4.8 Energie

4.8.1 Arbeit

Ein Zug, der auf Schienen einen Berg hinauffährt, muss Kraft entlang dieses Weges aufbringen, um die Schwerkraft zu überwinden. Die Schwerkraft ist hier ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$, dessen Richtung nach unten zeigt. Die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ ist durch die Schienen vorgegeben. Macht es einen Unterschied, welchen Weg die Schienen nehmen? Entscheidend ist offenbar der Steigungswinkel, d.h. der Winkel zwischen $\vec{F}(\vec{r}(t))$ und $\vec{r}(t)$ auf jedem kleinen Stück $d\vec{r}$ des Weges. Wir definieren die Arbeit entlang dieses Wegstücks $d\vec{r}$ daher als

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{4.65}$$

Arbeit: W
$[W] = \mathrm{J} = \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{Joule}$

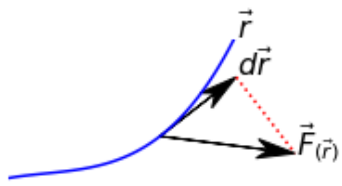

Abb. 4.11 zum Wegintegral.

Die gesamte Arbeit entlang eines bestimmten Weges zwischen zwei Orten $\vec{r}_A$ und $\vec{r}_B$ ist die Summe aller dW Werte entlang dieses Weges,

$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} dW = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r}} \tag{4.66}$$

Dies ist die Arbeit, die von der Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ entlang des Weges von $\vec{r}_A$ nach $\vec{r}_B$ verrichtet wird. Dreht man die Richtung des Weges um, so ändert sich für die Arbeit einfach nur das Vorzeichen. Zeigt zum Beispiel der Weg des Zuges nach unten, so ist der Winkel α zwischen $\vec{F}(\vec{r})$ und $\vec{r}$ kleiner als 90^0 und wegen

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha > 0 \tag{4.67}$$

die Arbeit positiv. Zeigt der Weg dagegen nach oben, so ist die von der Schwerkraft verrichtete Arbeit negativ.

Das Integral in Gl. 4.66 ist ein sogenanntes Linienintegral und wird komponentenweise berechnet, indem man den Weg parametrisiert z.B. als Funktion der Zeit, $r(t)$, und dann

$$d\vec{r} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\, dt = \vec{v}\, dt \tag{4.68}$$

benutzt.

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt \tag{4.69}$$

Im speziellen Fall eines geraden Weges in einem Kraftfeld mit konstanter Richtung kann man alternativ benutzen, dass

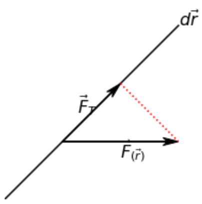

Abb. 4.12 Kraftkomponente F_T parallel zum Weg.

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha = F_T \cdot ds \tag{4.70}$$

Hier ist $F_T = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha$ gerade die Projektion von $\vec{F}$ auf die Richtung von $d\vec{r}$ und α = konstant entlang des ganzen Weges, so dass

$$W = \cos\alpha \cdot \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} |\vec{F}| \cdot ds \tag{4.71}$$

Beispiel freier Fall: Bei einem freien Fall aus der Höhe h auf geradem Weg nach unten, ist $\vec{F}$ immer parallel zum Weg $d\vec{r}$,

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix} \tag{4.72}$$

und

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F} \cdot d\vec{r} = -m \cdot g \cdot dz \tag{4.73}$$

Damit ist die Arbeit

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = -\int_h^0 m\, g\, dz = -m\, g\, (0 - h) \tag{4.74}$$

oder

$$\boxed{W = m\, g\, h} \tag{4.75}$$

Beispiel Fahrt um eine Kurve: Fährt ein Auto um eine Kurve, so muss über die Räder eine Kraft auf den Wagen wirken. Nehmen wir an, dass die Kraft zu jedem Zeitpunkt senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet ist (nach innen), so ist $F_T = 0$, oder

$$\vec{F}\, d\vec{r} = F\, ds\, \cos 90^0 = 0 \tag{4.76}$$

Es ist also zu jeder Zeit $dW = 0$ und damit wird keine Arbeit bei einer solchen Kurvenfahrt verrichtet.

Beispiel Feder, die sich zusammenzieht: Eine Feder sei um die Länge x_0 ausgelenkt. Die Rückstellkraft $F(x) = -kx$ verrichtet Arbeit an der angehängten Masse,

$$W = \int_{x_0}^{0} F(x)\, dx = -k \int_{x_0}^{0} x\, dx \tag{4.77}$$

oder

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\, k\, x^2} \tag{4.78}$$

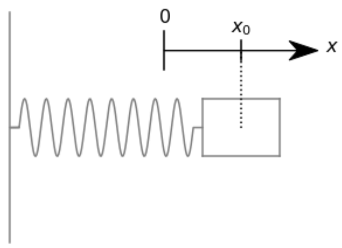

Abb. 4.13 Auslenkung einer Feder um die Strecke x_0.

Beispiel Feder, die langsam auseinander gezogen wird: Wird die Feder so langsam auseinander gezogen, dass man die Beschleunigung der angehängten Masse vernachlässigen kann, so ist

$$F_a = -F_{Feder} = +k\, x \tag{4.79}$$

Die Arbeit, die man verrichtet bis zu einer Auslenkung x_0, ist daher

$$W = \int_0^{x_0} F_a\, dx = \frac{1}{2}\, k\, x^2 \tag{4.80}$$

Beispiel Konstante Kraft: Gilt $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F} =$ konstant, so kann man $\vec{F}$ aus dem Integral herausziehen, so dass

$$W = \int_{\vec{x}_A}^{\vec{x}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = \vec{F}\,(\vec{x}_B - \vec{x}_A) \tag{4.81}$$

Offenbar hängt die Arbeit hier nur vom Abstand von $\vec{x}_A$ und $\vec{x}_B$ ab, aber nicht von dem genauen Weg, den ein Körper nimmt. Dies ist tatsächlich oft viel allgemeiner gültig, nicht nur bei konstanter Kraft.

4.8.2 Konservative Kraftfelder

Wir definieren daher ganz allgemein:

Konservative Kraftfelder sind Kraftfelder, bei denen die Arbeit wegunabhängig ist und damit nur von Anfang- und Endpunkt des Weges abhängt.

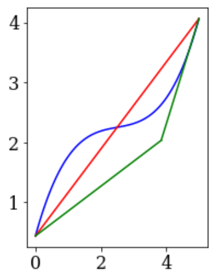

Abb. 4.14 Beispiele für verschiedene Wege im Fall einer konservativen Kraft.

Beispiele für konservative Kraftfelder:

- $\vec{F} =$ konstant
- $\vec{F} = \vec{F}(r)$ Zentralkraftfeld. Die Kraft zeigt überall auf das gleiche Zentrum und ihr Betrag hängt nur vom Abstand vom Zentrum ab. Beispiele sind die Gravitation und die elektrische Coulomb-Kraft.

Beispiele für nicht-konservative Kraftfelder:

- $\vec{F} = \vec{F}(\vec{v})$ Die Kraft hängt von der Geschwindigkeit ab, z.B. Reibung
- $\vec{F} = \vec{F}(t)$, zeitabhängige Kräfte

Für konservative Käfte gilt insbesondere, dass die Arbeit entlang eines geschlossenen Weges $= 0$ ist,

$$\boxed{W = \oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0} \tag{4.82}$$

Dies gilt, da man jeden geschlossenen Weg in zwei Teilwege $\vec{r}_A \to \vec{r}_B$ sowie $\vec{r}_B \to \vec{r}_A$ aufteilen kann. In der Berechnung des Integrals für W ist dies einfach eine Vertauschung der Grenzen des Integrals, so dass die Arbeit für beide Wege sich in der Summe gerade aufheben.

4.9 Potentielle Energie und Potential

Das Potential eines Kraftfeldes ist nur für konservative Kräfte definiert. In diesem Fall ist die Arbeit unabhängig vom zurückgelegten

Weg, so dass man sie ausdrücken kann als Funktion nur des Endpunktes und Anfangspunktes einer Bahnkurve,

$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = E_{pot}(\vec{r}_A) - E_{pot}(\vec{r}_B)} \tag{4.83}$$

Tatsächlich sind durch diese Formel nur Differenzen von potentiellen Energien definiert. Man kann also zu $E_{pot}(\vec{r}_A)$ und $E_{pot}(\vec{r}_B)$ eine Konstante addieren, ohne dass sich etwas an der Gleichung ändert. Anders formuliert ist der Nullpunkt der potentiellen Energie frei wählbar.

Achtung:
Reihenfolge beachten!

Beispiel Freier Fall: Wie oben gezeigt ist bei freiem Fall aus der Höhe h die Arbeit, die das Gravitationsfeld an einer Masse m verrichtet, $W = mgh$. Damit ist

$$E_{pot}(h) - E_{pot}(0) = W = mgh \tag{4.84}$$

Definiert man den Nullpunkt der potentiellen Energie durch

$$\text{Wähle:} \quad E_{pot}(0) = 0 \tag{4.85}$$

so ist die potentielle Energie als Funktion der Höhe

$$E_{pot}(h) = mgh \tag{4.86}$$

Beispiel Feder: Wegen $F = -kx$ ist die potentielle Energie relativ zur Ruhelage

$$E_{pot}(x) - E_{pot}(0) = -\int_x^0 k\, x\, dx = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.87}$$

Mit der Konvention, dass die potentielle Energie bei $x = 0$ gleich Null ist, folgt

$$\boxed{E_{pot}(x) = \frac{1}{2}kx^2} \tag{4.88}$$

Beispiel Gravitation: Die Gravitationskraft auf eine Masse m_1 durch eine Masse m_2 ist eine Zentralkraft,

$$\vec{F} = -G\frac{m_1\, m_2}{r_{12}^2}\,\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \tag{4.89}$$

Nähert sich die Masse aus unendlicher Entfernung bis auf einen Abstand r der Masse M, so ist der Weg immer parallel zur Richtung von $\vec{F}$. Dann gilt

$$E_{pot}(r = \infty) - E_{pot}(r) = -\int_\infty^r G\frac{m_1\, m_2}{r^2}\, dr = G\frac{m_1\, m_2}{r} \tag{4.90}$$

Definiert man den Nullpunkt der potentiellen Energie jetzt durch

$$\text{Wähle:} \quad E_{pot}(r = \infty) = 0 \tag{4.91}$$

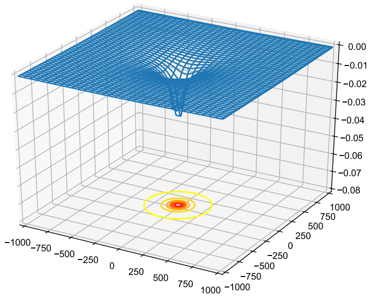

Abb. 4.15 Gravitationspotential.

so folgt

$$\boxed{E_{pot}(r) = -G\,\frac{M\,m}{r}} \tag{4.92}$$

Als Gravitationspotential $V(r)$ der Masse M wird hingegen

$$\boxed{V(r) = -G\,\frac{M}{r}} \tag{4.93}$$

bezeichnet. Dieses Potential ist also unabhängig von der Masse m, auf die die Gravitation von M wirkt.

4.9.1 Berechnung der Kraft aus der potentiellen Energie

Wir haben bereits gesehen, dass Differenzen der potentiellen Energien der Arbeit durch ein Kraftfeld entsprechen. Im 1-dimensionalen Fall ist

$$E_{pot}(\vec{r}_B) - E_{pot}(\vec{r}_A) = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} F_x\,dx \tag{4.94}$$

Für infinitesimal kurze Wege dx ist auch die Differenz der potentiellen Energien infinitesimal klein,

$$dE_{pot} = -F_x\,dx \tag{4.95}$$

und daher kann die Kraft aus der potentiellen Energie berechnet werden durch

$$\boxed{F_x(x) = -\frac{\mathrm{d}E_{pot}}{\mathrm{d}x}} \tag{4.96}$$

Im 3-dimensionalen muss dies auch für die anderen Komponenten der Kraft gelten und die potentielle Energie kann von allen Komponenten von $\vec{r}$ abhängen, $E_{pot}(\vec{r})$, so dass

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla E_{pot} := -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}E_{pot} \\ \frac{\partial}{\partial y}E_{pot} \\ \frac{\partial}{\partial z}E_{pot} \end{pmatrix}} \tag{4.97}$$

Die Kraft zeigt damit in Richtung der stärksten Änderung des Potentials.

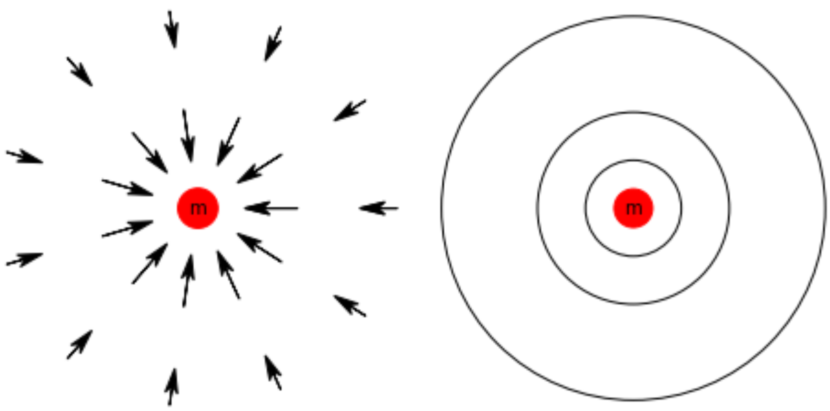

Abb. 4.16 Beispiel einer Zentralkraft (links) und Äquipotentialflächen dazu (rechts).

Beispiel Gravitation Verwendet man

$$\nabla \frac{1}{r} = \nabla (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\frac{\vec{e}_r}{r^2} \tag{4.98}$$

so erhält man für die Gravitation aus der potentiellen Energie in Gl. 4.92 wieder die Gravitationskraft aus Gl. 4.14.

4.9.2 Kinetische Energie

Da die tangentiale Komponente F_T der Kraft entlang des Weges $d\vec{r}$ die Geschwindigkeit ändert, gilt

$$F_T = m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{4.99}$$

Daher folgt auch

$$\vec{F}\, d\vec{r} = F_T\, ds = m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} ds = m \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} dv = m\, v\, dv \tag{4.100}$$

Damit ist die Arbeit auch

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{v_A}^{v_B} m\, v\, dv = \frac{1}{2} m\, (v_B^2 - v_A^2) \tag{4.101}$$

Wir definieren daher die kinetische Energie als

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{\vec{p}^2}{2\, m}} \tag{4.102}$$

Die Arbeit, die ein Kraftfeld an einer Masse verrichtet, erzeugt also zusätzliche kinetische Energie

Kinetische Energie E_{kin}
$[E_{kin}] = J = \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2}$

$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = E_{kin}(\vec{r}_B) - E_{kin}(\vec{r}_A)} \tag{4.103}$$

4.9.3 Energieerhaltung der klassischen Mechanik

Wir haben nun

$$\begin{aligned} W &= E_{kin}(\vec{r}_B) - E_{kin}(\vec{r}_A) \\ W &= E_{pot}(\vec{r}_A) - E_{pot}(\vec{r}_B) \end{aligned} \tag{4.104}$$

und damit auch

$$\boxed{E := E_{kin}(\vec{r}_A) + E_{pot}(\vec{r}_A) = E_{kin}(\vec{r}_B) + E_{pot}(\vec{r}_B)} \tag{4.105}$$

In einem konservativen Kraftfeld ist also die Gesamtenergie E aus kinetischer und potentieller Energie entlang eines Weges erhalten.

Beispiel Feder: Eine Feder wird um die Strecke x_A ausgelenkt und mit $v_A = 0$ losgelassen. Wie groß ist die kinetische Energie und die Geschwindigkeit maximal?
Lösung Nach Gl. 4.105

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_A^2}_{E_{kin,A}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx_A^2}_{E_{pot,A}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_B^2}_{E_{kin,B}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx_B^2}_{E_{pot,B}} \tag{4.106}$$

gilt bei $x_B = 0$, dass $E_{pot,B} = 0$, so dass

$$E_{kin,B} = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}kx_A^2 \tag{4.107}$$

oder $v_B^2 = \omega^2 x_B^2$.

Berechnung der Bahnkurve bei bekannter potentieller Energie: Für eine 1-dimensionale Bewegung gilt

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_{pot}(x) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + E_{pot}(x) \tag{4.108}$$

so dass

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_{pot}(x))}}dx = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0 \tag{4.109}$$

Da E konstant ist, kann man dies integrieren und erhält so die Bahnkurve $x(t)$.

4.10 Drehbewegungen

Drehbewegungen spielen eine große Rolle bei so unterschiedlichen Prozessen wie Planetenbewegungen oder in Motoren. In vielen Fällen handelt es sich um eine Bewegung im Kreis mit konstantem Betrag der Geschwindigkeit.

Bewegt man eine Masse an einer Feder im Kreis, so wird die Feder ausgelenkt, je schneller die Kreisbewegung erfolgt und je größer die Masse ist. Es wirkt also offenbar eine Kraft, um die Masse auf der Kreisbahn zu halten.

Die Bahnkurve einer Kreisbahn mit Radius R um den Ursprung des Koordinatensystems in der $x-y$-Ebene ist

$$\vec{r}(t) = |\vec{r}| \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } |\vec{r}| = \text{ konstant} \tag{4.110}$$

φ im Bogenmaß
Winkelgeschwindigkeit ω

Der Winkel $\varphi(t)$ wird relativ zur x-Achse gemessen. Diese ist so orientiert, dass $\varphi(t = 0) = 0$ ist. Die Bahngeschwindigkeit ist damit

$$\vec{v}(t) = \dot{\varphi}(t) \cdot |\vec{r}| \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix} \tag{4.111}$$

Wir definieren nun die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ als einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene der Kreisbewegung steht (parallel zur Drehachse) und dessen Betrag gerade die Rate ist, mit der sich der Winkel φ zeitlich ändert,

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) \tag{4.112}$$

Die Richtung kann nach der Rechten-Hand-Regel aus dem Drehsinn der Bewegung bestimmt werden. Damit ist (siehe Gl. 4.111)

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \tag{4.113}$$

Ist der Ursprung des Koordinatensystems im Zentrum der Kreisbewegung, so sind $\vec{r}$ und $\vec{\omega}$ senkrecht zueinander, so dass einfach

$$v = \omega \cdot |\vec{r}| \tag{4.114}$$

Die entsprechende Beschleunigung ist

$$\vec{a}(t) = \ddot{\varphi}\, |\vec{r}| \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}^2\, |\vec{r}| \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ -\sin\varphi(t) \end{pmatrix} \tag{4.115}$$

oder

$$\vec{a} = \dot{\omega}\, |\vec{r}|\, \vec{e}_v - \omega^2 \cdot \vec{r} \tag{4.116}$$

Der erste Term ist parallel zu $\vec{v}$ und erhöht die Winkelgeschwindigkeit. Der zweite Term zeigt immer von der Bahnkurve zum Zentrum der Bahn. Der Betrag dieses Teils der Beschleunigung ist

$$a = \omega^2 \cdot |\vec{r}| \tag{4.117}$$

Um also einen Körper auf einer Kreisbahn zu halten, ist eine nach innen gerichtete Kraft

Zentripetalkraft einer Kreisbahn

$$\boxed{F = m \cdot \omega^2 \cdot |\vec{r}|} \tag{4.118}$$

notwendig, die Zentripetalkraft genannt wird. Auch die kinetische Energie der Masse auf der Kreisbahn, die Rotationsenergie, hängt von der Winkelgeschwindigkeit ab,

$$E_{rot} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{r}^2 \tag{4.119}$$

Mit dem Trägheitsmoment I lässt sich dies schreiben als

Trägheitsmoment I
Rotationsenergie E_{rot}

$$\boxed{E_{rot} = \frac{1}{2} I\, \omega^2 \qquad \text{mit} \qquad I = m\, r^2} \tag{4.120}$$

Auch hier ist $|\vec{r}|$ der Abstand zur Drehachse.

4.11 Drehimpuls und Drehmoment

Drehimpuls $\vec{L}$
$[\vec{L}] = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$

Wir definieren allgemein den Drehimpuls eines Massenpunktes relativ zum Ursprung des Koordinatensystems,

$$\boxed{\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}} \tag{4.121}$$

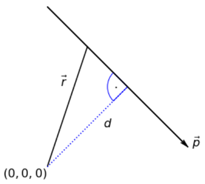

Abb. 4.17
Stoßparameter d

Hier ist $\vec{r}$ wie immer der Abstand des Massenpunkts vom Koordinatenursprung. Der Drehimpuls $\vec{L}$ hängt damit - anders als Impuls oder Energie - von der Wahl des Koordinatenursprungs ab[5]. Wegen des Kreuzprodukts steht $\vec{L}$ senkrecht auf der Ebene, die von $\vec{r}$ und $\vec{p}$ aufgespannt wird. Für eine geradlinig gleichförmige Bewegung ist der Drehimpuls gerade das Produkt von Impuls p und Stoßparameter d, wobei der Stoßparameter der minimale Abstand der Bahnkurve vom Ursprung ist.

Beispiel Kreisbewegung: Wählt man den Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte der Kreisbahn, so ist

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = m\,r\,v = m\,r^2\,\omega \tag{4.123}$$

Trägheitsmoment I
$[I] = \mathrm{kgm}^2$

Man bezeichnet nun allgemein als Trägheitsmoment

$$\boxed{I = m\,r^2} \tag{4.124}$$

so dass

$$\boxed{\vec{L} = I\,\vec{\omega}} \tag{4.125}$$

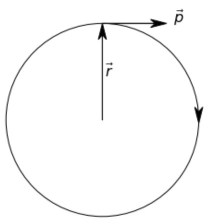

Abb. 4.18
Kreisbewegung mit Radius $\vec{r}$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$.

Drehmoment: Die zeitliche Änderung des Drehimpulses muss mit Kräften zusammenhängen. Es ist (bei m = konstant)

$$\dot{\vec{L}} = m\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = m\vec{v} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \dot{\vec{v}} \tag{4.126}$$

Wir definieren daher das Drehmoment, bezüglich des Koordinatenursprungs als

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}} \tag{4.127}$$

Drehmoment $\vec{M}$
$[\vec{M}] = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$

so dass

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}} \tag{4.128}$$

Eine äußeres Drehmoment erzeugt daher eine Änderung des Drehimpulses.

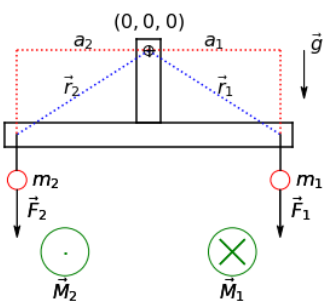

Abb. 4.19
Drehmomente bei einer Waage.

Beispiel Waage: Bei einer Waage mit zwei Gewichten m_1, m_2 wie in Abb. 4.19 sind die beiden dazugehörigen Drehmomente

[5] Bezüglich eines anderen Punktes $\vec{x}_0$ wäre

$$\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p} \tag{4.122}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad &\Rightarrow \quad M_1 = a_1 \cdot F_1 \\ \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \quad &\Rightarrow \quad M_2 = a_2 \cdot F_2 \end{aligned} \tag{4.129}$$

Ist die Waage für einen Moment im Gleichgewicht und bleibt sie so, dann gilt das Hebelgesetz

$$\dot{\vec{L}} = 0 = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \tag{4.130}$$

oder

$$\boxed{a_1 \cdot m_1 = a_2 \cdot m_2} \tag{4.131}$$

Allgemein definieren wir daher das Gleichgewicht eines Systems als

$$\boxed{\text{Gleichgewicht:} \qquad \sum \vec{F} = 0 \quad \text{und} \quad \sum \vec{M} = 0} \tag{4.132}$$

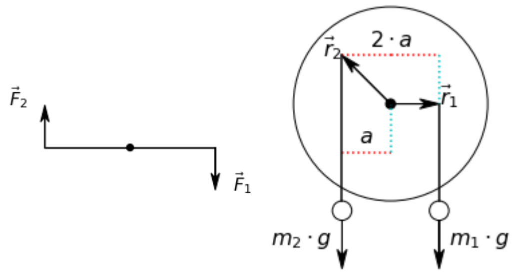

Abb. 4.20 Links: Beispiel für ein Kräftegleichgewicht, aber kein Drehmomentgleichgewicht. Rechts: Drehscheibe mit Gewichten und Drehmomenten.

Drehimpulserhaltung: Es gibt verschiedene Situationen, in denen der Drehimpuls eines Systems erhalten ist.

- Ohne äußere Drehmomente folgt sofort, dass der Drehimpuls erhalten ist,

$$\vec{M} = 0 = \dot{\vec{L}} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{konstant} \tag{4.133}$$

- Bei einer Zentralkraft wie der Gravitation kann man den Ursprung des Koordinatensystems in das Zentrum legen. Dann gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \cdot \vec{e}_R \tag{4.134}$$

  Dann ist aber offenbar das Drehmoment bezüglich des Zentrums durch die Zentralkraft gerade Null,

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = F \cdot \vec{r} \times \vec{e}_R = 0 \tag{4.135}$$

  Damit ist also, obwohl eine Zentralkraft wirkt, der Drehimpuls bezüglich des Zentrums erhalten,

$$\boxed{\vec{L} = \text{konstant bezüglich Zentrum einer Zentralkraft}} \tag{4.136}$$