

so beobachtet man eine Schwingung der Masse an der Feder. Die Bewegungsgleichung (siehe Gl 4.23)

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \tag{4.34}$$

muss demnach als Lösung eine Schwingung $x(t)$ haben.

Beispiel Pendel: Eine Masse m hängt an einem Faden der Länge l . Dieses Pendel wird relativ zu seiner Ruhelage um einen Winkel φ ausgelenkt. Da der Faden des Pendels seine Länge praktisch gar nicht ändern kann, erzeugt nur die Komponente der Gewichtskraft senkrecht zum Faden eine wirksame Beschleunigung. Diese Tangentialkomponente ist

$$F_T = -F_G \sin \varphi = -m g \sin \varphi \tag{4.35}$$

und zeigt entgegen der Auslenkungsrichtung φ . Die Strecke x entlang der Bahn der Masse hängt vom Winkel φ ab, die Tangentialbeschleunigung daher von der zweiten Ableitung von φ ,

$$x_T = l \varphi \quad \Rightarrow \quad a_T = \ddot{x}_T = l \ddot{\varphi} \tag{4.36}$$

Damit folgt die Bewegungsgleichung aus

$$F_T = m a_T \quad \Rightarrow \quad -m g \sin \varphi = m l \ddot{\varphi} \tag{4.37}$$

Merken:
 Winkel in Radian =
 Winkel in Grad $\cdot \frac{\pi}{180} \approx \frac{1}{57}$

Bewegungsgleichung des Pendels und damit

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \tag{4.38}$$

Für kleine Auslenkungen kann man nun eine Näherung² durchführen,

$$\sin \varphi \approx \varphi \quad \text{für } \varphi \text{ im Bogenmaß} \tag{4.40}$$

Damit gilt also näherungsweise

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \tag{4.41}$$

Gleichgewichte:

- Stabiles Gleichgewicht: Den beiden Beispielen der Feder und des Pendels ist gemeinsam, dass sie zu einem stabilen Gleichgewicht zurückkehren können, denn es wirkt eine Kraft, die gegen eine Auslenkung aus der Ruhelage gerichtet ist. Im Gleichgewicht (Auslenkung $y = 0$) selber heben sich alle Kräfte auf.

²Zum Beispiel ist für einen Winkel von

$$\begin{aligned} \text{Winkel} = 10^0 &\Rightarrow \varphi \approx 0,17453 \\ &\sin \varphi \approx 0,17365 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Für kleinere Winkel ist der relative Unterschied zwischen Winkel (im Bogenmaß) und Sinus des Winkels noch kleiner. Tatsächlich ist die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ der erste Term der Polynom-Entwicklung (Taylor-Entwicklung) des Sinus $\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} - \dots$

- Instabiles Gleichgewicht: Ein Ball kann zum Beispiel ganz oben auf einem Berg ruhen, er rollt aber bei jeder kleinen Auslenkung weiter von der ursprünglichen Ruhelage weg.
- Metastabiles Gleichgewicht: Ein Beispiel hierfür ist ein Ball auf einem ebenem Tisch. Wird der Ball versetzt, so treibt nichts ihn zurück, aber er kann dort liegen bleiben, wo er hingelegt wird.

Der allgemeine harmonische Oszillator: Nahe einer stabilen Gleichgewichtslage, also bei kleinen Auslenkungen, wird bei den meisten physikalischen Systemen die rückstellende Kraft näherungsweise linear von der Auslenkung abhängen. Wie bei der Feder in Gl. 4.23 und beim Pendel in Gl. 4.23 gesehen, ergibt sich aus Newton's Axiom dann eine Bewegungsgleichung für die Auslenkung $y(t)$ und ihrer Beschleunigung $\ddot{y}(t)$ in der Form

$$\boxed{\ddot{y} + \omega^2 y = 0} \quad (4.42)$$

Die sogenannte Kreisfrequenz ω ist eine Konstante, die für die beiden Beispiele

Kreisfrequenz ω
 $[\omega] = \frac{1}{s}$

$$\boxed{\text{Feder: } \omega_F = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Pendel: } \omega_P = \sqrt{\frac{g}{l}}} \quad (4.43)$$

lautet. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators ist

$$\boxed{y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t} \quad (4.44)$$

Dass dieser Ansatz tatsächlich eine Lösung der Bewegungsgleichung Gl. 4.42 ist, kann man durch Einsetzen beweisen. Dazu brauchen wir die zweite Ableitung,

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t \\ \ddot{y}(t) &= -\omega^2 A \sin \omega t - \omega^2 B \cos \omega t = -\omega^2 y(t) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Dieser Ausdruck, $\ddot{y} = -\omega^2 y$, erfüllt ganz offenbar Gleichung 4.42. Wir haben hiermit also eine Lösung gefunden. Auf den mathematischen Beweis, dass dies die allgemeinste Lösung ist, verzichten wir hier. Die gefundene Lösung lässt sich wie folgt interpretieren:

- Kreisfrequenz ω : Die sin- und cos- Funktionen beschreiben offenbar eine periodische Schwingung als Funktion der Zeit. Die beobachtbare Schwingung wiederholt sich jeweils nach einer Zeitdauer T ,

$$y(t + T) = y(t) \quad (4.46)$$

Andererseits wiederholt sich z.B. die Sinusfunktion jeweils nach 2π (360° im Bogenmaß), also

$$\sin(\omega(t + T)) = \sin(\omega t + 2\pi) \quad (4.47)$$

und damit $\omega T = 2\pi$ oder

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \tag{4.48}$$

Die Konstante ω zeigt daher an, in Vielfachen von 2π , wie häufig pro Sekunde sich die Schwingung wiederholt. Sie wird daher Kreisfrequenz genannt.

- Amplituden A und B : Da die Funktionen \sin und \cos immer zwischen $+1$ und -1 liegen, beschreiben A und B offenbar die maximalen Auslenkungen, die Amplituden. Man kann sie in der Regel einfach aus den Anfangsbedingungen bestimmen. Hat man z.B. die Auslenkung $y(0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v(0)$ zur Zeit $t = 0$ gegeben, so folgt aus den Eigenschaften von \sin und \cos sofort

$$B = y(0) \qquad \omega A = v(0) \tag{4.49}$$

Die beiden Unbekannten A, B der allgemeinen Lösung folgen also aus den beiden Anfangsbedingungen.

Manchmal ist es anschaulicher, die Lösung etwas umzuformulieren.

$$\boxed{y(t) = C \sin(\omega t + \varphi_0)} \tag{4.50}$$

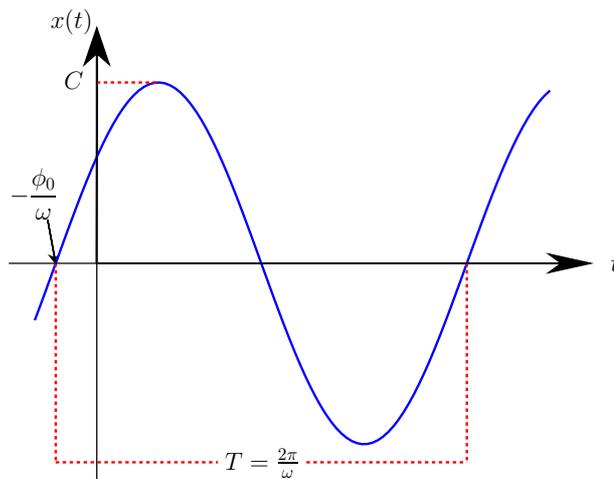


Abb. 4.8 Allgemeine Lösung des harmonischen Oszillators

Dies ist identisch zur Lösung in Gl. 4.44 denn³

$$\begin{aligned} y(t) &= C \sin(\omega t + \varphi_0) \\ &= C (\sin \omega t \cos \varphi_0 + \cos \omega t \sin \varphi_0) \\ &= \underbrace{C \cos \varphi_0}_{A} \sin \omega t + \underbrace{C \sin \varphi_0}_{B} \cos \omega t \end{aligned}$$

also

$$\boxed{y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t} \tag{4.51}$$

³Additionstheorem für \sin und \cos : $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

Offenbar ist C die maximale Amplitude und die Konstante φ_0 verschiebt die Funktion $y(t)$ entlang der Zeitachse, sie gibt also den Anfangszustand zur Zeit $t = 0$ der Schwingung wieder. Die Werte für C und φ_0 erhält man aus

$$C = \pm \sqrt{A^2 + B^2} \quad \tan \varphi_0 = \frac{B}{A} \quad (4.52)$$

Aufgabe 4.3: Warum sind die Werte von C und φ_0 nicht eindeutig?

4.7 Probleme mit variablen Massen

Wenn man auf einer Waage steht, so zeigt sie die Gewichtskraft des Körpers an. Wenn man dann hochspringt und mit Geschwindigkeit wieder auf der Waage landet, so zeigt sie kurzzeitig eine viel höhere Kraft an als nur die Gewichtskraft.

Dieser *Kraftstoß* lässt sich durch Newton's Axiom verstehen, denn aus

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

folgt

$$d\vec{p} = \vec{F} dt \quad (4.53)$$

Integriert man über die Zeit eines Kraftstoßes, erhält man

$$\vec{p}(t) - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F} dt \quad (4.54)$$

Die Impulsänderung zwischen Anfang und Ende entsteht durch den Kraftstoß auf den Körper, andererseits entsteht wegen Actio=Reactio eine entsprechende Gegenkraft. Für das Beispiel des Sprungs auf eine Waage ist \vec{p}_0 der Impuls des Körpers unmittelbar vor der Landung auf der Waage und $\vec{p}(t) = 0$ ist der Impuls nach der Landung. Die Gegenkraft wird auf der Waage angezeigt.

Beispiel inelastischer Stoß: Eine Masse mit Impuls $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$ stößt auf eine zweite, ruhende Masse mit Impuls $\vec{p}_2 = 0$, und zwar so, dass beide Massen nach dem Stoß aneinander haften. Ihre gemeinsame Geschwindigkeit anschließend sei \vec{v}' . Offenbar ist die Masse 2 hier durch einen Kraftstoß beschleunigt worden. Da keine äußeren Kräfte wirken, kann man Impulserhaltung anwenden, um die neue Geschwindigkeit \vec{v}' zu berechnen.

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ (m_1 + m_2) \vec{v}' &= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Offenbar muss man gar nicht wissen, wie genau der Kraftstoß zwischen den beiden Massen abgelaufen ist, solange man nur an dem Endergebnis \vec{v}' interessiert ist.

Beispiel Sand rieselt auf eine Waage: Die Auftreffgeschwindigkeit auf die Waage sei $v_0 = 2 \frac{m}{s}$. Bei konstanter Rate von

$$\frac{dm}{dt} = 10 \frac{g}{s}$$

ist die Impulsänderung $d\vec{p}$ von einer kleinen Sandmenge dm auf der Waage

$$dp = dm (v_E - v_0) = -dm v_0$$

Daher wirkt die Kraft

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt} v_0 = 10 \frac{g}{s} \cdot 2 \frac{m}{s} = 20 \frac{gm}{s^2}$$

auf den Sand. Die Waage zeigt daher zunächst ein Gewicht von

$$M = \frac{F}{g} = \frac{20 \frac{kgm}{s^2}}{9,81 \frac{m}{s^2}} = 2,04 g$$

an. Im Laufe der Zeit steigt natürlich die Sandmenge, die bereits auf der Waage liegt. Dieses Gewicht kommt natürlich noch hinzu.

Gleichung einer Rakete Bei einer Rakete wird durch die Verbrennung von Treibstoff sehr viel Gas erzeugt, das mit hoher Geschwindigkeit nach hinten ausgestoßen wird. Wegen Impulserhaltung erzeugt dies einen Rückstoß auf die Rakete. Bei Raketen ist der Treibstoffverlust und damit die Massenänderung so groß, dass man diesen Effekt nicht mehr vernachlässigen kann (siehe Gl. 4.6).

Sei zu jedem Zeitpunkt t während des Starts der Rakete

- $m(t)$ die Masse von Rakete + restlichem Treibstoff
- $\vec{v}(t)$ die Geschwindigkeit der Rakete relativ zu einem Inertialsystem
- \vec{v}_G die Geschwindigkeit des ausgestoßenen Gases relativ zur Rakete und $\vec{v}'(t) = \vec{v}_G + \vec{v}(t)$ die Gasgeschwindigkeit relativ zum Inertialsystem
- dm_G die Masse des Gases, die in einem kurzen Zeitintervall dt ausgestoßen wird. Die Änderung für die Rakete ist dann $dm = -dm_G$.

Damit ist der Impuls von Rakete + Treibstoff zur Zeit t

$$\vec{p}(t) = m(t) \cdot \vec{v}(t)$$

Zur Zeit $t + dt$ ist der Gesamtimpuls aus Rakete und Gas

$$\vec{p}(t + dt) = \underbrace{(m + dm) \cdot (\vec{v} + d\vec{v})}_{\text{Rakete}} + \underbrace{dm_G \cdot \vec{v}'}_{\text{Gas}}$$

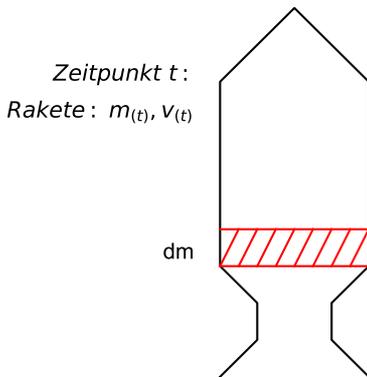


Abb. 4.9
Rakete zum Zeitpunkt t .

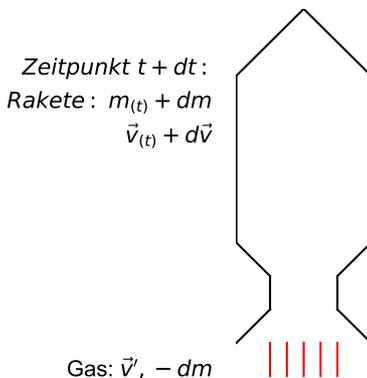


Abb. 4.10
Rakete zum Zeitpunkt $t + dt$.

Die Änderung des Gesamtimpulses zwischen t und $t + dt$ ist ⁴

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = m d\vec{v} - dm \cdot (\vec{v}' - \vec{v}) + dm \cdot d\vec{v} \\ &\approx m d\vec{v} - dm \cdot \vec{v}_G \end{aligned} \quad (4.57)$$

Im letzten Schritt haben wir das Produkt $dm \cdot d\vec{v}$ vernachlässigt, da es für kleine dt viel kleiner wird als die anderen Terme. Ohne äußere Kräfte gilt Impulserhaltung, so dass $d\vec{p} = 0$ ist. Eine äußere Kraft wie die Gravitation der Erde ändert aber den Gesamtimpuls,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v}_G \quad (4.58)$$

Bei senkrechtem Flug (z -Richtung nach oben) ist $F_z = -mg$ (zumindest nahe der Erdoberfläche) und daher

$$\boxed{-m \cdot g = m \cdot \frac{dv}{dt} - \frac{dm}{dt} \cdot v_G} \quad (4.59)$$

Die Rakete wird also in $+z$ Richtung beschleunigt ($dv/dt > 0$), wenn die Schubkraft

$$|v_G| \cdot \left| \frac{dm}{dt} \right| > mg \quad (4.60)$$

ist. Die Bewegungsgleichung kann man lösen, indem man die Variablen separiert,

$$-g dt = dv - \frac{dm}{m} \cdot v_G \quad (4.61)$$

Bei konstanter Geschwindigkeit des Gases v_G kann diese Gleichung integriert werden,

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^t g dt &= \int_{v_0}^{v(t)} dv - \int_{m_0}^{m(t)} v_G \frac{1}{m} dm \\ -g(t - t_0) &= v(t) - v_0 - v_G \ln \frac{m(t)}{m_0} \end{aligned} \quad (4.62)$$

oder

$$v(t) = v_0 - g(t - t_0) + v_G \cdot \ln \frac{m(t)}{m_0} \quad (4.63)$$

Da hier $v_G < 0$ (entgegen \vec{v}) und $m_0 > m(t > t_0)$ schreibt man besser

$$\boxed{v(t) = v_0 - g(t - t_0) + |v_G| \cdot \ln \frac{m_0}{m(t)}} \quad (4.64)$$

Aufgabe 4.4: Berechnen Sie die Beschleunigung der Rakete durch Ableiten nach der Zeit. Zeigen Sie, dass Sie wieder die Bewegungsgleichung ^{4.59} erhalten.

⁴Alternativ kann man sich Gl. ^{4.57} auch in einem Inertialsystem überlegen, in dem die Rakete genau zum Zeitpunkt t in Ruhe ist und damit keine Geschwindigkeit und keinen Impuls hat. Nach kurzer Zeit dt hat die Rakete eine Gasmenge von dm_G mit Geschwindigkeit \vec{v}_G ausgestoßen und hat selber eine Geschwindigkeit $d\vec{v}$ erhalten. Die Änderung des Gesamtimpulses ist

$$d\vec{p} = m \cdot d\vec{v} + dm_G \cdot \vec{v}_G = m \cdot d\vec{v} - dm \cdot \vec{v}_G \quad (4.56)$$

Natürlich hat sich die Masse der Rakete in dem kleinen Zeitraum dt selber um die $dm = -dm_G$ geändert. Relativ zur Gesamtmasse der Rakete ist der Effekt aber vernachlässigbar, wenn der Zeitraum dt infinitesimal klein ist.

Bewegungsgleichung der Rakete