4 Dynamik des Massenpunktes

4.1 Newton's Axiome der Mechanik

Die Ursache von Änderungen der Bewegung sind Kräfte. Diese grundlegende Aussage ist die Basis der Axiome, die Isaac Newton aufgestellt hat.

Das Trägheitsprinzip: Wie am Beispiel der Luftkissenbahn experimentell gezeigt, bewegt sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit, wenn man alle äußeren Einflüsse auf den Körper ausschliessen kann. Zu diesen Einflüssen gehören Luftwiderstand und alle anderen Reibungskräfte, Schwerkraft und alle anderen Kräfte. Die Geschwindigkeit ist ein Vektor mit Betrag und Richtung, die sich beide nicht ändern sollen. Daher gilt:

Die Bewegung eines Körpers verläuft geradlinig gleichförmig, solange keine Kraft auf den Körper wirkt.

Anders ausgedrückt gilt

$$\boxed{\vec{v} = \text{konstant} \qquad \text{für} \quad \vec{F} = 0} \tag{4.1}$$

Hier steht $\vec{F}$ für die Summe aller Kräfte, die auf den Körper von außen einwirken.

Aktionsprinzip: Für eine Geschwindigkeitsänderung (=Beschleunigung) eines Massenpunktes ist also eine äußere Kraft notwendig. Die Kraft soll aber nur den äußeren Einfluss beschreiben, nicht den Körper selbst. Es ist nun aber so, dass es einfacher ist einen PkW anzuschieben als einen LKW. In der gleichen Zeit bei gleicher Kraft wird der PKW eine höhere Geschwindigkeit erreichen als der LKW.

Wir definieren daher Kräfte so, dass sie eine Geschwindigkeitsänderung erzeugen, die umgekehrt proportional zu einer Eigenschaft des Körpers sein soll, die sogenannte *träge Masse* m des Körpers[1]. Wir definieren daher den Impuls eines Massenpunktes

Träge Masse: m
Einheit: $[m] = \mathrm{kg}$
Dimension: dim m = Masse

$$\boxed{\text{Impuls:} \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v}} \tag{4.2}$$

Die Masse ist kein Vektor, so dass die Richtung des Impulses einfach immer in die Richtung der Geschwindigkeit zeigt. Bei gleicher Geschwindigkeit hat ein Körper mit größerer Masse auch einen entsprechend größeren Impuls. Die äußere Kraft $\vec{F}$ soll diesen Impuls mit der Zeit ändern.

Impuls: $\vec{p}$
Einheit: $[\vec{p}] = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$

Die Änderung des Impulses eines Teilchens ist der Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft.

oder als Gleichung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} =: \vec{F}} \tag{4.3}$$

Die Kraft ist also die Ursache, die Impulsänderung ist die Folge.

Kraft: $\vec{F}$
Einheit: $[\vec{F}] = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$

Offenbar bedeutet diese Gleichung auch, dass sich ohne äußere Kräfte der Impuls eines Teilchens gar nicht ändert. Der Impuls ist in diesem Fall also eine Erhaltungsgröße

Impulserhaltung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{für } \vec{F} = 0} \tag{4.4}$$

In den meisten Fällen wird sich die Masse nicht ändern, so dass

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\;\vec{a} = \vec{F} \tag{4.5}$$

Diese Gleichung gilt aber nicht allgemein. Ändert sich in dem Zeitintervall, in dem die Kraft wirkt, auch die Masse des Körpers (also $m = m(t)$), so gilt (Produktregel)

$\vec{F} = m\,\vec{a}$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\vec{v} + m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}} \tag{4.6}$$

So ist uzum Beispiel bei einer Rakete der Gewichtsverlust durch das Ausstoßen des Treibstoffs so groß, dass die Massenänderung berücksichtigt werden muss.

Es ist wichtig zu verstehen, dass der Gleichung $\vec{F} = m\vec{a}$ die Annahme zugrunde liegt, dass die Geschwindigkeitsänderung unabhängig davon ist, wie schnell der Körper bereits ist. Ein Körper könnte also beliebig schnell werden, solange eine Kraft nur lange genug wirkt. Wir werden bei der Speziellen Relativitätstheorie sehen, dass das nahe der Lichtgeschwindigkeit nicht mehr gilt.

[1] Die Einheit Kilogramm wurde historisch durch einen Standardkörper festgelegt, seit kurzem jedoch durch Experimente, die die Relation des kg zum Planckschen Wirkungsquantum oder der Avogadrokonstante festlegen, siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Kilogramm`.

Actio = Reactio: Wenn zwei Wagen mit einer Feder verbunden sind, so wirkt die Federkraft nicht nur auf einen der beiden Wagen, sondern auf beide Wagen.

> Bei der Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen werden entgegengesetzte, gleich große Kräfte aufeinander ausgeübt.

Es gilt also

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}} \tag{4.7}$$

mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \text{Kraft, die von Teilchen 2 ausgeübt wird und} \\ &\quad\ \text{den Impuls von Teilchen 1 ändert} \\ \vec{F}_{21} &= \text{Kraft, die von Teilchen 1 ausgeübt wird und} \\ &\quad\ \text{den Impuls von Teilchen 2 ändert} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Damit folgt aber auch

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0 \tag{4.9}$$

Offenbar ist also ohne äußere Kräfte auch der Gesamtimpuls $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ erhalten.

Superpositionsprinzip: Bei mehreren gleichzeitig wirkenden Kräften nehmen wir zusätzlich zu Newton's Axiomen an, dass diese Kräfte sich gegenseitig nicht in ihrer Wirkung stören. Jede Kraft übt eine Wirkung auf den Impuls eines Teilchens aus, egal ob es andere Kräfte gibt oder nicht. Da die Beschleunigung aber ein Vektor ist und Vektoren einfach addiert werden können, kann man auch Kräfte zu einer Gesamtkraft zusammenfassen.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{ges} = \sum_i \vec{F}_i \tag{4.10}$$

Superspositionsprinzip

Aus diesen Überlegungen folgt auch die Impulserhaltung für ein System von Teilchen, die alle Kräfte aufeinander ausüben, wie zum Beispiel das Sonnensystem mit seinen Planeten. Wenn die Gesamtkraft einfach nur die Vektorsumme der Einzelkräfte ist, diese sich aber jeweils paarweise (Actio=Reactio) aufheben, dann ist die Gesamtkraft eben Null und der Gesamtimpuls ist erhalten. Für das Sonnensystem mit der Sonne und all seinen Planeten bedeutet das offenbar, dass sich das gesamte System mit konstantem Impuls geradlinig weiterbewegt, wenn man alle äußeren Einwirkungen auf das Sonnensystem vernachlässigen kann. (Diese Annahme ist natürlich nicht völlig richtig.)

4.1.1 Inertialsystem

Alle Angaben der bisher genannten Vektorgrößen $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{F}$ können nur angegeben werden in einem konkreten Koordinatensystem (oder Bezugssystem). In welchem Bezugssystem also gelten die bisher genannten Definitionen und Axiome? Wir definieren dafür:

a) Ein Bezugssystem, in dem Newton's Axiome gelten, heißt Inertialsystem.
b) Alle Inertialsysteme bewegen sich gleichförmig geradlinig zueinander.

Die Aussage a) ist letzendlich die Frage nach der Gültigkeit der Axiome überhaupt. Es könnte ja sein, dass Newton's Axiome in keinem Bezugssystem gelten. Experimentell sehen wir aber, dass im Rahmen der bisherigen Messgenauigkeit Newton's Axiome nicht widerlegt werden konnten. Dies heißt nicht, dass sie wahr sind, sondern nur, dass wir es nicht besser wissen. Also akzeptieren wir im Moment die Axiome und versuchen, sie mit immer besser werdender Genauigkeit zu überprüfen, denn sie sind die Grundlage der Physik und der Naturwissenschaften insgesamt.

Aussage b) folgt aus Aussage a) und den bisherigen Gesetzen. Messen wir die Bahnkurve eines Teilchens in zwei verschiedenen Inertialsstemen und nennen diese $x(t)$ und $x'(t)$. Beide lassen sich durch die Relativgeschwindigkeit v_s der beiden Systeme ineinander umrechnen,

$$x'(t) - x'_0 = x(t) - x_0 + v_s t \tag{4.11}$$

Hier ist v_s eine Konstante, hängt also nicht von der Zeit ab. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind dann

$$v' = v + v_s \qquad a' = a \tag{4.12}$$

Die gemessenen Beschleunigungen sind also gleich in allen Inertialsystemen. Damit ist auch die Gleichung $F = m\,a$ in beiden Systemen gültig und damit die Masse gleich in beiden Inertialsystemen.

Es gibt nur ein Problem hierbei. Wir haben angenommen, dass die Zeit t die gleiche ist in $x(t)$ und $x'(t)$. Bei hohen Geschwindigkeiten misst man unterschiedliche Zeiten t und t' und Zeitintervalle dt und dt' für die gleiche Bahnkurve. Hierauf beruht die spezielle Relativitätstheorie.

4.2 Gravitation

Es gibt nach bisherigem Wissen folgende fundamentale Kräfte in der Natur:

- Gravitation, die die Erdbeschleunigung g verursacht und Planeten auf ihren Bahnen um die Sonne hält,
- Elektromagnetismus, die die Coulomb-Kraft, die Lorentz-Kraft und die Reibungskräfte erklärt,
- Starke Wechselwirkung, die die Kräfte zwischen den Quarks im Proton und die Kernkräfte erklärt,
- Schwache Wechselwirkung, die die Umwandlung elementarer Teilchen erklärt,