgt

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m'\,\vec{a}' = \vec{F}' \tag{5.7}$$

Es gelten also in beiden Systemen Newtons's Axiome. Inertialsysteme sind also durch Galilei-Transformationen der Form Gl. 5.5 verbunden.

5.3 Geradlinig beschleunigte Bezugssysteme

In einem Fahrstuhl, der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, gilt $\vec{F} = m\vec{g}$. Eine Feder, an der eine Masse m hängt, befindet sich dann in Ruhelage. Wird der Fahrstuhl nun nach oben beschleunigt, so beobachtet man, dass sich die Feder verlängert. Fällt der Fahrstuhl ungebremst nach unten, so wird die Feder so kurz, als ob keine Masse daran hängen würde.

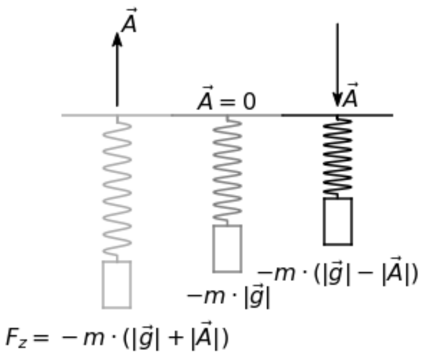

Abb. 5.2 Zur Feder in einem beschleunigten Fahrstuhl.

Wird allgemein ein System S' relativ zum System S beschleunigt mit der Beschleunigung $\vec{A}$ = konstant (gemessen in S),

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}\,t - \frac{1}{2}\vec{A}\,t^2 \tag{5.8}$$

dann ist

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} - \vec{A}\,t \qquad\qquad \vec{a}' = \vec{a} - A \tag{5.9}$$

und

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a} - m\,\vec{A} = \vec{F} - m\,\vec{A} \tag{5.10}$$

Ist S ein Inertialsystem, in dem Newton's Axiome gelten, dann ist S' das offenbar nicht, denn es tritt eine zusätzliche Kraft auf. Diese Trägheitskraft ist eine Scheinkraft, die in beschleunigten Systemen eingeführt werden muss, damit $\vec{F}' = m\vec{a}'$ gilt.

5.4 Rotierende Bezugssysteme

In einem rotierenden Bezugssystem S' sind die Einheitsvektoren $\vec{e}'_i$ nicht konstant, sondern rotieren mit der Zeit. Ihre zeitliche Änderung ist also (siehe Gl. 4.113)

$$\dot{\vec{e}}'_i = \vec{\omega} \times \vec{e}'_i \tag{5.11}$$

Gegeben sei eine Bahnkurve $\vec{r}(t)$ im Inertialsystem S. Die entsprechende Bahnkurve gemessen in einem rotierenden Koordinatensystem S' sei $\vec{r}'(t)$ mit

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) \tag{5.12}$$

Da die Einheitsvektoren in S' zeitabhängig sind, folgt für die Geschwindigkeiten in beiden Systemen

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{5.13}$$

Nochmaliges Ableiten nach der Zeit ergibt die Beschleunigungen

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \tag{5.14}$$

Im rotierenden System S' ist daher die beobachtete Kraft

$$\boxed{\vec{F}' = m\vec{a}' = \vec{F} \underbrace{-2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Coriolis-Kraft}} \underbrace{-m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}} \tag{5.15}$$

Die Coriolis-Kraft und die Zentrifugalkraft sind Scheinkräfte, die nur aufgrund der Rotation in S' gemessen werden.

Die Zentrifugalkraft hängt nur vom Ort $\vec{r}'$ ab, der im rotierenden System gemessen wird und steigt quadratisch mit der Winkelgeschwindigkeit. Sie hängt eng mit der Zentripetalkraft (Gl. 4.118) zusammen, ist aber nur in S' relevant.

Die Corioliskraft hängt von der Geschwindigkeit $\vec{v}'$ in S' ab, nicht aber vom Ort $\vec{r}'$.

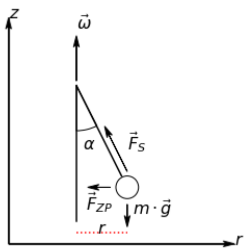

Abb. 5.3
Rotierendes Pendel mit Kräften im Inertialsystem.

Beispiel rotierendes Pendel: Wir betrachten ein Pendel, das in eine gleichmäßige Rotation mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ versetzt wird. Dabei wird es gleichzeitig um einen Winkel α ausgelenkt.

Inertialsystem S: Die Masse am Pendel bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius r. Damit sie auf dieser Bahn bleibt, muss die Summe aller Kräfte die Zentripetalkraft

$$F_{ZP} = m\omega^2 r \tag{5.16}$$

ergeben. Aus Gewichtskraft und Seilspannung $\vec{F}_S$ folgt

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_S \sin\alpha \\ F_S \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

und damit

$$\frac{F_S \sin\alpha}{F_S \cos\alpha} = \tan\alpha = \omega^2 \frac{r}{g} \tag{5.18}$$

Rotierendes System S': Man wählt ein Koordinatensystem, dass genau so schnell rotiert wie das Pendel. Die Masse ruht also in S',

$$\vec{v}' = 0 \qquad \vec{a}' = 0 \tag{5.19}$$

ı mit Kräf-
ten.

und es muss ein Kräftegleichgewicht herrschen,

$$\sum \vec{F}' = m\vec{a}' = 0 \tag{5.20}$$

Nach Gl. 5.15 ist

$$\vec{F}_{coriolis} = 0 \qquad \vec{F}_{zentrifugal} = -m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = m\omega^2 r \cdot \vec{e}_r \tag{5.21}$$

Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_S \sin\alpha \\ F_S \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\omega^2 r \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.22}$$

Dies ist wieder Gl. 5.17.

Beispiel Wirbelsturm Auf der Nordhalbkugel drehen sich Luftströmungen rechts herum, auf der Südhalbkugel der Erde aber links herum. Die Erklärung ergibt sich aus der Corioliskraft.

Für einen beliebigen Standort auf der Erde verwenden wir ein Polarkoordinatensystem $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$, das mit der Erde verbunden mitrotiert. Die Winkelgeschwindigkeit der Erde ist parallel zur Achse der Erde,

$$\vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{1d} \tag{5.23}$$

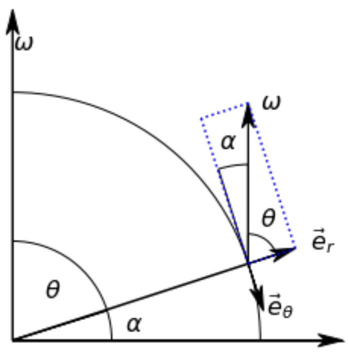

Abb. 5.5 Erde mit Polarkoordinaten und Breitengrad α.

Für einen Wind parallel zur Erde mit Geschwindigkeit $\vec{v}'$ zum Beispiel nach Norden ist die Corioliskraft auf jedes Gasatom der Masse m

$$\vec{F}_C' = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = -2m\omega \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} = 2\,m\,\omega\,v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

Für $\cos\theta > 0$ (Nordhalbkugel) zeigt die Kraft in $\vec{e}_\varphi$ Richtung, also nach Osten, für $\cos\theta < 0$ (Südhalbkugel) dagegen nach Westen.

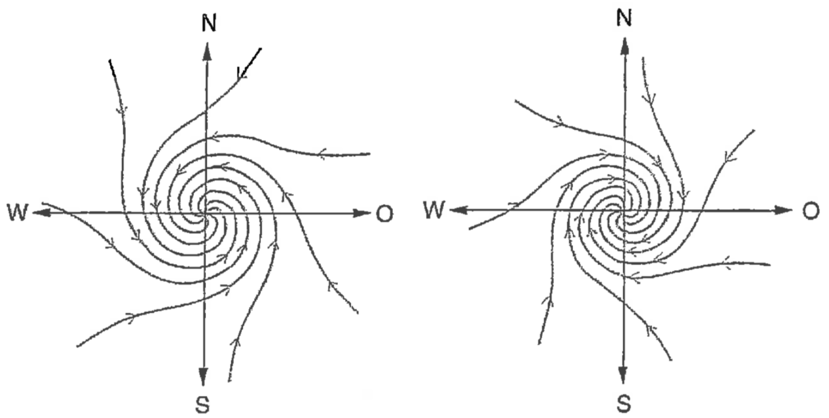

Abb. 5.6 Coriolis-Kraft auf der Nordhalbkugel (links) und Südhalbkugel (rechts).