4 Dynamik des Massenpunktes

4.1 Newton's Axiome der Mechanik

Die Ursache von Änderungen der Bewegung sind Kräfte. Diese grundlegende Aussage ist die Basis der Axiome, die Isaac Newton aufgestellt hat.

Das Trägheitsprinzip: Wie am Beispiel der Luftkissenbahn experimentell gezeigt, bewegt sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit, wenn man alle äußeren Einflüsse auf den Körper ausschließen kann. Zu diesen Einflüssen gehören Luftwiderstand und alle anderen Reibungskräfte, Schwerkraft und alle anderen Kräfte. Die Geschwindigkeit ist ein Vektor mit Betrag und Richtung, die sich beide nicht ändern sollen. Daher gilt:

> Die Bewegung eines Körpers verläuft geradlinig gleichförmig, solange keine Kraft auf den Körper wirkt.

Anders ausgedrückt gilt

$$\boxed{\vec{v} = \text{konstant} \qquad \text{für} \quad \vec{F} = 0} \tag{4.1}$$

Hier steht $\vec{F}$ für die Summe aller Kräfte, die auf den Körper von außen einwirken.

Aktionsprinzip: Für eine Geschwindigkeitsänderung (=Beschleunigung) eines Massenpunktes ist also eine äußere Kraft notwendig. Die Kraft soll aber nur den äußeren Einfluss beschreiben, nicht den Körper selbst. Es ist nun aber so, dass es einfacher ist einen PkW anzuschieben als einen LKW. In der gleichen Zeit bei gleicher Kraft wird der PKW eine höhere Geschwindigkeit erreichen als der LKW. Wir definieren daher Kräfte so, dass sie eine Geschwindigkeitsänderung erzeugen, die umgekehrt proportional zu einer Eigenschaft des Körpers sein soll, die sogenannte *träge Masse* m des Körpers[1]. Wir definieren daher den Impuls eines Massenpunktes

Träge Masse: m
Einheit: $[m] = \mathrm{kg}$
Dimension: dim m = Masse

$$\boxed{\text{Impuls:} \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v}} \tag{4.2}$$

Impuls: $\vec{p}$
Einheit: $[\vec{p}] = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$

Die Masse ist kein Vektor, so dass die Richtung des Impulses einfach immer in die Richtung der Geschwindigkeit zeigt. Bei gleicher Geschwindigkeit hat ein Körper mit größerer Masse auch einen entspechend größeren Impuls. Die äußere Kraft $\vec{F}$ soll diesen Impuls mit der Zeit ändern.

> Die Änderung des Impulses eines Teilchens ist der Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft.

oder als Gleichung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} =: \vec{F}} \tag{4.3}$$

Kraft: $\vec{F}$
Einheit: $[\vec{F}] = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$

Die Kraft ist also die Ursache, die Impulsänderung ist die Folge.

Impulserhaltung

Offenbar bedeutet diese Gleichung auch, dass sich ohne äußere Kräfte der Impuls eines Teilchens gar nicht ändert. Der Impuls ist in diesem Fall also eine Erhaltungsgröße

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{für } \vec{F} = 0} \tag{4.4}$$

In den meisten Fällen wird sich die Masse nicht ändern, so dass

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\ \vec{a} = \vec{F} \tag{4.5}$$

$\vec{F} = m\,\vec{a}$

Diese Gleichung gilt aber nicht allgemein. Ändert sich in dem Zeitintervall, in dem die Kraft wirkt, auch die Masse des Körpers (also $m = m(t)$), so gilt (Produktregel)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\vec{v} + m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}} \tag{4.6}$$

So ist zum Beispiel bei einer Rakete der Gewichtsverlust durch das Ausstoßen des Treibstoffs so groß, dass die Massenänderung berücksichtigt werden muss.

Es ist wichtig zu verstehen, dass der Gleichung $\vec{F} = m\vec{a}$ die Annahme zugrunde liegt, dass die Geschwindigkeitsänderung unabhängig davon ist, wie schnell der Körper bereits ist. Ein Körper könnte also beliebig schnell werden, solange eine Kraft nur lange genug wirkt. Wir werden bei der Speziellen Relativitätstheorie sehen, dass das nahe der Lichtgeschwindigkeit nicht mehr gilt.

[1] Die Einheit Kilogramm wurde historisch durch einen Standardkörper festgelegt, seit kurzem jedoch durch Experimente, die die Relation des kg zum Planckschen Wirkungsquantum oder der Avogadrokonstante festlegen, siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Kilogramm`.

Actio = Reactio: Wenn zwei Wagen mit einer Feder verbunden sind, so wirkt die Federkraft nicht nur auf einen der beiden Wagen, sondern auf beide Wagen.

> Bei der Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen werden entgegengesetzte, gleich große Kräfte aufeinander ausgeübt.

Es gilt also

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}} \tag{4.7}$$

mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} = &\text{ Kraft, die von Teilchen 2 ausgeübt wird und} \\ &\text{ den Impuls von Teilchen 1 ändert} \\ \vec{F}_{21} = &\text{ Kraft, die von Teilchen 1 ausgeübt wird und} \\ &\text{ den Impuls von Teilchen 2 ändert} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Damit folgt aber auch

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0 \tag{4.9}$$

Offenbar ist also ohne äußere Kräfte auch der Gesamtimpuls $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ erhalten.

Superpositionsprinzip: Bei mehreren gleichzeitig wirkenden Kräften nehmen wir zusätzlich zu Newton's Axiomen an, dass diese Kräfte sich gegenseitig nicht in ihrer Wirkung stören. Jede Kraft übt eine Wirkung auf den Impuls eines Teilchens aus, egal ob es andere Kräfte gibt oder nicht. Da die Beschleunigung aber ein Vektor ist und Vektoren einfach addiert werden können, kann man auch Kräfte zu einer Gesamtkraft zusammenfassen.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{ges} = \sum_i \vec{F}_i \tag{4.10}$$

Aus diesen Überlegungen folgt auch die Impulserhaltung für ein System von Teilchen, die alle Kräfte aufeinander ausüben, wie zum Beispiel das Sonnensystem mit seinen Planeten. Wenn die Gesamtkraft einfach nur die Vektorsumme der Einzelkräfte ist, diese sich aber jeweils paarweise (Actio=Reactio) aufheben, dann ist die Gesamtkraft eben Null und der Gesamtimpuls ist erhalten. Für das Sonnensystem mit der Sonne und all seinen Planeten bedeutet das offenbar, dass sich das gesamte System mit konstantem Impuls geradlinig weiterbewegt, wenn man alle äußeren Einwirkungen auf das Sonnensystem vernachlässigen kann. (Diese Annahme ist natürlich nicht völlig richtig.)

Superspositionsprinzip

4.1.1 Inertialsystem

Alle Angaben der bisher genannten Vektorgrößen $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{F}$ können nur angegeben werden in einem konkreten Koordinatensystem (oder Bezugssystem). In welchem Bezugssystem also gelten die bisher genannten Definitionen und Axiome? Wir definieren dafür:

> a) Ein Bezugssystem, in dem Newton's Axiome gelten, heißt Inertialsystem.
> b) Alle Inertialsysteme bewegen sich gleichförmig geradlinig zueinander.

Die Aussage a) ist letzendlich die Frage nach der Gültigkeit der Axiome überhaupt. Es könnte ja sein, dass Newton's Axiome in keinem Bezugssystem gelten. Experimentell sehen wir aber, dass im Rahmen der bisherigen Messgenauigkeit Newton's Axiome nicht widerlegt werden konnten. Dies heißt nicht, dass sie wahr sind, sondern nur, dass wir es nicht besser wissen. Also akzeptieren wir im Moment die Axiome und versuchen, sie mit immer besser werdender Genauigkeit zu überprüfen, denn sie sind die Grundlage der Physik und der Naturwissenschaften insgesamt.

Aussage b) folgt aus Aussage a) und den bisherigen Gesetzen. Messen wir die Bahnkurve eines Teilchens in zwei verschiedenen Inertialsstemen und nennen diese $x(t)$ und $x'(t)$. Beide lassen sich durch die Relativgeschwindigkeit v_s der beiden Systeme ineinander umrechnen,

$$x'(t) - x'_0 \; = \; x(t) - x_0 \; + \; v_s\, t \tag{4.11}$$

Hier ist v_s eine Konstante, hängt also nicht von der Zeit ab. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind dann

$$v' = v + v_s \qquad a' = a \tag{4.12}$$

Die gemessenen Beschleunigungen sind also gleich in allen Inertialsystemen. Damit ist auch die Gleichung $F = m\,a$ in beiden Systemen gültig und damit die Masse gleich in beiden Inertialsystemen.

Es gibt nur ein Problem hierbei. Wir haben angenommen, dass die Zeit t die gleiche ist in $x(t)$ und $x'(t)$. Bei hohen Geschwindigkeiten misst man unterschiedliche Zeiten t und t' und Zeitintervalle dt und dt' für die gleiche Bahnkurve. Hierauf beruht die spezielle Relativitätstheorie.

4.2 Gravitation

Es gibt nach bisherigem Wissen folgende fundamentale Kräfte in der Natur:

- Gravitation, die die Erdbeschleunigung g verursacht und Planeten auf ihren Bahnen um die Sonne hält,
- Elektromagnetismus, die die Coulomb-Kraft, die Lorentz-Kraft und die Reibungskräfte erklärt,
- Starke Wechselwirkung, die die Kräfte zwischen den Quarks im Proton und die Kernkräfte erklärt,
- Schwache Wechselwirkung, die die Umwandlung elementarer Teilchen erklärt,

- Yukawa Wechselwirkungen zwischen Higgs-Teilchen und den Spin-1/2 Teilchen.

All diese Wechselwirkungen unterscheiden sich drastisch.

Das Gravitationsgesetz von Newton beschreibt Gravitation als die wechselseitige Anziehung von Massen (z.B. Apfel-Erde, Erde-Mond, Sonne-Erde). Die Kraft zwischen zwei Massenpunkten ist anziehend und zeigt entlang der Verbindungslinie zwischen den beiden Massen. Sie ist außerdem proportional zum Produkt der beiden Massen (m_1, m_2) und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstands. Sind die Massen an den Orten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$, so ist ihr Abstand

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{4.13}$$

Die Gravitationskraft auf die Masse 1 ist dann

$$\boxed{\vec{F}_{12} = G\,\frac{m_1\,m_2}{r_{12}^2}\,\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}} \tag{4.14}$$

Gravitationsgesetz von Newton

Gravitationskonstante

$$G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$$

Die Massen m_1, m_2 müssten hier nicht notwendigerweise die trägen Massen sein. Sie werden in diesem Gravitationsgesetz daher *schwere Massen* genannt. Wegen actio = reactio ist

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{4.15}$$

Gravitationskraft auf der Erde: Es sei M_E die Masse der Erde und m_K die Masse eines Körpers auf der Erdoberfläche. Nach obiger Gleichung wirken entgegengesetzt gleich große Kräfte auf die Erde und den Körper. Allerdings ist die Masse der Erde in der Regel viel größer, so dass die Beschleunigung der Erde vernachlässigbar klein gegenüber der des Körpers ist,

$$\frac{a_E}{a_K} = \frac{m_K}{M_E} \ll 1$$

Wir können also näherungsweise annehmen, dass nur der Körper m_K beschleunigt wird. Wenn der Körper eine Höhe h über der Erdoberfläche hat, so ist der Abstand zum Mittelpunkt der Erde

$$r_{12} = R_E + h$$

In der Näherung $h \ll R_E$ gilt dann $r_{12} \approx R_E$ und

$$\left|\vec{F}\right| \approx G\,\frac{M_E\,m_K}{R_E^2} =: m_K\,g \tag{4.16}$$

Hier ist $M_E = 5{,}9723 \cdot 10^{24}$ kg und $R_E = 6378$ km ist der Radius der Erde. Wir haben hier offenbar vorausgesetzt, dass man hier den Abstand des Körpers vom Mittelpunkt der Erde einsetzen kann. Wir werden dies weiter unten begründen. Die mit dieser Gleichung definierte Erdbeschleunigung g ist

$$g \approx 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{4.17}$$

Der Messwert von g weicht allerdings örtlich um bis zu 0,5% von diesem Zahlenwert ab, da die Erde keine perfekte Kugel ist und es auch Gebiete gibt, in denen die Dichte der Erde etwas größer oder kleiner ist als im Mittel.

Träge und schwere Masse Wir hatten bisher die träge Masse definiert über das Aktionsprinzip

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})$$

also als eine Eigenschaft, die angibt, wie träge ein Körper auf eine beliebige äußere Kraft reagiert (d.h. beschleunigt wird).

Die schwere Masse hingegen ist die Eigenschaft eines Körpers, die angibt, wie stark er an der Gravitation teilnimmt.

Eötvös Experiment, 1890

In einem berühmten Experiment wurde von Eötvös et al. gezeigt, dass das Verhältnis von träger und schwerer Masse für viele verschiedene Stoffe gleich ist. Der relative Unterschied ist, mit heutigen Methoden gemessen, kleiner als 10^{-10}. Wir werden daher im Folgenden annehmen, dass für alle Stoffe gilt

$$\boxed{m_{\text{träge}} = m_{\text{schwer}}} \tag{4.18}$$

Dies ist auch eines der wichtigsten Postulate der Allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein.

Damit gilt konkret für die Erdbeschleunigung

$$\left|\vec{F}\right| = m_{\text{träge}}\, a = G\frac{M_E\, m_{\text{schwer}}}{R_E^2} = m_{\text{schwer}}\, g$$

und damit

$$F = m\,a = m\,g \tag{4.19}$$

Damit werden alle Körper mit der gleichen Erdbeschleunigung fallen, unabhängig von ihrem Material.

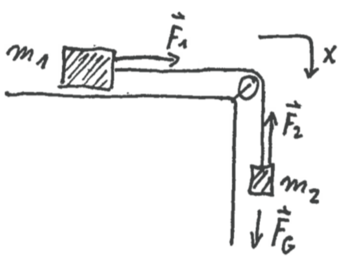

Abb. 4.1
Beschleunigung auf der Luftkissenbahn

Aufgabe 4.1: In Abb. 4.1 sind zwei Massen (m_1,m_2) mit einem Faden verbunden. Auf die zweite Masse wirkt zusätzlich die Gewichtskraft $F_g = m_2 g$.
Lösung: Damit folgt nach Newton

$$m_1\, a_1 = F_1 \qquad m_2\, a_2 = F_2 + F_g \tag{4.20}$$

Wegen Actio = Reactio gilt $F_1 = -F_2$. Der Faden wird immer gespannt bleiben, d.h. die Geschwindigkeit der Massen ist gleich und die Beschleunigungen ebenso, $a_1 = a_2$. Damit folgt

$$\begin{aligned} m_2\, a &= -m_1\, a + m_2\, g \\ a &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, g \end{aligned} \tag{4.21}$$

Die Beschleunigung ist damit immer kleiner als g.

4.3 Federkraft

Bei Federn werden die elastischen Eigenschaften eines Materials ausgenutzt, um bei Auslenkung aus der Ruhelage eine in Gegenrichtung wirkende Kraft zu verursachen.

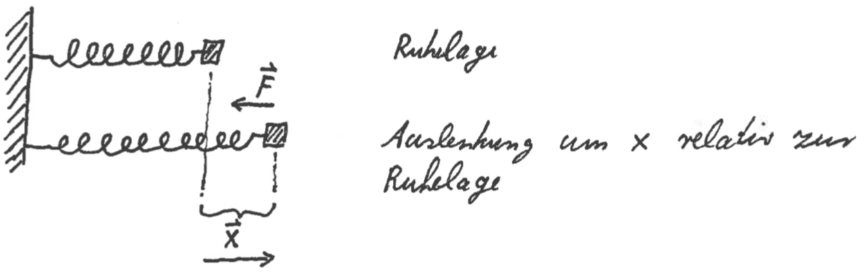

Abb. 4.2 Feder auf einem Tisch vor (oben) und nach (unten) der Auslenkung.

Wir betrachten eine Feder, die flach auf einem Tisch liegt. Relativ zu ihrer Ruhelage wird sie um eine Strecke $\vec{x}$ ausgelenkt. Experimentell findet man, dass auf die angehängte Masse eine Kraft wirkt, die proportional zur Auslenkung ist.

$$\boxed{F = -k\,x} \tag{4.22}$$

Federkonstante k

Nach Newton wirkt eine Beschleunigung auf die Masse m,

$$\boxed{m\,\ddot{x} = -k\,x} \tag{4.23}$$

Bewegungsgleichung

Diese Bewegungsgleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wir werden später sehen, dass viele physikalische Systeme durch Bewegungsgleichungen dieser mathematischen Form beschrieben werden können.

Hängt man wie in Abb. 4.3 eine Feder senkrecht auf, so wird sie durch ihr Eigengewicht ein wenig länger. Hängt man nun eine Masse an die Feder, so wird sie aufgrund der Gewichtskraft $F = m\,g$ um eine weitere Strecke x_0 ausgelenkt. In dieser neuen Position liegt ein Gleichgewicht der Kräfte vor,

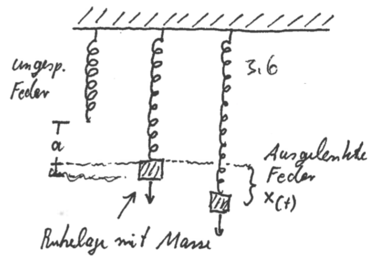

Abb. 4.3 Senkrecht hängende Feder.

$$F_G + F_{\text{Feder}} = m\,g - k\,x_0 = 0 \tag{4.24}$$

Lenkt man nun die Feder um eine weitere Strecke x aus, so bewirkt die entstehende Kraft eine Beschleunigung der Masse,

$$m\,\ddot{x} = m\,g - k\,(x_0 + x) \tag{4.25}$$

Mit obiger Gleichung für die Gleichgewichtslage gilt

$$m\,\ddot{x} = -k\,x \tag{4.26}$$

Die Bewegungsgleichung ist also die gleiche wie bei der waagerechten Auslenkung, die Feder wird einfach nur durch die Gewichtskraft vorgespannt.

Tatsächlich ist das in Gl. 4.22 formulierte Gesetz nur in einem Bereich gültig, in dem die Auslenkung nicht zu groß ist. Bei immer größer werdender Auslenkung ist der Zusammenhang zwischen Kraft und Auslenkung nicht mehr linear. Man kann den linearen Zusammenhang einfach als den ersten Term einer Taylor-Entwicklung der tatsächlichen Funktion $F(x)$ auffassen, bei dem alle Terme außer dem linearen weggelassen wurden, da sie klein genug sind.

4.4 Seilspannung

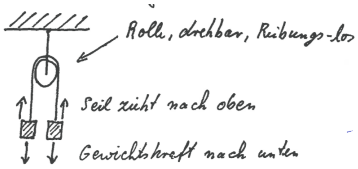

Abb. 4.4
Zur Seilspannung.

Hängt man wie in Abb. 4.4 zwei gleich große Massen an einem Seil über eine bewegliche Rolle auf, so stellt sich ein Gleichgewicht ein. Nach Newton's Axiomen muss die Summe der Kräfte auf jede Masse also gleich Null sein. Die Gewichtskraft jeder Masse wird also durch die Spannung im Seil kompensiert. Die Seilspannung ist eine elastische Eigenschaft des Seils, ähnlich wie bei einer Feder. Allerdings ist die Federkonstante so groß, dass die Auslenkung (Verlängerung des Seils) vernachlässigbar klein ist.

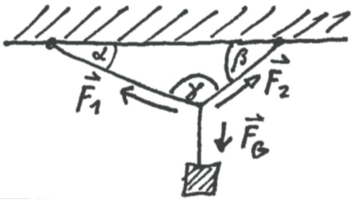

Abb. 4.5
Addition von Kräften.

Aufgabe 4.2: Hängt man eine Masse wie in Abb. 4.5 auf, so ergibt sich eine quadratische Beziehung zwischen den Kräften für $\gamma = 90^0$.
Lösung: Die Gleichgewichtsbeziehung lautet

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\vec{F}_G = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{4.27}$$

Falls der Winkel γ zwischen den Seilen 90^0 beträgt, so ist $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = 0$. Damit folgt

$$F_G^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\vec{F}_1\vec{F}_2 = F_1^2 + F_2^2 \tag{4.28}$$

Diese Gleichung lässt sich leicht experimentell überprüfen.

4.5 Reibung

Mit Reibung bezeichnet man allgemein einen Widerstand gegen die Bewegung eines Körpers durch seine Umgebung. Die Reibungskraft $\vec{F}_R$ zeigt daher entgegen der Geschwindigkeit des Körpers. Man unterscheidet verschiedene Formen der Reibung.

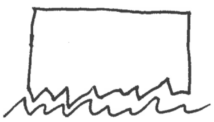

Abb. 4.6

Coulomb-Reibung zwischen Oberflächen: In diesem Fall ist die Reibungskraft proportional zur Kraft F_N, mit der die Oberflächen aneinandergedrückt werden,

$$\boxed{F_R = \mu\, F_N} \tag{4.29}$$

Diese Form der Reibung entsteht durch elektrische Kräfte (Coulomb-Wechselwirkung) zwischen den Oberflächen.

Reibungskoeffizient μ

μ	Haft	Gleit
Stahl-Stahl	0,74	0,57
Teflon-Teflon	0,04	0,03

- Haftreibung: Wenn die Oberflächen zueinander ruhen ($v = 0$), muss zunächst eine Mindestkraft aufgebracht werden, um eine Bewegung herzustellen.
- Gleitreibung: Liegt bereits eine Geschwindigkeit vor, so ist die Reibung deutlich geringer.

Reibung lässt sich relativ einfach durch eine schiefe Ebene messen. Stellt man die Ebene schief, so gerät der Körper bei einem bestimmten Winkel ins Rutschen. Die Haftreibung ergibt sich für diesen Winkel aus $F_R = -F_{\parallel}$,

$$m\,g\,\sin\alpha = \mu\,m\,g\,\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \tan\alpha \tag{4.30}$$

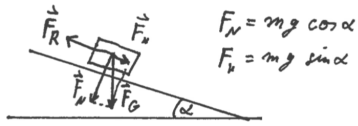

Abb. 4.7

Stokes-Reibung: In Flüssigkeiten erfahren relativ kleine und langsame Körper eine Reibungskraft. Ist die Geschwindigkeit v klein genug, so ist die Strömung wirbelfrei. Dies gilt z.B. für kleine Kugeln in Flüssigkeiten. Die Reibungskraft ist in diesem Fall proportional zur Geschwindigkeit v und zum Radius r der Kugel,

$$F_R = 6\,\pi\,r\,\eta\,v \tag{4.31}$$

Hier ist η die Viskosität der Flüssigkeit. Wird die Kugel durch die Gewichtskraft beschleunigt und durch die Reibungskraft abgebremst, so stellt sich nach kurzer Zeit eine konstante Geschwindigkeit v_0 ein, entsprechend

$$m\,g - 6\,\pi\,r\,\eta\,v = 0 \tag{4.32}$$

Newton-Reibung: Bei schnellen Bewegungen großer Körper z.B. in Luft ist die Verdrängung der Luft der wichtigere Effekt. Es handelt sich also weniger um einen Oberflächeneffekt. Bei einer Querschnittsfläche A senkrecht zur Geschwindigkeit v ist die Reibungskraft proportional zur Dichte ρ der Luft,

$$F_R = \frac{1}{2}\,c_W\,\rho\,A\,v^2 \tag{4.33}$$

Hier ist c_W ein Faktor, der die Form und Windschnittigkeit des Körpers zusammenfasst. Diese Newton-Reibung wächst quadratisch mit der Geschwindigkeit.

4.6 Harmonischer Oszillator

Ein *harmonischer Oszillator* ist allgemein ein physikalisches System, das nach Auslenkung aus seiner Ruhelage eine in Gegenrichtung wirkende Kraft entwickelt, deren Größe linear von der Auslenkung abhängt. Fast alle physikalischen Systeme haben nahe ihres Gleichgewichts näherungsweise diese Eigenschaft, so dass die Lösung ganz allgemein für beliebige harmonische Oszillatoren von herausragender Bedeutung ist.

Beispiel Feder: Eine Masse m an einer Feder wird relativ zu ihrer Ruhelage um eine Strecke x ausgelenkt. Die Feder übt dann eine Kraft $F = -kx$ in Gegenrichtung aus. Lässt man die Masse los,