ÜBUNGEN ZUR PHYSIK I UND EINFÜHRUNG IN DIE THEORETISCHE PHYSIK I

Wintersemester 2019/20, Wolfgang Hillert, Robin Santra, Peter Schleper

Übungsblatt 5

Abgabe der Lösungen am 28.11.2019

Aufgabe 1: Formelsammlung **1 (A)**

Stellen Sie auf ca. einer Seite eine eigene Formelsammlung zum Stoff der letzten Vorlesungswoche zusammen.

Aufgabe 2: Zug durch die Erde (*E*)

Zwischen Hamburg und Köln (Entfernung auf der Erde = 358 km) dient ein geradliniger Tunnel (der also nicht der Erdkrümmung folgt) als möglichst schnelle Zugverbindung. Nehmen Sie an, dass der Zug reibungsfrei fahren kann und keinen Motor besitzt. Er bewegt sich also nur durch die Schwerkraft.

a) Wie tief dringt der Zug in die Erde ein und wie lang ist die Strecke? (mit Skizze) **2 (A)**

b) Wie hängt die wirksame Schwerkraftkomponente parallel zum Tunnel ($F_{||} = m \cdot g_{||}$) vom Abstand x zum Mittelpunkt des Tunnels ab? (Da der Zug nicht sehr tief in die Erde eindringt können Sie annehmen, dass mg konstant und so groß wie auf der Erde ist. Können Sie eine Näherung für kleine Winkel verwenden? **3 (B)**

c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und zeigen Sie, dass für die Fahrt von Hamburg nach Köln näherungsweise

$$x(t) = x_{max} \cdot \cos(\omega t)$$

mit $\omega = \sqrt{g/R_{Erde}}$ gilt. **4 (C)**

d) Wie groß ist die Höchstgeschwindigkeit ? Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit? Wie lange braucht der Zug? Lohnt sich ein Tunnel von Hamburg nach Lübeck? (Hinweis: Verwenden Sie das in c) angegebene Ergebnis für $x(t)$.) **5 (A)**

Aufgabe 3: Kreuzprodukt (*T*)

a) Es seien

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-2}{4} \\ \frac{\sqrt{2}+2}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Koordinatenvektoren bezüglich einer gegebenen Orthonormalbasis im dreidimensionalen Raum. Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ und $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. **6 (A)**

b) Zeigen Sie, dass für das Kreuzprodukt von zwei beliebigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im dreidimensionalen Raum folgender Zusammenhang gilt:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin\varphi.$$

Hierbei repräsentiert φ den von den beiden Vektoren eingeschlossenen Winkel. [Hinweis: Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass die beiden Vektoren in der xy-Ebene liegen und nutzen Sie, dass Sie die Ausrichtung des xy-Achsenpaares in dieser Ebene frei wählen können.] **6 (B)**

Aufgabe 4: Wasserstoff (*E*)
Zwischen den beiden H-Atomen eines H_2−Moleküls wirke bei einem Abstand x der Atommittelpunkte die Kraft

$$F(x) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}.$$

Die Konstanten haben die Werte $a = 0.31 \cdot 10^{-139}\ N\ m^{13}$ und $b = 3.0 \cdot 10^{-79}\ Nm^7$; die Masse des H-Atoms ist $m_H = 1.673 \cdot 10^{-27}\ kg$.

a) Wie groß ist der Gleichgewichtsabstand x_0 zwischen den beiden H-Atomen? **3 (A)**

b) In einem engen Bereich um x_0 herum kann die Kraft durch eine lineare Funktion genähert werden, $F(x) \approx -k \cdot (x - x_0)$. Bestimmen sie k durch die Ableitung von $F(x)$ an der Stelle x_0. **3 (A)**

c) Wie lautet die Bewegungsgleichung für eines der H-Atome als Funktion von $x_a = \frac{1}{2}(x - x_0)$? Warum wird x_a so gewählt? **3 (B)**

d) Wie lange dauert eine Schwingung der beiden H-Atome um ihre Ruhelage? **3 (B)**

Aufgabe 5: Partielle Ableitungen (*T*) **6 (B)**
Sei $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$. Bestimmen Sie $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial y^2$, $\partial^2 f/\partial x \partial y$ und $\partial^2 f/\partial y \partial x$ an allen Punkten in der xy-Ebene, an denen $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$ ist.

Aufgabe 6: Antrieb einer Rakete (*E*)
Eine einstufige Rakete habe eine Startmasse von 25000 kg mit einem Treibstoffanteil von 15000 kg. Sie wird senkrecht von der Erdoberfläche aus gestartet. Während des gesamten Fluges werde $g = \text{const} = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ gesetzt.

a) Die Austrittsgeschwindigkeit der Treibstoffgase sei 5000 m/s. Wie groß muss der Treibstoffverbrauch dm/dt mindestens sein, damit sich die Rakete nach der Zündung gerade in der Schwebe hält? **2 (A)**

b) Der Treibstoffverbrauch betrage das Doppelte des oben errechneten Minimalwertes. Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit? **3 (A)**

c) Können Sie die maximale Beschleunigung aushalten? **4 (B)**

Aufgabe 7: Potential und Energieerhaltung (*T*)
Auf ein Punktteilchen der Masse m, das sich nur entlang der x-Achse bewegen kann, wirke die Kraft

$$F(x, t) = -kx + A \sin(\omega' t)$$

entlang der x-Achse, wobei $-kx$ die Hooke'sche Federkraft ist (die vom Ort des Teilchens abhängt, aber nicht explizit von der Zeit) und $A \sin(\omega' t)$ eine vorgegebene, explizite Funktion der Zeit mit Amplitude A und Kreisfrequenz ω' sei. [Die angegebene Kraft $F(x, t)$ stellt die Grundlage dar des Modells des getriebenen, ungedämpften harmonischen Oszillators.]

a) Geben Sie ein Potential $V(x, t)$ an, so dass

$$F(x, t) = -\frac{\partial V(x, t)}{\partial x}$$

erfüllt ist. **3 (B)**

b) Zeigen Sie, durch totale Ableitung der Energie

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x,t)$$

[unter Verwendung von (a)], dass der Energieerhaltungssatz trotz der Existenz eines Potentials nicht gilt. [Beachten Sie: $x = x(t)$.] **3 (B)**