Die Änderung des Gesamtimpulses zwischen t und $t + dt$ ist [4]

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = m\, d\vec{v} \; - \; dm \cdot (\vec{v}\,' - \vec{v}) + dm \cdot d\vec{v} \\ &\approx m\, d\vec{v} \; - \; dm \cdot \vec{v}_G \end{aligned} \tag{4.57}$$

Im letzten Schritt haben wir das Produkt $dm \cdot d\vec{v}$ vernachlässigt, da es für kleine dt viel kleiner wird als die anderen Terme. Ohne äußere Kräfte gilt Impulserhaltung, so dass $d\vec{p} = 0$ ist. Eine äußere Kraft wie die Gravitation der Erde ändert aber den Gesamtimpuls,

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v}_G \tag{4.58}$$

Bei senkrechtem Flug (z-Richtung nach oben) ist $F_z = -mg$ (zumindest nahe der Erdoberfläche) und daher

$$\boxed{-m \cdot g = m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot v_G} \tag{4.59}$$

Bewegungsgleichung der Rakete

Die Rakete wird also in $+z$ Richtung beschleunigt ($dv/dt > 0$), wenn die Schubkraft

$$|v_G| \cdot \left| \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \right| \; > \; m\, g \tag{4.60}$$

ist. Die Bewegungsgleichung kann man lösen, indem man die Variablen separiert,

$$-g\, dt = dv \; - \; \frac{dm}{m} \cdot v_G \tag{4.61}$$

Bei konstanter Geschwindigkeit des Gases v_G kann diese Gleichung integriert werden,

$$\begin{aligned} -\int_{t_0}^{t} g\, dt &= \int_{v_0}^{v(t)} dv - \int_{m_0}^{m(t)} v_G \frac{1}{m}\, dm \\ -g(t - t_0) &= v(t) - v_0 \;\; - v_G \ln \frac{m(t)}{m_0} \end{aligned} \tag{4.62}$$

oder

$$v(t) = v_0 \; - \; g(t - t_0) \; + \; v_G \cdot \ln \frac{m(t)}{m_0} \tag{4.63}$$

Da hier $v_G < 0$ (entgegen $\vec{v}$) und $m_0 > m(t > t_0)$ schreibt man besser

$$\boxed{v(t) = v_0 \; - \; g(t - t_0) \; + \; |v_G| \cdot \ln \frac{m_0}{m(t)}} \tag{4.64}$$

Aufgabe 4.4: Berechnen Sie die Beschleunigung der Rakete durch Ableiten nach der Zeit. Zeigen Sie, dass Sie wieder die Bewegungsgleichung 4.59 erhalten.

[4] Alternativ kann man sich Gl. 4.57 auch in einem Inertialsystem überlegen, in dem die Rakete genau zum Zeitpunkt t in Ruhe ist und damit keine Geschwindigkeit und keinen Impuls hat. Nach kurzer Zeit dt hat die Rakete eine Gasmenge von dm_G mit Geschwindigkeit $\vec{v}_G$ ausgestoßen und hat selber eine Geschwindigkeit $d\vec{v}$ erhalten. Die Änderung des Gesamtimpulses ist

$$d\vec{p} = m \cdot d\vec{v} \; + \; dm_G \cdot \vec{v}_G = m \cdot d\vec{v} \; - \; dm \cdot \vec{v}_G \tag{4.56}$$

Natürlich hat sich die Masse der Rakete in dem kleinen Zeitraum dt selber um die $dm = -dm_G$ geändert. Relativ zur Gesamtmasse der Rakete ist der Effekt aber vernachlässigbar, wenn der Zeitraum dt infinitesimal klein ist.

4.8 Energie

4.8.1 Arbeit

Ein Zug, der auf Schienen einen Berg hinauffährt, muss Kraft entlang dieses Weges aufbringen, um die Schwerkraft zu überwinden. Die Schwerkraft ist hier ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$, dessen Richtung nach unten zeigt. Die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ ist durch die Schienen vorgegeben. Macht es einen Unterschied, welchen Weg die Schienen nehmen? Entscheidend ist offenbar der Steigungswinkel, d.h. der Winkel zwischen $\vec{F}(\vec{r}(t))$ und $\vec{r}(t)$ auf jedem kleinen Stück $d\vec{r}$ des Weges. Wir definieren die Arbeit entlang dieses Wegstücks $d\vec{r}$ daher als

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{4.65}$$

Arbeit: W
$[W] = \mathrm{J} = \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{Joule}$

Die gesamte Arbeit entlang eines bestimmten Weges zwischen zwei Orten $\vec{r}_A$ und $\vec{r}_B$ ist die Summe aller dW Werte entlang dieses Weges,

$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} dW = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r}} \tag{4.66}$$

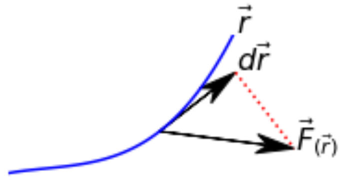

Abb. 4.11
zum Wegintegral.

Dies ist die Arbeit, die von der Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ entlang des Weges von $\vec{r}_A$ nach $\vec{r}_B$ verrichtet wird. Dreht man die Richtung des Weges um, so ändert sich für die Arbeit einfach nur das Vorzeichen. Zeigt zum Beispiel der Weg des Zuges nach unten, so ist der Winkel α zwischen $\vec{F}(\vec{r})$ und $\vec{r}$ kleiner als 90^0 und wegen

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha > 0 \tag{4.67}$$

die Arbeit positiv. Zeigt der Weg dagegen nach oben, so ist die von der Schwerkraft verrichtete Arbeit negativ.

Das Integral in Gl. 4.66 ist ein sogenanntes Linienintegral und wird komponentenweise berechnet, indem man den Weg parametrisiert z.B. als Funktion der Zeit, $r(t)$, und dann

$$d\vec{r} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\, dt = \vec{v}\, dt \tag{4.68}$$

benutzt.

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt \tag{4.69}$$

Im speziellen Fall eines geraden Weges in einem Kraftfeld mit konstanter Richtung kann man alternativ benutzen, dass

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha = F_T \cdot ds \tag{4.70}$$

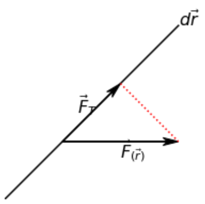

Abb. 4.12
Kraftkomponente F_T parallel zum Weg.

Hier ist $F_T = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha$ gerade die Projektion von $\vec{F}$ auf die Richtung von $d\vec{r}$ und α = konstant entlang des ganzen Weges, so dass

$$W = \cos\alpha \cdot \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} |\vec{F}| \cdot ds \tag{4.71}$$

Beispiel freier Fall: Bei einem freien Fall aus der Höhe h auf geradem Weg nach unten, ist $\vec{F}$ immer parallel zum Weg $d\vec{r}$,

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix} \tag{4.72}$$

und

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F} \cdot d\vec{r} = -m \cdot g \cdot dz \tag{4.73}$$

Damit ist die Arbeit

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = -\int_h^0 m\, g\, dz = -m\, g\, (0 - h) \tag{4.74}$$

oder

$$\boxed{W = m\, g\, h} \tag{4.75}$$

Beispiel Fahrt um eine Kurve: Fährt ein Auto um eine Kurve, so muss über die Räder eine Kraft auf den Wagen wirken. Nehmen wir an, dass die Kraft zu jedem Zeitpunkt senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet ist (nach innen), so ist $F_T = 0$, oder

$$\vec{F}\, d\vec{r} = F\, ds\, \cos 90^0 = 0 \tag{4.76}$$

Es ist also zu jeder Zeit $dW = 0$ und damit wird keine Arbeit bei einer solchen Kurvenfahrt verrichtet.

Beispiel Feder, die sich zusammenzieht: Eine Feder sei um die Länge x_0 ausgelenkt. Die Rückstellkraft $F(x) = -kx$ verrichtet Arbeit an der angehängten Masse,

$$W = \int_{x_0}^0 F(x)\, dx = -k \int_{x_0}^0 x\, dx \tag{4.77}$$

oder

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\, k\, x^2} \tag{4.78}$$

Beispiel Feder, die langsam auseinander gezogen wird: Wird die Feder so langsam auseinander gezogen, dass man die Beschleunigung der angehängten Masse vernachlässigen kann, so ist

$$F_a = -F_{Feder} = +k\, x \tag{4.79}$$

Die Arbeit, die man verrichtet bis zu einer Auslenkung x_0, ist daher

$$W = \int_0^{x_0} F_a\, dx = \frac{1}{2}\, k\, x^2 \tag{4.80}$$

Beispiel Konstante Kraft: Gilt $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}$ = konstant, so kann man $\vec{F}$ aus dem Integral herausziehen, so dass

$$W = \int_{\vec{x}_A}^{\vec{x}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = \vec{F}\,(\vec{x}_B - \vec{x}_A) \tag{4.81}$$

Offenbar hängt die Arbeit hier nur vom Abstand von $\vec{x}_A$ und $\vec{x}_B$ ab, aber nicht von dem genauen Weg, den ein Körper nimmt. Dies ist tatsächlich oft viel allgemeiner gültig, nicht nur bei konstanter Kraft.

4.8.2 Konservative Kraftfelder

Wir definieren daher ganz allgemein:

Konservative Kraftfelder sind Kraftfelder, bei denen die Arbeit wegunabhängig ist und damit nur von Anfang- und Endpunkt des Weges abhängt.

Beispiele für konservative Kraftfelder:

- $\vec{F}$ = konstant
- $\vec{F} = \vec{F}(r)$ Zentralkraftfeld. Die Kraft zeigt überall auf das gleiche Zentrum und ihr Betrag hängt nur vom Abstand vom Zentrum ab. Beispiele sind die Gravitation und die elektrische Coulomb-Kraft.

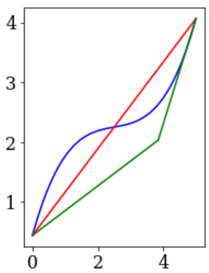

Abb. 4.13 Beispiele für verschiedene Wege im Fall einer konservativen Kraft.

Beispiele für nicht-konservative Kräftfelder:

- $\vec{F} = \vec{F}(\vec{v})$ Die Kraft hängt von der Geschwindigkeit ab, z.B. Reibung
- $\vec{F} = \vec{F}(t)$, zeitabhängige Kräfte

Für konservative Käfte gilt insbesondere, dass die Arbeit entlang eines geschlossenen Weges = 0 ist,

$$\boxed{W = \oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0} \tag{4.82}$$

Dies gilt, da man jeden geschlossenen Weg in zwei Teilwege $\vec{r}_A \rightarrow \vec{r}_B$ sowie $\vec{r}_B \rightarrow \vec{r}_A$ aufteilen kann. In der Berechnung des Integrals für W ist dies einfach eine Vertauschung der Grenzen des Integrals, so dass die Arbeit für beide Wege sich in der Summe gerade aufheben.

4.9 Potentielle Energie und Potential

Das Potential eines Kraftfeldes ist nur für konservative Kräfte definiert. In diesem Fall ist die Arbeit unabhängig vom zurückgelegten