ÜBUNGEN ZUR PHYSIK I UND EINFÜHRUNG IN DIE THEORETISCHE PHYSIK I

Wintersemester 2019/20, Wolfgang Hillert, Robin Santra, Peter Schleper

Übungsblatt 7

Abgabe der Lösungen am 12.12.2019

Aufgabe 1: Formelsammlung **1 (A)**

Stellen Sie auf ca. einer Seite eine eigene Formelsammlung zum Stoff der letzten Vorlesungswoche zusammen.

Aufgabe 2: Loopingbahn (*E*) **7 (A)**

Aus welcher Höhe h muss ein Wagen auf einer Loopingbahn starten, um nicht abzustürzen? (Reibung vernachlässigen, Radius des Loopings: 10 m)

Aufgabe 3: Zentralkraft (*T*) **6 (B)**

Es sei das Kraftfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = C r^{\alpha} \hat{e}_r$$

gegeben, wobei C und α reelle Konstanten sind und $\hat{e}_r = \vec{r}/r$ der von x, y und z abhängige radiale Einheitsvektor ist. (Denken Sie z.B. an $C = -Gm_1m_2$ und $\alpha = -2$.) Verwenden Sie die Kettenregel, um $-\vec{\nabla}V(r)$ [$V(r)$ beliebig] in die Form $f(r)\hat{e}_r$ überzuführen. Bestimmen Sie damit das zu $\vec{F}$ gehörige Potential.

Aufgabe 4: Drehmoment (*E*) **7 (A)**

Auf einen anfänglich ruhenden Hohlzylinder (Masse m = 70 kg, Radius R=0,1m) wirkt ein Drehmoment von 80 Nm bezüglich seiner Achse.
Wie groß ist das Trägheitsmoment bezüglich seiner Achse?
Wie groß ist nach 30 s die Winkelgeschwindigkeit und die Dauer einer Rotation?

Aufgabe 5: Zweiteilchenproblem und Taylor-Reihe (*T*)

Beim Zweiteilchenproblem mit Gravitationskraft gilt der Energieerhaltungssatz für die radiale Bewegung (Bewegung in der Abstandskoordinate) in der Form

$$E_{\text{rel}} = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r),$$

wobei das effektive Potential durch

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - G\frac{m_1 m_2}{r}$$

gegeben ist. Sie untersuchen im Folgenden die radiale Bewegung unter Verwendung einer Taylor-Reihenentwicklung in sogenannter *harmonischer* Näherung. Nehmen Sie dabei an, dass $l > 0$ ist.

a) Bestimmen Sie die Position r_0 des Minimums von $V_{\text{eff}}(r)$ und die effektive potentielle Energie V_{min} bei $r = r_0$. Entwickeln Sie dann $V_{\text{eff}}(r)$ in eine Taylorreihe um das Minimum bei $r = r_0$. Vernachlässigen Sie Terme dritter und höherer Ordnung. Auf diese Weise nähern Sie $V_{\text{eff}}(r)$ durch ein bei $r = r_0$ zentriertes harmonisches Potential $\tilde{V}_{\text{eff}}(r) = V_{\text{min}} + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$. Geben Sie k an und drücken Sie k durch r_0 und V_{min} aus. **4,5 (B)**

b) Leiten Sie durch Zeitableitung von $E_{\text{rel}} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \tilde{V}_{\text{eff}}(r)$ eine Bewegungsgleichung für $r(t)$ her. (Beachten Sie die Kettenregel!) Geben Sie die allgemeine Lösung für $r(t)$ an. **1,5 (B)**

Aufgabe 6: Kreisscheibe ($\boldsymbol{E}$)

Eine Studentin (Masse $M_S = 60$ kg) sitzt am Rand einer drehbaren Kreisscheibe (Radius $r = 3$m, Masse vernachlässigbar klein). Ihr wird ein Ball mit der Masse $M_B = 0{,}66$ kg mit einer Geschwindigkeit von $v = 30\frac{m}{s}$ zugeworfen. Sie fängt den Ball auf. Dadurch dreht sich die Drehscheibe mit Studentin und Ball.

a) Aus welcher Richtung muss der Ball geworfen werden, damit sich die Scheibe möglichst schnell dreht? **2 (A)**

b) Wie groß ist dann der Drehimpuls des Gesamtsystems, nachdem die Studentin den Ball gefangen hat. **2 (A)**

c) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit dreht sich die Kreisscheibe mit Studentin und Ball? **2 (A)**

Aufgabe 7: Matrix-Vektor-Produkt ($\boldsymbol{T}$) **6 (A)**

Es seien die 3×3-Matrizen

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

und die dreikomponentigen Spaltenvektoren (3×1-Matrizen)

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie die Matrix-Vektor-Produkte: $\boldsymbol{A}_1\vec{x}_1$, $\boldsymbol{A}_1\vec{x}_2$, $\boldsymbol{A}_2\vec{x}_1$, $\boldsymbol{A}_2\vec{x}_2$.

Aufgabe 8: Drehstuhl ($\boldsymbol{E}$)

Sie sitzen im Hörsaal auf einem Drehstuhl und halten einen Fahrradreifen in der Hand. Der Reifen dreht sich schnell in der $x - y$ Ebene mit positivem Drehsinn. Seine Drehachse steht also senkrecht (parallel zur z-Achse).

a) Sie drehen den Fahrradreifen um 180^0 so, dass die Achse zwischenzeitlich in $+x$ Richtung zeigt und am Ende ihre Richtung umgekehrt hat. In welche Richtung rotiert daraufhin der Drehstuhl? **2 (A)**

b) Jetzt drehen sie den Reifen nicht nur um 180^0 sondern um 360^0. Wie dreht sich danach der Drehstuhl? **2 (A)**

c) Jetzt drehen sie den Reifen um 90^0 in x-Richtung, danach um 90^0 Grad in y-Richtung und danach um 90^0 wieder in $+z$ Richtung. Wie dreht sich danach der Drehstuhl? **2 (A)**

d) Jetzt drehen sie den Reifen um 90^0 in x-Richtung. Danach existiert offenbar ein Drehimpuls des Reifens in x-Richtung. Wie erzeugen Sie diese Komponente des Drehimpuls? Was bedeutet das für die Standfestigkeit des Stuhls? In welche Richtung könnte er kippen und warum? Wie können Sie die Grenzen der Standfestigkeit austesten? **2 (C)**

Aufgabe 9: Matrix-Matrix-Produkt ($\boldsymbol{T}$) **6 (A)**

Es seien die 3×3-Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -7 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie die Matrix-Matrix-Produkte: $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BA}$.

Aufgabe 10: Kometenbahn (*E*) **7 (B)**

Ein Komet hat im Abstand

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot 10^6 \ km$$

von der Sonne die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

Welche Geschwindigkeit hat er, wenn er der Sonne am nächsten ist?