

Übungsblatt 6

Abgabe der Lösungen am 05.12.2019

Aufgabe 1: Formelsammlung

1 (A)

Stellen Sie auf ca. einer Seite eine eigene Formelsammlung zum Stoff der letzten Vorlesungswoche zusammen.

Aufgabe 2: Energieerhaltung bei der schiefen Ebene (*E*)

Sie springen im Schwimmbad vom 10m Turm. Mit einem gekonnten Bauchklatscher treffen sie auf der Oberfläche auf.

- a) Benutzen Sie den Energieerhaltungssatz, um die Geschwindigkeit beim Aufprall auszurechnen. Überprüfen Sie ihr Ergebnis, indem Sie es mit einer Rechnung über die Gravitationskraft und die Fallzeit vergleichen. 4 (A)
- b) Jetzt rutschen sie, ebenfalls aus 10 m Höhe, die Rutsche im Schwimmbad herunter (Reibung vernachlässigen). Benutzen Sie wieder Energieerhaltung um die Geschwindigkeit auf Höhe der Wasseroberfläche auszurechnen. Welche Komponente der Geschwindigkeit haben Sie ausgerechnet? Vergleichen Sie wieder mit der Rechnung über die Gravitationskraft und die Zeitdauer auf der Rutsche vergleichen. 4 (B)
- c) Kann das Wasser beim Bauchklatscher höher spritzen als 10 m? Wenn ja, was müssten Sie dafür tun? 1 (A)

Aufgabe 3: Gradient (*T*)

- a) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion $f(x, y, z) = x^2 y^3 z$ am Raumpunkt $(1, 2, -1)$. 1,5 (A)
- b) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion $f(x, y, z) = ze^x \cos y$ am Raumpunkt $(1, 0, \pi/3)$. 1,5 (A)
- c) Sei $f(x, y, z)$ eine gegebene reelle Funktion der räumlichen Variablen x , y und z . Drücken Sie das totale Differential von f am Raumpunkt (x, y, z) mit Hilfe von $\vec{\nabla} f(x, y, z)$ aus. Nutzen Sie dies, um zu zeigen, dass $\vec{\nabla} f(x, y, z)$ die räumliche Richtung des größten Anstiegs von $f(x, y, z)$ bezüglich des Raumpunkts (x, y, z) angibt. 6 (B)

Aufgabe 4: Gravitation (*E*)

- a) Zeigen Sie, dass für Erdbeschleunigung auf der Oberfläche der Erde und die Gravitationskonstante gilt:

$$g = G \frac{M_{Erde}}{r_{Erde}^2}$$

2 (A)

- b) Wie groß ist die potentielle Energie einer Masse von 1 kg auf der Erdoberfläche? ($r_{Erde} = 6300km$) 2 (A)

- c) Ein Körper nähert sich aus unendlicher Entfernung mit Geschwindigkeit 1 m/s der Erde. Welche Geschwindigkeit hat er, wenn er auf der Oberfläche der Erde aufschlägt? Vernachlässigen Sie die anderen Planeten, Sonne und Mond. 4 (A)

- d) Wie groß ist der Unterschied zwischen den potentiellen Energien am Boden und in 1 km Höhe, wenn sie einerseits die Näherung $E_{pot} = mgh$ und andererseits

$$E_{pot} = -G \frac{m M_{Erde}}{r_{Erde} + h}$$

verwenden? 4 (B)

- e) Berechnen Sie die potentielle Energie, die ein Kilogramm Masse auf der Erde durch das Gravitationspotential der Sonne erhält. Wieso ist dieser Zahlenwert viel größer als der Wert aus Aufgabe b, ohne das wir es auf der Erde merken ? Geben Sie drei Gründe an.

($M_{Sonne} = 2 \cdot 10^{30} kg$, Entfernung $r_{E-S} = 150 \cdot 10^6 km$.) 4 (B)

Aufgabe 5: Rotation (T)

- a) Bestimmen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1,5 (A)

- b) Bestimmen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}.$$

1,5 (A)

- c) Zeigen Sie, dass für skalare Felder $V(x, y, z)$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V(x, y, z)) = \text{rot grad } V(x, y, z) = \vec{0}$$

und für Vektorfelder $\vec{F}(x, y, z)$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z)) = \text{div rot } \vec{F}(x, y, z) = 0$$

gilt. 3 (A)

Aufgabe 6: Eishockey (E)

5 (B)

Auf einer glatten Fläche wird ein Puck ($m_1 = 0.5kg$) mit $v_1 = 20m/s$ exzentrisch auf einen zweiten Puck ($m_2 = 1kg$) geschossen. Nach dem Stoß hat der erste Puck die Geschwindigkeit $v'_1 = 10m/s$. Berechnen Sie v'_2 sowie die Winkel α zwischen \vec{v}'_1 und \vec{v}_1 sowie β zwischen \vec{v}'_2 und \vec{v}_1 .

Aufgabe 7: Linienintegral (T)

Gegeben sei die Kraft

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

in der xy -Ebene. Bestimmen Sie die von dieser Kraft an einem Partikelchen verrichtete Arbeit jeweils entlang der folgenden Wege vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt $(1, 1)$ in der xy -Ebene:

a) $y = \sqrt{x}$ 3 (B)

b) $y = x$ 3 (B)

c) $y = x^2$ 3 (B)

[Überlegen Sie sich: Welcher Parameter wird hier zur Parametrisierung des jeweiligen Weges herangezogen?]

Aufgabe 8: Kreispendedel (E)**5 (B)**

Eine Kugel wird an einer $L = 70$ cm langen Schnur im Kreis herumgeschleudert und macht dadurch eine horizontale Kreisbewegung. Die Kugel führt in 2 Sekunden 5 Umdrehungen aus. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der Kugel auf der Kreisbahn? Welche Kräfte wirken auf die Kugel? Wie groß ist der Winkel zwischen der Schnur und der Senkrechten und wie groß die Geschwindigkeit der Kugel?