Lie-Ableitungen und Killing Vektoren in der allgemeinen Relätivitätstheorie

Anton Prokhorov

3. Februar 2009

Die von Einstein entwickelte allgemeine Relativitätstheorie (ART) ermöglichte nicht nur eine genauere Beschreibung der Planetenbahnen, oder etwa die GPS-Navigation, sondern auch die „Modernisierung“ der Kosmologie, die vorher als rein spekulative Disziplin galt ([3], Seite 223). Die Gleichungen der ART bilden eine neue Grundlage für die mathematische Formulierung der kosmischen Mechanik in der Sprache der Differentialgeometrie. Dies macht die Kosmologie und Astrophysik zu einem Anwendungsbereich der ART.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Der vorliegende Artikel ist als Hilfsmittel für Teilnehmer des Seminars „Symmetrien und Lie-Algebren in der (Teilchen)Physik“ gedacht. Da das gewählte Thema der Arbeit von den üblichen Themen des Seminars abweicht, habe ich mich entschlossen eine mehr oder weniger ausführliche Einführung in die ART zu schreiben[1]. Die Kenntnise der ART sind somit nicht erforderlich. Im Gegensatz dazu werden Kenntnise der speziellen Relätivitätstheorie (SRT) vorausgesetzt. Von besonderer Bedeutung sind die Grundbegriffe: invariantes Intervall, Lorentz-Transformationen, Postulate der SRT, Minkowski-Raum. Auf diesen Grundlagen werden die Prinzipien der ART aufgebaut.

Nach einer Einführung in die Ideen der ART widmen wir uns einem der Anwendungsgebiete - Kosmologie. Auch dies wird eine Art Einführung sein und erfordert keine speziellen Kenntnisse auf dem Gebiet der Astrophysik.

Den Einführungskapiteln folgt ein mathematisches Kapitel, in dem die für die saubere Formulierung der Lie-Ableitungen notwendigen mathematischen Grundlagen verschafft werden. Wichtig sind die Grundbegriffe der Differentialgeometrie (Mannigfalltigkeiten, Felder, Ableitungen) und nur wenige Sätze mit Beweisen (Eigenschaften von pull-back und push-forward, sowie die der Flüße). Im Mittelpunkt stehen die Lie-Ableitungen, die im Rahmen der Arbeit auf zwei verschiedenen Weisen formulliert werden und die Killing-Vektoren, die ihre unmittelbare Anwendung in der Kosmologie finden.

Zum Schluß wird ein Beispiel der Anwendung von Lie-Ableitungen und Killing-Vektoren in der Kosmologie diskutiert. Dieses führt uns im Endeffekt auf die s.g. Bianchi-Klassifikation. Bei der Vorbereitung dieses Kapitels wurde hauptsächlich das sechste Kapitel aus ([9]) verwendet. Es ist jedoch zu bemerken, dass dieses Buch extrem fachspezifisch ist. Von daher habe ich dort auch keine „Herleitungen“ finden können. Das ist insbesondere der Grund, warum der Begriff „Bianchi-Klassifikation“ im letzten Kapitel nur erwähnt und nicht weiterverwendet wird.

[1]Dabei habe ich mich sehr eng an ([7]) und ([3]) gehalten.

1.1 Grundlagen der ART

1.1.1 Beschleunigte Bezugssysteme

Eine vollständige mathematische Beschreibung jeder Bewegung kann nur im Bezug auf ein Koordinatensytem vorgenommen werden. Es macht keinen Sinn zu sagen, dass ein Körper sich bewegt, ohne zu sagen, relativ zu was er sich bewegt.

Es gibt Koordinatensysteme, Inertialsysteme genannt, in denen freie[2] Bewegungen geradlinnig und gleichmäßig verlaufen. Bewegen sich zwei Koordinatensysteme relativ zueinander geradlinnig und gleichförmig, und ist eines der beiden Systeme ein Inertialsystem, so ist auch das zweite System inertial[3].

Experimente zeigen, dass Naturgesetze, inklusive die Gesetze der Elektrodynamik, in je zwei Inertialsystemen die gleichen sind. Diese Aussage ist unter dem Namen „Relativitätsprinzip von Galilei“ bekannt. Das Prinzip zusammen mit dem Postulat der konstanten Lichtgeschwindigkeit ist für die Formulierung der SRT ausreichend.

Da das Relativitätsprinzip definitionsgemäß nur in Inertialsystemen gültig ist, die experimentell nur schwer zu realisieren sind, ist der Gültigkeitsbereich der SRT eingeschränkt. Die SRT ist eine Verallgemeinerung der klassischen Mechanik, die in der von Newton formulierten Form ebenso nur in Inertialsystemen gilt. Um einen Übergang zu Nichtinertialsystemen zu ermöglichen (etwa um den Ausdrück für die Corioliskraft herzuleiten) macht man Koordinatentransformationen.

Die Gleichungen der SRT lassen sich ebenso durch einfache Koordinatentransformationen auf nichtinertialsysteme verallgemeinern. Man merkt dabei relativ leicht, dass das invariante Intervall nach der Transformation nicht mehr ausschließlich aus den Quadraten der Koordinatendifferentiale besteht, sondern auch kompliziertere Produkte enthält[4].

Zur Veranschaulichung der letzten Aussage betrachtet man das invariante Interval der SRT, formuliert in kartesischen Koordinaten:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2;$$
$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,$$

mit $dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz)$,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Karthesische Koordinaten können (beispielsweise) bijektiv zu Kugelkoordinaten transformiert werden:

[2]Im Sinne des zweiten Newton‘schen Axioms

[3]Diese alles andere als trivialen Aussagen lassen wir ohne Beweis und verlassen uns auf Experimente

[4] [7], §82

$$(x, y, z) \to r(cos(\phi)sin(\theta), sin(\phi)sin(\theta), cos(\theta)).$$

Das Interval selbst soll dabei von der Koordinatentransformation nicht abhängen. Es folgt:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2sin^2(\theta)d\phi^2 - r^2d\theta^2;$$
$$ds^2 = g'_{\mu\nu}dx'^{\mu}dx'^{\nu},$$

mit $dx'^{\mu} = (cdt, dr, d\phi, d\theta)$ und

$$g'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}$$

Die so genannte Metrik, oder metrischer Tensor $g_{\mu\nu}$ war ursprunglich konstant. Nach der Transformation ist er zu einem Koordinatenabhängigen Tensor geworden.

Im Falle einer allgemeinen Koordinatentransformation, die auch die Zeitkomponente $ct = x^0$ betrifft, sind die ursprünglichen Koordinaten $(x^0, x^1, x^2, x^3) = \vec{x}$ Funktionen der neuen Koordinaten $(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) = \vec{\tilde{x}}$. Allgemeiner schreibt man für jede Komponente x^α von $\vec{x}$

$$x^\alpha = x^\alpha(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3).$$

Nach Einsetzen in den ursprunglichen Ausdruck für das Interval erhält man

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \Longleftrightarrow$$
$$ds^2 = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta}d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta \Longleftrightarrow$$
$$ds^2 = \tilde{g}_{\alpha\beta}d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta,$$

mit $\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta}$.

Die Form des Intervalls ds^2 war die formale Grundlage der SRT, die sowohl das Relativitätsprinzip, als auch das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit beinhaltet[5]. In Nichtinertialsystemen hat ds^2 eine andere Form (nicht aber den anderen Wert), was dazu führt, dass Gesetze der SRT in solchen Systemen eine andere, kompliziertere Gestalt haben werden[6]

1.1.2 Erinnerung: Metrik in der SRT

Die Größen $g_{\mu\nu}$ sind aus der Differentialgeometrie bekannt. Durch Bilden des Betragsquadrats ds^2 des Vektors dx^μ: $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ legen sie die Geometrie, oder die Metrik und somit die Abstände zwischen je zwei beliebig nah beieinanderliegenden Punkten in jeder Umgebung des Raums fest. Das aus $g_{\mu\nu}$ gebildete Objekt wird zweifach kovarianter Tensor genannt[7]. In der SRT ist dieser per Definition von ds^2 symmetrisch. Insgesammt gibt es daher 10 voneinander unabhängige Komponenten mit verschiedenen Indizes $\mu\nu$.

Eine spezielle Metrik der Form $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{ik} = 0$ für $i \neq j$ nennt man Galilei‘sch[8] oder, wie heute oft zu sehen ist[9], Lorentz-Metrik. Diese Form der Metrik ist eine der Grundlagen der SRT, formuliert in einem Inertialsystem. **Jede Abweichung von der Form hat entweder Nichtinertialität des Koordinatensystems, oder, wie wir sehen werden, Gravitationsfelder zur Folge.**

1.1.3 Das Äquivalenzpinzip

Das so genannte Äquivalenzprinzip bildet eine Grundlage der ART und lässt sich im Rahmen dieser Theorie nicht herleiten, oder beweisen.

Die Gravitationsfelder haben bekanntlich eine sehr bemerkenswerte Eigenschaft: sie wirken auf *alle* Körper *gleich*. Im Sinne von der T. Filk‘s Definition[10] ist die Gravitationskraft eine der s.g. *universellen* Kräften. Solche Kräfte definiert man anhand ihrer Eigenschaften:

- Sie wirken auf alle Materialien gleichermaßen
- Es gibt keine Abschirmung gegen sie[11]

Diese Eigenschaften der Gravitation erlauben eine sehr enge Analogie zwischen den Gravitationskräften und Kräften in Nichtinertialsystemen herzustellen[12]. Die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung dafür ist die Gleichheit (Proportionalität) der trägen Masse und der schweren Masse.

Um diese Idee zu verstehen soll eine einfache Rechnung durchgeführt werden. Man betrachtet einen frei fallenden Körper in einem *homogenen* Gravitationsfeld g. Sei m_s dessen schwere und m_t seine träge Massen. $y(t)$ sei die momentane Position (Höhe) des Körpers im Bezug auf ein vorher gewähltes Koordinatensystem. Gemäß der Definition von m_t und m_s gilt:

$$m_t\ddot{y} = m_s g^{13}.$$

Es ist möglich in das mit dem Körper mitbewegte nichtinertiale Koordinatensystem überzugehen, indem die Transformation

$$y = \tilde{y} + \frac{g}{2}t^2 \tag{1}$$

vorgenommen wird. Man bekommt leicht:

[5]Siehe [7], §2

[6]Betrachtet man den Übergang zu rotierenden Systemen (Kreisfrequenz ω), so bekommt man tatsächlich eine Art Zentrifugalkraft. Sei

$$x^1 = \tilde{x}^1cos(\omega t) - \tilde{x}^2sin(\omega t)$$
$$x^2 = \tilde{x}^1sin(\omega t) + \tilde{x}^2cos(\omega t)$$
$$x^3 = \tilde{x}^3$$
$$t = \tilde{t}.$$

Nach Einsetzen von x^1, x^2 und x^3 in die bekannte Form des Intervalls $ds^2 = c^2dt^2 - d(x^1)^2 - d(x^2)^2 - d(x^3)^2$ bekommt man

$$ds^2 = \left\{c^2 - 2\Phi\right\}d\tilde{t}^2 +$$
$$+ 2\omega\tilde{x}^2d\tilde{x}^1d\tilde{t} - 2\omega\tilde{x}^1d\tilde{x}^2d\tilde{t} - d(\tilde{x}^1)^2 - d(\tilde{x}^2)^2 - d(\tilde{x}^3)^2,$$

mit $\Phi = -\frac{\omega^2}{2}((\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^2)^2)$ dem s.g. Zentrifugalpotenzial. Da später gezeigt wird, dass die ersten Ableitungen des metrischen Tensors relätivistische Kräfte definieren, ist der Name gerechtfertigt (Siehe [3], Kapitel 9).

[7]Die genaue Definition eines Tensors wird in den mathematischen Grundlagen diskutiert. An dieser Stelle kann man die Bezeichnung “zweifach kovariant” so verstehen, dass man die Wirkung der Metrik $g_{\mu\nu}$ auf beliebige Vektoren dx^μ und dx^ν untersucht. Nach Anwenden der Metrik auf *zwei* solche *Vektoren* entsteht ein Skalar $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Die Wörter *zwei* und *Vektoren* sorgen dafür, dass das Objekt $g_{\mu\nu}$ *zweifach kovariant* genannt wird.

[8] [7], §82

[9]Siehe die entsprechenden Kapitel zur SRT in [3], [8], [5]

[10] [2], § 12.2 "Geometrisierung des Raumes", Seite 165

[11]Gilt eine der beiden Aussagen nicht mehr, so nennt man solche Kräfte *differentiell*. Beispiele für differentielle Kräfte gibt es viele. Das sind vor allem die bekanntesten Kräfte, wie Zug-, Druckkräfte, elektromagnetische Kräfte.

[12] [7], §81; [3], Kapitel 10

[13]Diese Bewegungsgleichung schreibt man normalerweise in der Form $\ddot{y} = g$. Es wird dabei stillschweigend angenommen, dass $m_s = m_t$ ist.

$$m_t\ddot{\tilde{y}} = g(m_s - m_t).$$

Bei der Herleitung dieser letzten Relation wurden keine zusätzlichen Kenntnisse über die Struktur des fallenden Körpers benötigt. Es kann daher ein vollkommend beliebiger Körper sein. Nimmt man $m_s = m_t$ an, so folgt sofort

$$\ddot{\tilde{y}} = 0 \tag{2}$$

die Gleichung eines freien Teilchens! Das impliziert, dass in einem mitfallenden Nichtinertialsystem (dieses wird ja im Gravitationsfeld g beschleunigt) bewegt sich ein Körper entsprechend dem Trägheitsgesetz geradlinnig und gleichförmig.

Erinnert man an die Definition von Inertialsystemen aus dem Abschnitt (1.1.1), so lässt sich dieses beschleunigte Koordinatensystem auch mit einem Inertialsystem identifizieren.

Die Aussage "Schwere und träge Massen sind gleich" nennt man *schwaches Äquivalenzprinzip*. Es ermöglich die Fortsetzung des Begriffs "Inertialsystem" auf Fälle, in denen *homogene* Gravitationsfelder vorhanden sind. Wichtig dabei ist, dass diese Fortsetzung sich zunächst auf mechanische Vorgänge bezieht.

Die von Einstein vorgeschlagene Formulierung des Prinzips geht ursprunglich auf Galilei zurück[14], der vermutet hat, dass *alle* Naturgesetze in Inertialsystemen dieselben sind. Das s.g. *starke* oder Einstein'sche Äquivalenzprinzip lautet somit:

"In einem frei fallenden Koordinatensystem laufen alle Vorgänge so ab, als ob kein Gravitationsfeld vorhanden sei."

Dessen andere Formulierung lautet[15]:

"In einem frei fallenden Koordinatensystem gelten die Gesetze der SRT."

Hieraus folgt die berühmte Unmöglichkeit zwischen einem frei fallenden Fahrstuhl und einer sich im gravitationsfreien Raum (etwa beliebig weit von den Massen des Universums entfernt) befindenden Fahrstuhlkabine zu unterscheiden. Genauso folgt die „Äquivalenz" von Gravitationsfeldern und Feldern, die in Nichtinertialsystemen erscheinen, indem man etwa an einen im gravitationsfreien Raum beschleunigten Fahrstuhl und an eine auf dem Erdboden stehende Fahrstuhlkabine denkt. Will man ein Gravitationsfeld beschreiben, so reichen die Gesetze der SRT aus, die nach einer entsprechenden Koordinatentransformation bereits die richtigen Gleichungen der Gravitation liefern.

Die angenommene Homogenität des Gravitationsfeldes ist bei den oberen Überlegungen extrem wichtig, denn die Gleichung (2) nimmt nur bei konstantem g ihre Form an. Hängt g zusätzlich vom Ort $\tilde{y}$ ab, so bekommt man nach Einsetzen der Transformation $y = \tilde{y} + \frac{g(\tilde{y})}{2}t^2$

$$m_t\ddot{\tilde{y}} = g(\tilde{y})(m_s - m_t) - m_t\frac{\ddot{g}(\tilde{y})}{2}t^2,$$

was selbst bei $m_s = m_t$ nicht mehr die Gleichung eines freien Teilchens ist.

Aus diesem Grund ist das Äquivalenzprinzip nur lokal, für kleine Umgebungen gültig, in denen die Ortsabhängigkeit der Gravitation vernachläßigbar ist. Die Aussage: „Gravitationsfelder sind zu Beschleunigungsfeldern äquivalent" ist daher nur mit Vorsicht zu genießen, da auch diese Äquivalenz nur lokal gültig ist. Die in der Natur vorkommenden Gravitationsfelder sind zwangsläufig inhomogen und können daher nur lokal durch Koordinatentransformationen eliminiert werden. Eine globale Eliminierung ist nicht möglich.

Um das zu veranschaulichen, betrachtet man wieder einen fallenden Fahrstuhl. Wie bereits hergeleitet wurde, kann man in diesem Fahrstuhl die Gesetze der klassischen Mechanik (als Grenfall der SRT) beobachten. Ein freies Teilchen bewegt sich entsprechend der Gleichung (2). Der Raum, wo dieses Verhalten stattfinden kann ist aber räumlich (Kabine des Fahrstuhls) und zeitlich (bis zur Kollision mit dem Erdboden) begrenzt. Durch die Koordinatentransformation (1) kann man das Gravitationsfeld g nur innerhalb der Kabine eliminieren. Das tatsächlich vorhandene Gravitationsfeld der Erde kann dadurch nicht verschwinden[16].

1.1.4 Metrik in der ART

In (1.1.2) wurde die Zahl der unabhängigen Komponenten von $g_{\mu\nu}$ angesprochen, die sich im Fall der SRT auf 4 reduziert. Es gibt im Allgemeinen insgesamt 10 voneinander unabhängige Komponenten der Metrik. Das bedeutet, dass sie im Allgemeinen nicht durch 4 Koordinatentransformationen von x^α (etwa der Form (1)) auf eine beliebige Form gebracht werden kann[17].

In der SRT ist es tatsächlich möglich durch Koordinatentransformationen von x^α die Metrik auf eine vorgegebene Diagonalform zu bringen. Das hat zur Folge, dass Beschleunigungskräfte, die in Nichtinertialsystemen vorkommen und die sich durch

$$g_{\mu\nu} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bemerkbar machen durch die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems und durch eine einzige Koordinatentransformation überall eliminiert werden können[18].

Gravitationskräfte sind zu den oben erwähnten Kräften äquivalent, aber nur lokal. Sie können nicht durch eine einzige Transformation der Koordinaten überall eliminiert werden, ansonsten würde die Lokalität verletzt. Das hat zur Folge,

- dass Gravitationsfelder durch eine geeignete Wahl von $g_{\mu\nu}$ beschrieben werden können, und
- dass $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ im Allgemeinen mehr als 4 von Null verschiedene ortsabhängige Komponenten haben muss.

Ist es nicht möglich die Metrik durch eine einzige globale Transformation auf die Lorentzform zu bringen, so handelt es sich um einen gekrümmten Raum. Die Gravitation wird daher oft mit einer Krümmung des Raums identifiziert ([3], Kapitel 13).

[14] [2], §4.3 "Galileo Galilei", Seite 55

[15] [3], Kapitel 10

[16] Dass in Gravitationsfeldern beschleunigte Koordinatensysteme durchaus, wie Inertialsysteme wirken können, zeigen die Aufnahmen aus Satellitenlabors. Alle Vorgänge laufen so ab, als gäbe es kein Gravitationsfeld, doch das bedeutet nur das lokale Verschwinden der Gravitation.

[17] [7], §82

[18] also,

$$g_{\mu\nu} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.1.5 Bewegungsgleichung eines freien Teilchens.

Aus der theoretischen Physik ist bekannt, dass Bewegungsgleichungen als Folgerungen des Variationsprinzips aufgefasst werden können[19]. Die Bahnkurven stellen Extremalwerte von Funktionalen dar (*Hamiltonprinzip*). Das Problem der Aufstellung von Bewegungsgleichungen, die im Allgemeinen Vektorgleichungen sind, reduziert sich auf ein anderes Problem - Aufstellung eines geeigneten skalaren Funktionals:

$$S = \int L(q(t), \dot{q}(t), t)dt,$$

mit $L(q(t), \dot{q}(t))$ der Lanrange-Funktion, t der Zeit und q der verallgemeinerten Koordinate des zu untersuchenden mechanischen Systems. Das Funktional selbst heißt *Wirkung*[20].

Ist C eine Kurve, t ein freier Parameter auf C und $x^\mu = x^\mu(t)$ Koordinaten eines Punktes auf C, so lässt sich deren Länge bekanntlich aus dem Betrag ds der Einheitstangente $\frac{dx^\mu(t)}{dt}$ durch

$$\begin{aligned} S &= \int_C ds = \int_C \sqrt{\tfrac{dx_\mu}{dt}\tfrac{dx^\mu}{dt}}dt = \\ &= \int_C \sqrt{g_{\mu\nu}\tfrac{dx^\mu}{dt}\tfrac{dx^\nu}{dt}}dt = \int_C \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} \end{aligned}$$

berechnen[21].

Man kann zeigen([7], §8), dass die Wirkung eines relativistischen freien Teilchens in der SRT sich als

$$S = -mc^2 \int \sqrt{1 - \tfrac{v(t)^2}{c^2}}dt$$

schreiben läßt . Den Ausdruck kann man in der 4-Vektor Schreibweise etwas kürzer schreiben, nämlich:

$$S = -mc \int_C ds(t), \tag{3}$$

wobei, $ds(t) = \sqrt{c^2dt^2 - d\vec{r}^2} = cdt\sqrt{1 - \frac{\vec{v(t)}^2}{c^2}}$, oder $ds = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$ mit der Lorentz-Metrik $g_{\mu\nu}$ und dem 4-Vektor $x^\mu(t) = (ct, \vec{r}(t))$.

Die Wikrung in der SRT ist somit bis auf konstante Faktoren die Länge der Weltlinie eines Teilchens im Minkowski-Raum.

Vorteile dieser Schreibweise sind einleuchtend. Zum Einem wird eine *skalare* Größe (hier $ds(t) = cdt\sqrt{1 - \frac{\vec{v(t)}^2}{c^2}}$) auf Extremwerte untersucht, zum Anderen ist die Lorentzinvarianz des Ausdrucks offensichtlich, denn ds ist das invariante Lorentzskalar. Das Integral selbst ist entlang aller möglichen Weltlinien des Teilchens zu betrachten, aber die Ergebnisse hängen auf keine Weise vom gewählten Koordinatensystem ab.

Um (3) auf Extremalwerte zu untersuchen geht man oft folgendermaßen vor([7], §8). Man wählt zwei feste Punkte a, b im Minkowski-Raum und betrachtet

$$S = -mc\int_a^b ds(t).$$

Dieses Integral hängt nun ausschließlich davon ab, entlang welcher Bahnkurve zwischen a und b intergiert wird. Von nun an ist es möglich die Variation δS zu bilden, indem über alle möglichen Funktionen $s(t)$ variiert wird (der übersicht halber wird die t Abhängigkeit nicht mehr geschrieben).

Es gilt:

$$\delta S = -mc\delta\int_a^b ds = -mc\int_a^b \delta\sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}.$$

Die Lorentz-Metrik in der SRT ist konstant, was die Berechnung von $\delta\sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \frac{g_{\mu\nu}dx^\mu\delta dx^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}} = \frac{dx_\nu\delta dx^\nu}{ds}$ etwas erleichtert:

$$\delta S = -mc\int_a^b \tfrac{dx_\nu\delta dx^\nu}{ds} = -mc\int_a^b u_\nu\delta dx^\nu,$$

wobei die Definition der 4-Geschwindigkeit $u_\nu = \frac{dx_\nu}{ds}$ verwendet wurde.

Durch einmalige partielle Integration bekommt man:

$$\begin{aligned} \delta S &= -mcu_\nu\delta x^\nu|_a^b + mc\int_a^b \delta x^\nu du_\nu = \\ &= mc\int_a^b \delta x^\nu\tfrac{du_\nu}{dt}dt, \end{aligned}$$

wobei t immer noch der beliebiger Parameter auf der Kurve C zwischen a und b ist. Die Variation δx^ν ist an den Randpunkten gleich Null zu setzen, da diese Punkte als raumfest anzunehmen sind.

Aus der Forderung $\delta S = 0$ folgt sofort die Bewegungsgleichung eines spezielrelativistischen freien Teilchens:

$$du_\nu = 0. \tag{4}$$

Die Gleichung entspricht den natürlichen Vorstellungen von einer gleichmäßigen und geradlinnigen freien Bewegung in einem Inertialsystem, bei der keine Beschleunigungen auftreten.

Ein wichtiger Punkt wurde bereits angesprochen: $\delta g_{\mu\nu} = 0$. Die Metrik des Minkowski-Raums ist definitionsgemäß konstant, was bei Anwesenheit von inhomogenen Gravitationsfelder nicht mehr der Fall ist (Siehe (1.1.4)). Von daher kann man nicht mehr erwarten, dass die aus dem Variationsprinzip folgende Bewegungsgleichung eines allgemeinrelativistischen Teilchens die gleiche ist, wie (4).

Man betrachtet wieder das schon erwähnte Integral

$$\begin{aligned} S &= -mc\int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu}(x^\alpha)dx^\mu dx^\nu} = \\ &= -mc\int_a^b ds, \text{ wobei} \end{aligned}$$

die Metrik eine Funktion des 4-Vektors x^α ist. Das Variationsproblem kann auch hier direkt durch Bilden der Variation $\delta\sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \delta ds$ gelöst werden ([7], §87).

Es gilt:

$$\begin{aligned} \delta ds^2 &= 2ds\delta ds = \delta(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) = \\ &= dx^\mu dx^\nu\tfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha + 2g_{\mu\nu}dx^\mu\delta dx^\nu. \end{aligned}$$

Daraus folgt der Asdruck für δds:

[19] Siehe [6], §2

[20] Der Beweis der Existenz so eines Funktionals für jeses physikalische System soll hier nicht diskutiert werden

[21] Hierbei wurde die übliche „Physikernotation“ verwendet, bei der dt im Sinne von infinitesimal kleiner Änderung von t zu verstehen ist.

$\delta ds = 1/2 \left\{ \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha + 2g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{d\delta x^\nu}{ds} \right\} ds.$

Nach einsetzen von δds in $\delta S = 0 = -mc\int_a^b \delta ds$ und nach einer partiellen Integration im zweiten Term ergibt sich:

$$0 = -mc\int_a^b \left\{ \frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha - \frac{d}{ds}(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds})\delta x^\nu \right\} ds.$$

Nach einer Umbenennung des Index ν im zweiten Term folgt:

$$0 = -mc\int_a^b \left\{ \frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{ds}(g_{\mu\alpha}\frac{dx^\mu}{ds}) \right\} \delta x^\alpha ds.$$

Da die Variation δx^α definitionsgemäß beliebig ist, ist das Integral genau dann Null, wenn die Relation

$$0 = \frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{ds}(g_{\mu\alpha}\frac{dx^\mu}{ds})$$

gültig ist. Weiter erhält man mit $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$:

$$0 = \frac{1}{2}u^\mu u^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} - g_{\mu\alpha}\frac{d^2x^\mu}{ds^2},$$

oder

$$0 = \frac{1}{2}u^\mu u^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}u^\nu u^\mu - g_{\mu\alpha}\frac{du^\mu}{ds}.$$

Den zweiten Term kann man zusätzlich durch Vertauschung von ν und μ auf die Form $-\frac{1}{2}u^\mu u^\nu(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu})$ bringen, die obere Gleichung ist mit $g^{\alpha\gamma}$ ($g^{\alpha\gamma}g_{\mu\alpha} = \delta^\gamma_\mu$) zu multiplizieren. Es folgt:

$$0 = \frac{du^\gamma}{ds} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu}u^\mu u^\nu, \tag{5}$$

mit $\Gamma^\gamma_{\mu\nu} = g^{\gamma\alpha}\left\{ \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$ den s.g. Christoffel-Symbolen[22].

Wie leicht zu sehen ist, beinhaltet die Gleichung (5) genauso, wie (4) den klassischen Beschleunigungsterm $\frac{du^\gamma}{ds}$. Der erhebliche Unterschied zwischen (4) und (5) ist der Term, der die ersten Ableitungen der Metrik enthält. Bringt man $\Gamma^\gamma_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ auf die andere Seite, so erhält dieser Ausdruck sofort die klassische Bedeutung einer Kraft, denn es gilt:

$$\frac{du^\gamma}{ds} = -\Gamma^\gamma_{\mu\nu}u^\mu u^\nu.$$

Da $-\Gamma^\gamma_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ eine Kraft ist, und da $\Gamma^\gamma_{\mu\nu}$ die ersten Ableitungen der Metrik enthalten, kommt ihr die Rolle eines Potenzials zu.

Andererseits kann man die Definition des Differenzials ändern und schreiben: $Du^\gamma = du^\gamma + \Gamma^\gamma_{\mu\nu}u^\mu dx^\nu$. Dieses "großgeschriebene“ Differenzial nennt man kovariantes Differenzial ($\frac{D}{Ds}$ nennt man auch kovariante Ableitung, wobei s ein zunächst beliebiger Parameter ist). Die Bewegungsgleichung sieht in dieser Notation anders aus:

$$\frac{Du^\gamma}{Ds} = 0.$$

In dieser Form beschreibt die Gleichung die klassische freie Bewegung. Ein Teilchen, das sich im Gravitationsfeld bewegt, spürt keine Kraft, ist somit immer noch ein freies Teilchen. Die Anwesenheit der Gravitation führt aber dazu, dass die Definition des Differenzials (bzw. der Ableitung) geändert werden muss. Die klassische Bewegungsgleichung $\frac{du^\gamma}{ds} = 0$ ändert sich aber nicht.

Ob man die erste Bedeutung der Gravitation als Kraft oder die zweite Bedeutung als Änderung der Raumzeitstruktur nimmt ist ohne Bedeutung, denn die Bewegungsgleichung kann sich dadurch nicht ändern. Was sich auch nicht ändert ist die Abhängigkeit der Bewegungsgleichung von der Metrik $g_{\mu\nu}$, die zunächst unbekannt ist. Genau an diesem Punkt war die geniale "Nase" Einsteins nötig um den Zusammenhang zwischen der Metrik des Raums und der Materie zu finden.

1.2 Einstein‘sche Feldgleichungen

Die Rahmen der Arbeit erlauben leider nicht eine vollständige Diskussion der Einstein‘schen Feldgleichungen zu führen, daher beschränken wir uns auf das Grundlegende[23].

Die Überlegungen Einsteins zur Aufstellung seiner Feldgleichungen basieren auf den Ideen Machs. Nach dem s.g. Mach‘schen Prinzip[24] kommt dem Raum keine eigene Bedeutung zu. Im Hinblick auf die Feldgleichungen verstand Einstein darunter, dass die Quellterme (Masse, Energie) die Metrik des Raums (und damit auch die Kräfte und lokale Inertialsysteme) bestimmen.[25] Schreibt man diese Ideen in einer Formalen Form, so könnte diese etwa wie folgt aussehen:

$$g_{\mu\nu} = F(T_{\mu\nu})$$

mit $T_{\mu\nu}$ dem Energie-Impuls-Tensor und F einer unbekannten Funktion. Da der Energie-Impuls-Tensor definitionsgemäß divergenzfrei ist, muss auch die Divergenz der linken Seite der Gleichung Null ergeben (was der Energie-Impuls-Erhaltung entspricht ([7], §32)). Eine zusätzliche Forderung ist die Symmetrie des Tensors (was der Drehimpulserhaltung entspricht ([7], §32)). Außerdem muss die Gleichung im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten in die Newton‘schen Bewegungsgleichung übergehen ([3], Kapitel 21).

Man zeigt[26], dass diese Forderungen die Feldgleichungen bereits feststellen:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

wobei $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}$ der Einstein-Tensor ist. Hier ist $R_{\mu\nu}$ der s.g. Ricci-Tensor, der von den ersten und zweiten Ableitungen der Metrik festgelegt wird und R ist die Spur von $R_{\mu\nu}$ der s.g. Ricci-Skalar[27].

Die Feldgleichungen sind hochgradig nichtlinear. Das erklärt bereits die Tatsache, dass jede Energieform mittels

[22] In der Differentialgeometrie haben diese Größen eine tiefgehende Bedeutung. An der Stelle lohnt es sich die Vorstellung von $\Gamma^\gamma_{\mu\nu}$ als einfache mit den ersten Ableitungen der Metrik verbundene Zahlen ([7], § 86; [3], Kapitel 11).

[23] Für weitere Information siehe z.b. [1]; [7]: §94, 95; sowie [5].

[24] Der Begriff wurde im Jahre 1918 - also nach Machs Tod von Einstein geprägt

[25] Sicherlich war Einstein etwas enttäuscht, als er herausgefunden hatte, dass seine Gleichungen die s.g. Gravitationswellen, also, kleine Störungen der Metrik im ansonsten leeren Raum, vorhersagen.

[26] Siehe S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology, Kapitel 6.2.*
Eine etwas ausführlichere Herleitung der Einstein‘schen Gleichungen aus dem Variationsprinzip (die ursprünglich von Hilbert stammt), siehe in ([7], § 95)

[27] Zu Ricci-Tensor und Ricci-Skalar siehe z.B. [5], §36

$E = mc^2$ mit der schweren Masse verknüpft ist. Das bedeutet, dass das Gravitationsfeld selbst zu seiner eigenen Stärke durch Änderung der schweren Masse beiträgt (Nordtvedt-Effekt). Im Gegensatz dazu sind z.B. elektromagnetische Felder linear im Sinne der Linearität der Maxwell'schen Gleichungen. Der Grund dafür ist die Konstanz der Ladung.

Die Einstein'schen Feldgleichungen verknüpfen eine geometrische Eigenschaft des Raums-dessen Metrik (linke Seite)-mit einer physikalischen Eingeschaft des Raums-dessen Energiedichte (rechte Seite). Ist die Form der Metrik bekannt, so lassen sich Bewegungsgleichungen für Testmassen schreiben.

Da die Gleichungen nichtlinear und gekoppelt sind, gibt es im Allgemeinen keine analytische Lösung. Das bedeutet, dass entweder numerische Verfahren eingesetzt werden müssen, oder dass zusätzliche vereinfachende Annahmen über den Energie-Impuls-Tensor oder über die Metrik selbst gemacht werden.

Die Kosmologie als eines der Anwendungsgebiete der ART zeichnet der oft zum Erfolg führende zweite Weg. Der Gegenstand dieser Theorie wird im nächsten Kapitel diskutiert.

1.3 Kosmologie

Eine Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen definiert die ganze Raumzeit und somit den ganzen Kosmos. Aus diesem Grund sind die möglichen analytischen Lösungen der Feldgleichungen von besonderer Interesse.

Die Kosmologie beschäftigt sich mit den globalsten Fragen(Teil 19 in [4].), die ein Mensch über den Kosmos stellen kann. Wie ist unser Universum entstanden? Wie alt ist es? Wie ist es aufgebaut? Wie ist die Materie verteilt? Was ist die zeitliche Dynamik des Kosmos (gemeint sind Zeiträume in der Größenordnung von 10^9 Jahren.)?

Um nur hoffen zu können eine Antwort auf die Fragen zu bekommen, braucht man Ausgangspunkte, die nur mittels Beobachtungen gewonnen werden können. Die moderne Vorstellung über unseren Kosmos ist im s.g. kosmologischen, oder Kopernikanischen Prinzip formulliert[28]:

Im Universum sind alle Positionen und Richtungen gleichwertig.

Eine weitere experimentelle Tatsache deutet daraufhin, dass die Materie des Universums im Mittel elektrisch neutral ist [5], was die Gravitation zu dominierender Kraft macht. Das führt auch dazu, dass die Einstein'schen Feldgleichungen von den Maxwell-Gleichungen separiert werden und einzeln gelöst werden können.

Von den Modellen des Universums erwartet man eine zumindest qualitative Beschreibung der Rotverschiebung und des Hubble'schen Gesetzes. Der erste Effekt wird besonders gut in den fernen Lichtquellen unseres Universums beobachtet und lässt sich in der ersten Näherung auf den Doppler-Effekt zurückführen. Dieser kann aber nur in einem globalen Inertialsystem stattfinden, dessen Existenz für unseren Kosmos a priori nicht offensichtlich ist. Daher ist diese analogie nur näherungsweise gültig.

Das Hubble'sche Gesetz verknüpft die beobachtete Rotverschiebung z mit der Entfernung r zu der Quelle:

$$z = (H/c)r.$$

[28]Siehe [3], §49

Die so genannte Hubble-Konstante H wurde zuerst von Hubble selbst abgeschätzt. Sein Wert lag im Bereich $500\,km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$([29] und wurde seit den 30-er Jahren mehrmals verbessert. Der heutige Wert liegt bei $60\,km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$ ([4], Kapitel 19).

Die gut durch Experimente bestätigte Annahme der Isotropie und Homogenität des Universums ([4] §19.2), legt die Form der Metrik des Raums eindeutig fest ([7], §116; [5], § 60, 61):

$$g_{\mu\nu} = c^2dt^2 - \tag{6}$$

$$-R(t)^2\left\{\frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2} + \sigma^2(d\theta^2 + sin^2(\theta)d\varphi^2)\right\} \tag{7}$$

mit unbekannten Funktionen $R(t)$ (dem s.g. Skalenfaktor), $\sigma(t) \in (0,1)$, $k = -1, 0, 1$ und den Winkelkoordinaten θ und φ. Die genaue Gestallt dieser Funktionen bekommt man erst nach Einsetzen von $g_{\mu\nu}$ in die Einstein'schen Feldgleichungen und deren Lösung.

Diese s.g. Robertson-Walker-Metrik (RWM) wird in [3], Kapitel 49, 50, sowie in [5] §60-65 ausführlich diskuttiert. Der Gegenstand dieser Diskussion sind geometrische Größen, die durch (RWM) bestimmt werden: Länge, Flächeninhalt, Volumen und der Einfluß auf die oben erwähnten Effekte (Das Hubble-Gesetz, sowie die Rotverschiebung werden durch (RWM) qualitativ beschrieben). Solche Diskussionen findet man auch in anderen Büchern über Kosmologie, denn die (RWM) stellt aufgrund ihrer Einfachheit, Anschau und Effizienz ein Standartmodell dar.

Man unterscheidet 3 Fälle: $k = -1$, $k = 0$ und $k = 1$. Diese entsprechen hyperbolischen, flachen und sphärischen Universen. Nach Einsetzen der (RWM) in die Feldgleichungen bekommt man in der Regel die s.g. Friedmann-Gleichungen:

$$\begin{aligned} &K_m = const = \tfrac{8\pi G}{3c^2}\rho_{mat}R^3; \\ &K_s = const = \tfrac{8\pi G}{3c^2}\rho_{str}R^4; \\ &\dot{R}^2 - \tfrac{K_s}{R^2} - \tfrac{K_m}{R} - \tfrac{3}{3}\Lambda R^2 = -k, \end{aligned}$$

wobei R der Skalen-Faktor aus der (RWM), ρ_{mat} und ρ_{str} die Dichten der Materie und Strahlung und Λ die s.g. kosmologische Konstante sind. Die physikalische Natur von Λ bleibt bisher unerklärt ([3], Kapitel 53). Man vermutet, die Existenz von exotischen Materiearten, die lokal die Einstein'schen Gleichungen unverändert lassen, sie global aber zu

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\tfrac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

ändern.

Den Friedmann Gleichungen entnimmt man leicht die Wichtigkeit der Konstante k. Die Lösung $R(t)$ kann je nach Werten von k oszillierend oder unbeschränkt sein. Nimmt man für $R(t)$ den Radius des Universums an, so bekommt man sofort interessante Interpretationen der Lösungen. Ein absolut leerer Raum mit $\rho_{str} = \rho_{mat} = 0$ und $\Lambda = 0$ kann bei $k = -1, 0$ ewig expandieren und bei $k = -1$ zwischen $R = 0$ und $R = R_0$ oszillieren. Bei negativem Λ bleibt ein solcher Kosmos immer beschränkt und bei $\Lambda > 0$ gibt es immer nur unbeschränke Lösungen $R(t)$([3], Kapitel 52).

[29]$Mpc = 10^6\,pc$). Ein Parsec pc ist die Entfernung ($\approx 3,25 \cdot 10^{16}\,m$), aus der der Radius der Erdbahn um die Sonne ($1,5 \cdot 10^{11}\,m$) unter dem Winkel von einer Bogensekunde erscheint.

Die heutigen Beobachtungen deuten auf $k = 0$ und $\Lambda > 0$ hin ([3], Kapitel 53). In diesem Fall sagt das Friedmann-Modell eine beschleunigte Expansion des Universums - das, was heute tatsächlich stattfindet[30].

Man muss etwas vorsichtig sein, wenn die Friedmann-Gleichungen analysiert werden, denn die Homogenität und Isotropie des Universums als grundlegende Voraussetzungen für deren Aufstellung im Allgemeinen nicht vorliegen.

In ([2], Seite 182, §13.5.2) lesen wir z.B.

Man kann zurecht fragen, ob wir wirklich eine Homogenität und Isotropie des Raumes beobachten. Der sichtbare Teil des Universums hat einen Radius von ungefähr 10^{10} Lichtjahren. Unsere Galaxie andererseits hat einen Radius von 10^5 Lichtjahren. Die meisten Galaxien sind in Clustern oder Haufen mit einem Durchmesser von rund 10^7 Lichtjahren konzentriert. Bis zu dieser Skala beobachtet man somit durchaus reichhaltige Strukturen auch in der Form der Materieverteilung. Es handelt sich also um maximal zwei bis drei Größenordnungen, für die das kosmologische Prinzip gültig ist.

Das Kosmologischen Prinzip ist offensichtlich eine Näherung, die bei gewissen Bedingungen hilfreich ist. So liegen die Homogenität und Isotropie der Materieverteilung tatsächlich vor, wenn über Distanzen der Größenordnung 10^8 Lichtjahre gemittelt wird. Das hat zur Folge, dass auch die Robertson-Walker-Metrik und die daraus folgenden Friedmann-Modelle nur näherungsweise gültig sind.

Das gibt Anlass zu weiterer Suche nach der möglichen Form der Metrik, indem die Forderungen an $g_{\mu\nu}$ etwas geschwächt werden. Erlaubt man etwa die Anisotropie, so entsteht eine ganze Vielfallt von den s.g. homogenen Metriken, die homogene, aber nicht isotrope Universen beschreiben. Das wird der Gegenstand des letzten Kapitels der Arbeit sein.

2 Differentialgeometrische Aspekte

[31]

Man findet kaum einen Begriff, der für Physiker von vergleichsmäßiger Bedeutung ist, wie der Begriff eines Punktes. Schon in der Schule lernt man gewisse mechanische Problemme dadurch zu vereinfachen, indem statt ausgedehnter Objekte Punkte behandelt werden.

Auch in der ART hat sich das Konzept eines Punktes durchgesetzt: mit Punkten bezeichnet man Ereignisse. Man kann und soll an dieser Stelle die Frage stellen: „Was ist die Menge aller Ereignisse und welche Eigenschaften muss sie haben um physikalisch relevant zu sein?“.

Es ist leichter sich zunächst auf den zweiten Teil der Frage zu konzentrieren. Was erwartet man von so einer Menge? Natürlich möchten wir als Physiker Abstände messen können. Das bedeutet, dass es eine gewisse Verbindung zwischen benachbarten Punkten der Menge geben muss. Wir möchten außerdem stetige Funktionen definieren, was ebenso zu entsprechenden Forderungen an die Ereignismenge führt. Wir wollen noch, dass die Ereignisse nicht davon abhängen, welche Koordinaten wir nehmen [32]. Das führt zu entsprechenden Transformationsregeln der Ereigniskoordinaten. Auch sollte die Menge kontinuierlich sein (zumindest bis auf Abstände der Größenordnung $10^{-35}\, m$).

Gibt es ein mathematisches Konzept, das unseren Forderungen genügt? Die Antwort ist positiv und wird uns eine Weile beschäftigen.

2.1 Differenzierbare Mannigfalltigkeiten

Definition 2.1.1 *(Topologie). Sei M eine Menge. Sei $P(M)$ die Potenzmenge von M. Liegen folgende Eigenschaften vor*

- $M, \oslash \in P(M)$
- $\forall M \in P(M), \bigcup_i M_i \in P(M)$
- *Für* $M_1, ..., M_m \in P(M), m \in \mathbb{N}, \bigcap_{i=1}^m M_i \in P(M)$

dann nennt man $P(M)$ eine Topologie von M und M_i sind offene Teilmengen von M.

Eine Menge M wird topologisch, wenn, anschaulich gesprochen, gesagt wird welche Teilmengen von M offen und welche abgeschlossen im Sinne von den oben genannten Eigenschaften sind.

Die Topologie spielt eine entscheidende Rolle bei der Definition eines Grenzwerts([8], §1.2) und wird ebenso für die Definition der Stetigkeit notwendig sein. Die Stetigkeit spielt ihrerseits eine entscheidende Rolle in Physik, da nichts in der makroskopischen Welt sprunghaft, also, unstetig verlaufen kann.

Definition 2.1.2 *(Hausdorf-Raum) Ein topologischer Raum (Raum mit induzierter oder definierter Topologie) M zusammen mit $P(M)$ heißt Hausdorf'sch, wenn zu je zwei Punkten $P \neq Q \in M$ immer disjunkte Umgebungen $G, H \in P(M)$ mit $P \in G$, $Q \in H$ existieren.*

Das Konzept des Hausdorf-Raums ist entscheidend für die Eindeutugkeit des Grenzwertes. Wenn es um die Menge physikalischer Ereignisse geht, so muss sie zwangsläufig ein Hausdorf-Raum sein.

Definition 2.1.3 *(Atlanten und Mannigfaltigkeiten) Sei M eine topologische Menge, $n \in \mathbb{N}$. Eine n-dimensionale Karte von M ist ein Paar (U, φ), wobei $U \in P(M)$ und φ eine Bijektion von U auf eine offene Umbegung von $\mathbb{R}^n$ ist.*

Sei $k \in \mathbb{N} \bigcup \{+\infty\}$ und $I \subset \mathbb{N}$. Ein C^k-Atlas A von M ist eine Familie von Karten $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ mit

- $M = \bigcup_{i \in I} U_i$
- $\forall i, j \in I, U_i \bigcap U_j \neq \oslash$ *gilt:* $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \in C^k$*-Diffeomorph (Bijektiv und in beiden Richtungen C^k)*

Eine n-dimensionale C^k Manigfaltigkeit $\{M, A\}$ ist ein Hausdorf-Raum M mit einem C^k-Atlas A, bestehend aus Homeomorphismen $\varphi_i : U_i \subset \circ M \rightarrow V_i \subset \circ\mathbb{R}^n$[33].

[30] Die Entfernungsbestimmung in der Astronomie ist ein sehr aufwändiges und vor allem mehrstufiges Verfahren. Man spricht in diesem Zusammenhang von der kosmischen Entfernungsleiter. Siehe dazu ([3], Kapitel 51).

[31] Das Kapitel ist als Resultat einer Überarbeitung von [8], Kapitel 1, 2, 3, 12 entstanden. Ich werde daher den Leser im Weiteren stillschweigend auf dieses Buch verweisen.

[32] In [9] findet man ein schönes Beispiel, das die angesprochene Koordinatenunabhängigkeit veranschaulicht: *On the surface of the Earth Moscow is Moscow no matter which latitude or longitude we assign to it*

[33] An dieser Stelle macht man eine zusätzliche Forderung, dass $\{M, A\}$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen muss. Dies wird hier der Einfachheit halber außer Acht gelasssen

Die Definition einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit basiert auf der Definition einer Karte, die stetig eine offene Teilmenge $U \subset \circ M$ einer zunächst abstrakten Menge M auf eine offene Umgebung V von $\mathbb{R}^n$ abbildet, wo die üblichen Gesetze der Analysis gelten. Diese Abbildung muss bijektiv erfolgen, was die Existenz von $\varphi^{-1} : V \subset \circ\mathbb{R}^n \to U \subset \circ M$ gewährleistet.

Die auch sehr wichtige Forderung $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \in C^k$ ermöglicht einen stetig differenzierbaren Übergang von einer offenen Teilmenge $U_i \subset \circ M$ nach $U_j \subset \circ M$.

Da im Weiteren nirgendwo die Endlichkeit von k benötigt wird und da es in der Physik üblich ist den notwendigen Differenzierbarkeitsgrad anzunehmen, setzen wir $k = \infty$.

Mannigfaltigkeiten werden der Einfachheit halber ohne die entsprechenden Atlanten geschrieben.

2.2 Vektor- und Tensorfelder

Die Definition einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ermöglicht den Begrif einer differenzierbaren Funktion auf abstrakte Mengen fortzusetzen.

2.2.1 Konstruktion der Tangentialvektoren

Seien im Folgenden A ein Atlas und φ eine Karte aus A.

Definition 2.2.1 *Für eine C^∞-Mannigfaltigkeit M ist $F(M)$ der lineare Raum aller reelwertigen Funktionen $f : P \in M \to \mathbb{R}$ mit $\forall \varphi \in A : f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist.*

Definition 2.2.2 *Man definiert eine C^∞-Kurve γ auf M als eine Abbildung von einem offenen Intervall $I \subset \circ\mathbb{R}$ nach M so, dass $\forall \varphi \in A : \varphi \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ beliebig oft differenzierbar ist.*

Man befindet sich nun auf dem Weg zur Definition eines Tangentialvektors. In $\mathbb{R}^n$ wird so ein Vektor durch den Grenzwert

$$v(x) = lim_{\delta \to 0} \tfrac{\gamma(x+\delta) - \gamma(x)}{\delta}$$

definiert. Denkt man etwa an ein mechanisches Problem, so bezeichnet $v(x)$ den Geschwindigkeitsvektor, $\gamma(x)$ ist die Position eines Punktteilchens zur Zeit x.

Im Falle einer beliebigen C^∞-Mannigfaltigkeit M geht man ähnlich vor[34].

Durch Bilden der Verknüpfung $f \circ \gamma = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$ mit $f \in F(M)$ und $\gamma(0) = P \in M$ wird eine C^∞-Funktion auf $\mathbb{R}$ erzeugt. Für $t \in \mathbb{R}$ und $0 \leq \mu \leq n$ gilt:

$$\tfrac{d(f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\gamma(t))}{dt}|_{t=0} =$$
$$= \tfrac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial(\varphi\circ\gamma(t))^\mu} \tfrac{d(\varphi\circ\gamma(t))^\mu}{dt}|_{t=0} = \partial_\mu f \tfrac{d(\varphi\circ\gamma(t))^\mu}{dt}|_{t=0},$$

wobei $\partial_\mu f$ die (koordinatenabhängigen) partiellen Ableitungen von $f \circ \varphi^{-1}$ nach $(\varphi \circ \gamma(t))^\mu$ sind. Die totale Ableitung von $(f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma(t))$ lässt sich somit als eine linearkombination von $\partial_\mu f$ und $\frac{d(\varphi\circ\gamma(t))^\mu}{dt}$ schreiben. Das motiviert die folgende Definition.

[34] Um Schreibarbeit und Platz zu sparen wird im Folgenden unter γ und f immer die im Sinne der Definitionen (2.2.2) und (2.2.1) C^∞ Kurve und Funktion verstanden.

Definition 2.2.3 *(Tangentialvektor) Seien M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, $F(P)$ die Menge aller C^∞-Funktionen auf $P \in M$, $f \in F(P)$ und γ eine C^∞-Kurve auf M. Die Abbildung $x_p : F(P) \to \mathbb{R}$, definiert durch*

$$x_p(f) = \tfrac{d(\varphi\circ\gamma(t))^\mu}{dt}|_{t=0} \cdot \partial_\mu f(\varphi(\gamma(0))),$$

heißt Tangentialvektor (kontravarianter Vektor).

Die Größen $\partial_\mu f$ bilden am Punkt $\gamma(0) = P$ der Mannigfaltigkeit eine Basis[35], wobei die Zuordnung

$$f \to^{x_p} \tfrac{(f\circ\gamma(t))}{dt}$$

folgende Eigenschaften hat:

1. *$x_p(\alpha f + \beta g) = \alpha x_p(f) + \beta x_p(g)$ für $f, g \in F(P)$*
2. *$x_p(fg) = g(P)x_p(f) + f(P)x_p(g)$*

Der Beweis ist trivial, da die entsprechenden Eigenschaften von Ableitungen bereits bekannt sind.

Definition 2.2.4 *Die Menge aller Abbildungen x_p am Punkte $P \in M$ heißt Tangentialraum $TM(P)$.*

Satz 2.2.1 *Der Tangentialraum $TM(P)$ ist ein Vektorraum, da für je zwei Tangentialvektoren $x_p, y_p \in TM(P)$, sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$(\alpha x_p + \beta y_p)f = \alpha x_p(f) + \beta y_p(f).$$

Der Beweis ist ebenso trivial, da Ableitungen linear sind.

2.2.2 Vektorfelder, Lie-Klammer

An jedem Punkt P einer differenzierbaren Mannigfalltigkeit existieren Tangentialvektoren. Je nach Wahl der Kurve γ, die durch P geht gibt es überabzählbar viele Tangentialvektoren. Das motiviert die folgende Definition.

Definition 2.2.5 *Eine Abbildung $X : P \in M \to x_p \in TM(P)$ heißt Vektorfeld.*

Anschaulich wird jedem Punkt einer Mannigfalltigkeit ein Tangentialvektor zugeordnet. Man schreibt daher $X(P)(f)$ und meint damit die Anwendung eines Vektorfeldes zuerst auf den Punkt P, Erzeugung eines Tangentialvektors x_p und die weitere Anwendung dessen auf eine beliebige Funktion $f \in F(P)$. Die Abbildung (1) sorg an dieser Stelle für den Anschau.

Ein einfaches Beispiel für ein Vektorfeld ist der oben erwähnte Basisvektor $\partial_\mu \cdot = \frac{\partial(\cdot\circ\varphi^{-1})}{\partial(\varphi\circ\gamma)^\mu}\varphi(.)$.

Ein anderes Beispiel, das auch für die nächsten Kapitel wichtig ist, ist die s.g. Lie-Klammer.

Ein Vektorfeld X kann punktweise auf ein skalares Feld f angewandt werden und erzeugt an jedem Punkt eine zahl, also, ist $X(P)(f) = x_p(f)$ wieder ein skalares Feld, da der Tangentialvektor x_p die Funktion f auf eine Zahl abbildet und von dem Punkt P der Mannigfaltigkeit abhängt. Sei Y ein weiteres Vektorfeld, dann ist $(YX)(P)(f) = y_p x_p(f)$ wieder ein skalares Feld, ist aber kein Tangentialvektor mehr.

[35] Den Beweis siehe z.B. in [8], §2.2

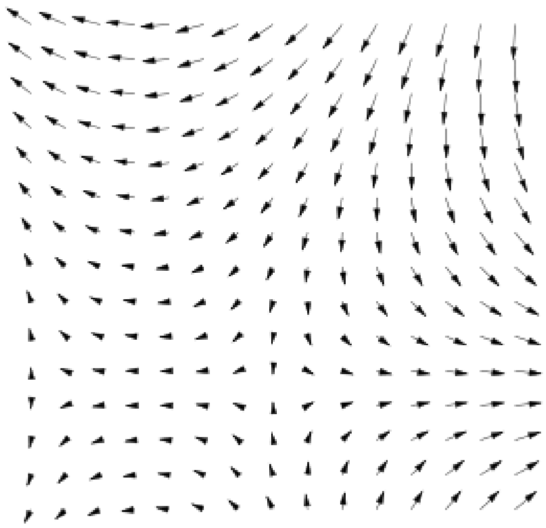

Abbildung 1: Anschauliche Darstellung eines Vektorfelds

Satz 2.2.2 *Die Abbildung* $[X,Y](P)(f) = (XY)(P)(f) - (YX)(P)(f)$ *ist ein Tangentialvektor.*

Beweis.
Es sind zwei Eigenschaften der Tangentialvektoren (Siehe (2.2.3)) zu beweisen.

1. Der Übersicht halber wird die P-Abhängigkeit nicht mitgeschrieben. Seien $f, g \in F(P)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann folgt $[X,Y](P)(\alpha f+\beta g) = (XY)(\alpha f+\beta g)-(YX)(\alpha f+\beta g) = X(\alpha Y(f)+\beta Y(g)) - Y(\alpha X(f)+\beta X(g)) = \alpha(XY(f) - YX(f))+\beta(XY(f)-YX(f)) = \alpha[X,Y](f)+\beta[X,Y](f)$

2. $[X,Y](P)(fg) = XY(fg) - YX(fg) =$
$= X\{gYf + fYg\} - Y\{gXf + fXg\} =$
$= \{XY(f) - YX(f)\}g + \{XY(g) - YX(g)\}f =$
$= g(P)[X,Y](P)(f) - f(P)[X,Y](P)(g)$.

Eine kurze Rechnung zeigt, dass $[\partial_\mu, \partial_\nu](f) = 0$ gilt. Für eine Kurve γ, eine Karte φ und eine Funktion f gilt:

$$[\partial_\mu, \partial_\nu](f) = \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial(\varphi\circ\gamma)^\mu\partial(\varphi\circ\gamma)^\nu} - \frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial(\varphi\circ\gamma)^\nu\partial(\varphi\circ\gamma)^\mu} = 0,$$

da f im Bezug auf die Karte φ nach Voraussetzung beliebig oft differenzierbar ist.

Satz 2.2.3 *(Weitere Eigenschaften der Lie-Klammer) Ohne Beweis schreiben wir:*

- $[X,Y] = -[Y,X]$
- $[X+Y,Z] = [X,Z] + [Y,Z]$
- $[X,Y+Z] = [X,Y] + [X,Z]$
- $[\alpha X, \beta Y] = \alpha\beta[X,Y],\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

Stehen statt $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Funktionen $f, g \in F(P)$, dann kommt man zum nächsten Satz.

Satz 2.2.4 *Es gilt:*

$$\begin{aligned}&[fX, gY](P) =\\ &= (fg)(P)[X,Y](P) - f(P)(X(P)g)Y(P) -\\ &- g(P)(Y(P)f)X(P)\end{aligned}$$

Eine einfache Beweisrechnung soll als Übung dienen.
Die Schreibweise $[X,Y]$ ist zunächst Koordinatenunabhängig. Man zeigt leicht, dass

$$[X,Y] = \sum\sum(X^\mu\partial_\mu Y^\nu - Y^\mu\partial_\mu X^\nu)\partial_\nu$$

im Bezug auf die Basis ∂_μ gilt.
Beweis
Man erinnert sich an die Definition (2.2.3) und schreibt $X(P)(f) = x_p(f) = \frac{d(\varphi\circ\gamma)^\mu}{dt}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial(\varphi\circ\gamma)^\mu} = X^\mu(P)\partial_\mu f$, sowie $Y(P)(f) = Y^\nu(P)\partial_\nu f$ und setzt das in $[X,Y]$ ein. Es ist zu bemerken, dass X^μ, sowie Y^ν Zahlen sind.

$$\begin{aligned}&[X,Y] = [X^\mu\partial_\mu, Y^\nu\partial_\nu] \Longleftrightarrow\\ &X^\mu Y^\nu[\partial_\mu,\partial_\nu] + \{X^\mu(\partial_\mu Y\nu) - Y^\mu(\partial_\mu X\nu)\}\partial_\nu \Longleftrightarrow\\ &\{X^\mu(\partial_\mu Y\nu) - Y^\mu(\partial_\mu X\nu)\}\partial_\nu,\end{aligned}$$

da die Lie-Klammer der Basisvektoren $[\partial_\mu, \partial_\nu]$, wie bereits gezeigt wurde, Null ergibt.

2.2.3 Tensoren und Tensorfelder

In Kapitel (1.1.2) wurde der Begrif „Tensor“ schon mal ohne Definition verwendet. An dortiger Stelle war eine Präzise Definition auch nicht nötig, da bereits ein intuitives Verständnis ausreichte. Auf dem Weg zur Formullierung der Lie-Ableitung stellt man jedoch fest, dass doch eine exakte mathematische Definition eines Tensors von Vorteil ist.

Tensoren werden in vielen Bereichen der theoretischen Physik verwendet: Mechanik (etwa der Trägheitstensor), Hydrodynamik und Festkörperphysik (etwa der Spannungstensor), Elektrodynamik (die Feldstärke- und Energie-Impuls-Tensoren). In der ART ist der Begrif besonders wichtig, da die Einstein‘schen Feldgleichungen koordinatenunabhängig formuliert werden[36], also Tensorgleichungen sein müssen. Der Grund dafür liegt in der Natur des Begriffes „Tensor“, die eine „einheitliche Theorie der Koordinatentransformationen“ ermöglicht ([8], §3.1). Das führt dazu, dass die in einem Koordinatensystem formulierten Tensorgleichungen auch in allen anderen Systemen ihre Gültigkeit behalten.

Da Tensoren in so vielen Bereichen der Physik ihre Anwendung finden, gibt es leider viele Definitionen dieser Objekte. Auch in der Mathematik gibt es mehrere Definitionen([10]): Tensor als Element des Tensorproduktes, Tensor, als Verallgemeinerung von Matrizen, Tensor als Multilineare Abbildung.

Doch man zeigt[37], dass alle diese Definitionen zueinander äquivalent sind. Das schenkt uns die Freiheit die passende Definition auszusuchen und mit dieser weiter zu arbeiten.

Definition 2.2.6 *(Einstein‘sche Summenkonvention): Um Tensorgleichungen etwas eleganter und kompakter zu schreiben, verwendet man die im Jahre 1916 von Einstein eingeführte Notation:*

[36] Man erinnert sich nochmal an das Relativitätsprinzip von Galilei, nach dem physikalische Gesetze invariant unter Koordinatentransformationen zwischen Inertialsystemen sind. Diese Invarianz liegt nicht immer vor, sondern genau dann, wenn die entsprechenden Gleichungen eine besondere Struktur besitzen ([7], § 82; [3], Kapitel 21)

[37] An dieser Stelle kann ich leider keinen vernünftigen Verweis angeben, denn diese Schlußfolgerung hat sich aus einem Gespräch mit dem Mathematiker: Prof. Dr. V.Bangert ergeben.

$$v = \sum v_i e_i \Longleftrightarrow v = v^i e_i,$$

wobei $\vec{e}_i$ eine beliebige Basis des Vektorraums V, $v_i \in \mathbb{R}$ und $\vec{v} \in V$ sind.

Man schreibt den Index unten (kovariant) bei Vektoren und oben (kontravariant) bei Koordinatenwerten ([8], § 3.1).

Definition 2.2.7 *Sei E ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, E^*-dessen Dualraum. Sei $< x, a >$ der Wert von $a \in E^*$ an der Stelle $x \in E$. Seien p und q nichtnegative ganze Zahlen und $2 \le i \le p-1$, $2 \le j \le q-1$.*

Eine Abbildung

$$\begin{aligned}
&f : (E^*)^p \times E^q \to \mathbb{R} \text{ mit}\\
&f(a^1, ..., a^{i-1}, \lambda a + \mu b, a^{i+1}, ..., a^p, x_1, ..., x_q) =\\
&= \lambda f(a^1, ..., a^{i-1}, a, a^{i+1}, ..., a^p, x_1, ..., x_q) +\\
&+ \mu f(a^1, ..., a^{i-1}, b, a^{i+1}, ..., a^p, x_1, ..., x_q)\\
&\text{und}\\
&f(a^1, ..., a^p, x_1, ..., x_{j-1}, \lambda x + \mu y, x_{j+1}, ..., x_q) =\\
&= \lambda f(a^1, ..., a^p, x_1, ..., x_{j-1}, x, x_{j+1}, ..., x_q) +\\
&+ \mu f(a^1, ..., a^p, x_1, ..., x_{j-1}, y, x_{j+1}, ..., x_q)
\end{aligned}$$

heißt p-fach kontravarianter und q-fach kovarianter Tensor auf E, oder $(p,q)-$Tensor.

Der hier definierte Tensor ist somit eine multilineare Abbildung, welche das kartesische Produkt von gleichen Räumen (entweder E, oder E^*) auf die Menge der reelen Zahlen abbildet. Beispiele für solche Abbildungen sind:

- $f(a, x) =< x, a >\Rightarrow (1,1)-$Tensor: $E^* \times E \to \mathbb{R}$
- Seien $x_1, ..., x_p \in E$-Vektoren, $a^1, ...a^q \in E^*$ Abbildungen. Dann ist $f : (E^*)^p \times E^q \to \mathbb{R}$ mit

  $$\begin{aligned}&(b^1, ...b^p, y_1, ...y_q) =< x_1, b^1 > \cdot ... \cdot < x_p, b^p > \cdot\\ &\cdot < y_1, a^1 > \cdot ... \cdot < y_q, a^q >\end{aligned}$$

  ebenfalls ein $(p,q)-$Tensor. Tensoren dieser Art nennt man *einfache* und bezeichnet mit $f(b^1, ...b^p, y_1, ...y_q) = x_1 \otimes ...x_p \otimes a^1 \otimes ... \otimes a^q$

Im zweiten Beispiel sind $x_1, ..., x_p \in E$ und $a^1, ...a^q \in E^*$ fest. Der Tensor bildet daher $y_1, ..., y_q \in E$ und $b^1, ...b^p \in E^*$ auf $\mathbb{R}$ bei vorgegebenen x_i und a^j ab.

Zu einem $n-$dimensionalen Vektorraum E bildet die Menge aller einfachen $(p,q)-$Tensoren einen Vektorraum (bezüglich der punktweisen Additionen und Vervielfachungen) $E^p_q = E^* \otimes ... \otimes E^* \otimes E \otimes ... \otimes E$, wobei die Symbole E und E^* so oft stehen, wie p und q es vorschreiben.

Im Sinne der Isomorphie gelten folgende einfache Realationen:

- $E^1_0 = E$. **Beweis**:
  Sei $x \in E-$ein Vektor. Der entsprechende einfache $(1,0)-$Tensor lautet $f(b) =< x, b >: b \in E^* \to \mathbb{R}$. Die Menge aller solchen Funktionen $< x, \cdot >$ ist zu der Menge E aller Vektoren x isomorph, da für jede duale Abbildung $b \in E^*$ die Zuordnung $< \cdot, b >$ isomorph ist. **Vektoren aus $E = E^1_0$ nennt man daher kontravariant.**
- $E^0_1 = E^*$. **Beweis**:
  Geht völlig analog zum vorherigen Beweis. **Duale Abbildungen aus $E^* = E^0_1$ nennt man daher kovariant.**

Da Tensoren als multilineare Abbildungen definiert wurden, und da sie einen Vektorraum bilden, kann Frage gestellt werden, welche Basiselemente dieser Raum besitzt. Das führt zu folgenden Definition und Satz.

Definition 2.2.8 *Sei $x_1, ...x_n-$Basis in E. Die dazu duale basis $a^1, ...a^n$ ist durch $< \lambda^i x_i, a^j >= \lambda^j$ definiert.*

Satz 2.2.5 *Seien x_i und a^j die Basisvektoren im Sinne der letzten Definition. Die n^{p+q} einfachen Tensoren $x_{i_1} \otimes ... \otimes x_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes ... \otimes a^{j_q}$ bilden eine Basis in E^p_q mit $dim E^p_q = n^{p+q}$.*

Beweis:

Lineare Unabhängigkeit: Seien $\lambda^{i_1,...i_p}_{j_1,...,j_q} \in \mathbb{R}$. Man wertet die Basistensoren auf Basisvektoren von E und E^*. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\lambda^{i_1,...i_p}_{j_1,...,j_q} x_{i_1} \otimes ... \otimes x_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes ... \otimes a^{j_q} = 0 \Longleftrightarrow\\
&\lambda^{i_1,...i_p}_{j_1,...,j_q} x_{i_1} \otimes ... \otimes x_{i_p} \otimes\\
&\otimes a^{j_1} \otimes ... \otimes a^{j_q} (a^{i_1`}, ..., a^{i_p`}, x^{j_1`}, ..., x^{j_q`}) = 0 \Longleftrightarrow\\
&\lambda^{i_1,...i_p}_{j_1,...,j_q} < x_{i_1}, a^{i_1`} > \cdot ... \cdot < x_{i_p}, a^{i_p`} > \cdot < x_{l_1}, a^{l_1`} >\\
&\cdot ... \cdot < x_{j_q}, a^{j_q`} >= 0 \Longleftrightarrow\\
&\lambda^{i_1`,...i_p`}_{j_1`,...,j_q`} = 0
\end{aligned}$$

Aufspannen des ganzen Raums E^p_q: Sei $f \in E^p_q$ mit $f = \lambda^{i_1,...i_p}_{j_1,...,j_q} x_{i_1} \otimes ... \otimes x_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes ... \otimes a^{j_q}$. Man wendet f auf Basisvektoren von E und E^* an und bekommt

$$f(a^{i_1`}, ..., a^{i_p`}, x^{j_1`}, ..., x^{j_q`}) = \lambda^{i_1`,...i_p`}_{j_1`,...,j_q`}.$$

Ist $f \in E^p_q$ überhaupt als Linearkombination von $x_{i_1} \otimes ... \otimes x_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes ... \otimes a^{j_q}$ darstellbar, so gilt:

$$\begin{aligned}&f = f(a^{i_1}, ..., a^{i_p}, x_{j_1}, ..., x_{j_q}) \times\\ &\times x_{i_1} \otimes ... \otimes x_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes ... \otimes a^{j_q}.\end{aligned}$$

$f(a^{i_1}, ..., a^{i_p}, x_{j_1}, ..., x_{j_q})$ nennt man Komponenten des Tensors f.

Als nächste Aufgabe soll das Verhalten von Tensoren bei linearen Basistransformationen untersucht werden, denn diese Eigenschaft sorgt für die wohlbekannte Eleganz der Tensorgleichungen.

Satz 2.2.6 *Die Basen $\{x_1, ..., x_n\}$ und $\{\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n\}$ seien durch $\tilde{x}_i = \alpha^j_i x_j$ und $x_j = \beta^i_j \tilde{x}_i$ gekoppelt. Dann werden die Komponenten von $f \in E^p_q$ nach der Formel*

$$\tilde{f}^{i_1,...i_p}_{j_1,...,j_q} = \beta^{i_1}_{l_1} \cdot ... \cdot \beta^{i_p}_{l_p} \cdot f^{l_1,...l_p}_{k_1,...,k_q} \cdot \alpha^{k_1}_{j_1} \cdot ... \cdot \alpha^{k_q}_{j_q}$$

umgerechnet.

Diesen Satz nehmen Physiker (der Author ebenfalls) gern als Definition von Tensoren, weil sie besonders leicht zu handhaben sind, was Rechnungen angeht.

Beweis:

Da $\tilde{f}(\tilde{a}^{i_1}, ..., \tilde{a}^{i_p}, \tilde{x}_{j_1}, ..., \tilde{x}_{j_q})$ per Definition multiliar ist, reicht es aus nur die Relationen zwischen $\tilde{a}^{i...}$ und $a^{i...}$ zu finden.

Den Ausgangspunkt bilden folgende Relationen:

$$\begin{cases}\tilde{x}_i = \alpha^j_i x_j\\ x_j = \beta^i_j \tilde{x}_i\\ \alpha^j_i \beta^k_j = \delta^k_i.\end{cases}$$

Die dualen Basen ändern sich zu $\tilde{a}^k = \gamma^k_l \alpha^l$, wobei γ^k_l zu bestimmen ist. Es gilt:

$< x_j, \tilde{\alpha}^k > = < \beta^i_j \tilde{x}_i, \alpha^k > = \beta^k_j$. Andererseits
$< x_j, \gamma^k_l \alpha^l > = \gamma^k_l < x_j, a^l > = \gamma^k_j$.

Da aber die Zahl $< x, a >$ basisunabhängig sein muss[38], gilt $\gamma^k_j = \beta^k_j$, und es folgt:

$\tilde{\alpha} = \beta^k_j a^j$, sowie
$\alpha^j = (\beta^{-1})^j_k \tilde{\alpha}^k = \alpha^j_k \tilde{\alpha}^k$.

Einsetzen von $\tilde{\alpha}^{i\cdots}$ und $x_{\tilde{j}\ldots}$ liefert dann die gesuchte Relation.

Operationen mit Tensoren

Die Möglichkeit jeden (auch nicht zwangsweise einfachen) Tensor $f \in E^p_q$ in der Form $f = f(a^{i_1}, ..., a^{i_p}, x_{j_1}, ..., x_{j_q}) \times \times x_{i_1} \otimes ... \otimes x_{i_p} \otimes a^{j_1} \otimes ... \otimes a^{j_q}$ zu schreiben erlaubt folgende Tensoroperationen als offensichtlich zu betrachten. Sei also $g \in E^p_q$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- $f + g \in E^p_q$
- $(f+g)^{i_1,...i_p}_{j_1,...,j_q} = f^{i_1,...i_p}_{j_1,...,j_q} + g^{i_1,...i_p}_{j_1,...,j_q}$
- $(\lambda f) \in E^p_q$ mit $(\lambda f)^{i_1,...i_p}_{j_1,...,j_q} = \lambda f^{i_1,...i_p}_{j_1,...,j_q}$

Definition 2.2.9 *Seien $f \in E^p_q$ und $g \in E^r_s$. Man definiert den Tensor $f \otimes g \in E^{p+r}_{q+s}$ durch*

$$f \otimes g(a^1, ..., a^p, a^{p+1}, ..., a^{p+r}, x_1, ..., x_q, x_{q+1}, ..., x_{q+s}) =$$

$$= f(a^1, ..., a^p, x_1, ..., x_q,) \times$$
$$\times\, g(a^{p+1}, ..., a^{p+r}, x_{q+1}, ..., x_{q+s}).$$

Die Komponenten bestimmen sich dementsprechend aus:

$$(f \otimes g)^{i_1,...,i_{p+r}}_{j_1,...,j_{q+s}} = f^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q} \cdot g^{i_{p+1},...,i_{p+r}}_{j_{q+1},...,j_{q+s}}$$

Das Tensorprodukt ist auszuführen, wenn Tensoren aus dem gleichen zugründeliegenden Raum E sind.
Weiter gilt für $f, g, h \in E^p_q$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$
- $(f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h$
- $f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h$
- $(\lambda f) \otimes g = \lambda (f \otimes g) = f \otimes (\lambda g)$

Im Folgenden werden noch zwei basisunabhängige (im Sinne des Endergebnisses) Operationen eingeführt.

Definition 2.2.10 *Zu $r \in \{1, ..., p\}$, $s \in \{1, ..., q\}$ und $f \in E^p_q$ sei der Tensor $C^r_s f \in E^{p-1}_{q-1}$, **Kontraktion** genannt, durch*

$$(C^r_s f)(a^1, ..., a^{r-1}, a^{r+1}, ..., a^p, x_1, ..., x_{s-1}, x_{s+1}, ..., x_q) =$$

$$= f(a^1, ..., a^{r-1}, b^{\boldsymbol{k}}, a^{r+1}, ..., a^p, x_1, ..., x_{s-1}, y_{\boldsymbol{k}}, x_{s+1}, ..., x_q)$$
(Summation über $k \in [1, ..., n]$)

*definiert, wobei $\{y_1, ..., y_n\}$ eine **beliebige** basis in E und $\{b^1, ..., b^n\}$ die dazu duale Basis sind.*

Beweis der Basisunabhängigkeit:
Man erhält eine andere Basis $\{x_1, ..., x_n\}$ in E durch $z_i = \alpha^j_i y_j$. Die dazu duale Basis $\{c^1, ..., c^n\}$ transformiert sich mit (α^{-1}): $c^i = (\alpha^{-1})^i_j b^j = \beta^i_j b^j$.
Nach Einsetzen dieser neuen Basis in die Definition (2.2.10), folgt:

$$(C^r_s f)(..., a^{r-1}, a^{r+1}, ..., x_{s-1}, x_{s+1}, ...) =$$
$$= f(..., b^k, ..., y_k, ...) = \beta^k_j \alpha^l_k f(..., c^j, ..., y_l, ...) =$$
$$= \delta^l_j f(..., c^j, ..., y_l, ...) = f(..., c^j, ..., y_j, ...)$$

Die Formulierung der **Kontraktion** ist wesentlich eleganter, wenn man den Tensor in Komponenten schreibt. So bekommt man nach Anwendung von $C^r_s f$ aus (2.2.10) auf beliebige Basisvektoren

$$(C^r_s f)^{i_1,...,i_{r-1},i_{r+1},...,i_p}_{j_1,...,j_{s-1},j_{s+1},...,j_q} = f^{i_1,...,i_{r-1},\mathbf{k},i_{r+1},...,i_p}_{j_1,...,j_{s-1},\mathbf{k},j_{s+1},...,j_q}.$$

Die andere Koordinatenunabhängige Operation ist die s.g. Überschiebung von zwei Tensoren.

Definition 2.2.11 *Zu $f \in E^p_q$ und $g \in E^r_s$ heißt $h \in E^{p+r-1}_{q+s-1}$ der Form:*

$$h = C^t_{q+u}(f \otimes g),$$

mit $t \in \{1, ..., p\}$, $u \in \{1, ..., s\}$, oder

$$h = C^{p+t}_u (f \otimes g),$$

*mit $t \in \{1, ..., r\}$, $u \in \{1, ..., q\}$ **Überschiebung** von f und g.*

Da die Überschiebung durch die Kontraktion definiert wird, ist die Koordinatenunabhängigkeit der Operation bereits einleuchtend. Die Komponenten von h berechnen sich aus

$$h^{i_1,...,i_{t-1},i_{t+1},...,i_{p+r}}_{j_1,...,j_{q+u-1},j_{q+u+1},...,j_{q+s}} =$$
$$= f^{i_1,...,i_{t-1},\mathbf{k},i_{k+1},...,i_p}_{j_1,...,j_q} \cdot g^{i_{p+1},...,i_{p+r}}_{j_{q+1},...,q_{q+u-1},\mathbf{k},j_{q+u+1},...,j_{r+s}},$$

beziehungsweise aus der äquivalenten Form für die zweite Formulierung aus der Definition (2.2.11).
Die natürlichsten Beispiele für Kontraktion und Überschiebung sind:

- die Spurbildung T^j_{jlm} und
- das äußere Produkt $T_{ij} T^{jk}$.

Metrik auf euklidischen Räumen

In einem euklidischen Raum V ist ein Skalarprodukt, als symmetrische positiv-definite Bilinearfunktion vereinbart. Diese wird im Rahmen der Arbeit mit g bezeichnet.
Nimmt man zwei Vektoren $x, y \in V$, so gilt: $g(x, y) : V \times V \to \mathbb{R}$. Im Sinne der Definition (2.2.7) ist g ein $(0, 2)-$Tensor, oder, wie bereits in (1.1.2) erwähnt wurde, ein zweifach kovarianter Tensor.
Sei im Weiteren $\{e_1, ..., e_n\}$ eine Basis von V, $\{e^1, ..., e^n\}$ die dazu duale Basis von V^*. Nach (2.2.5) lässt sich jeder $(0, 2)-$Tensor in der Form

$$g = g_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu,$$

[38] Anschaulich gesprochen, ist $< x, a >$ ein Skalarprodukt von zwei Vektoren, das nur von den Beträgen der Vektoren, sowie vom Winkel zwischen den beiden abhängt. Diese Parameter können sich bei einer linearen Koordinatentransformation (etwa bei Drehungen) nicht ändern.

wobei die Komponenten $g_{\mu\nu}$ des Tensors g durch
$g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu)$ gegeben sind.

Es ist leicht zu sehen, dass die Darstellung des Skalarproduktes in der Tensorschreibweise mit der üblichen Darstellung übereinstimmt. Man wendet g auf ein Paar (x, y) von Vektoren aus V und erhält:

$$g(x, y) = g_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu(x, y) \Longleftrightarrow$$
$$g_{\mu\nu} < x, e^\mu > \cdot < y, e^\nu > \Longleftrightarrow g(x, y) = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

weil definitionsgemäß gilt: $< x, e^\mu > = < x^i e_i, e^\mu > = x^\mu$.

Tensorfelder

Die oben diskutierte Theorie hat zunächst keine Verbindung zur Differentialgeometrie, was der Gegenstand des Kapitels (2.1) war. Der Grund dafür ist die Vektorraumstruktur des zugründeliegenden Raums E (siehe Def. (2.2.7)). Eine Mannigfaltigkeit muss diese Struktur im Allgemeinen nicht besitzen, was die Formulierung des Tensorbegriffs etwas erschwert.

Man kann jedoch Tensoren in Tangentialräumen $TM(P)$ zu einem beliebigen Punkt P der Mannigfaltigkeit M definieren, da diese über die geforderte Vektorraumstruktur (Siehe Satz (2.2.1)) verfügen und $TM(P) = (M_p)^1_0$, sowie $TM^*(P) = (M_p)^0_1$ schreiben.

Definition 2.2.12 *Der zum Tangentialraum $(M_p)^1_0$ duale Raum $(M_p)^0_1$ heißt **Kotangentialraum**, seine Elemente sind **Kotangentialvektoren** (kovariante Vektoren, Kovektoren).*

Definition 2.2.13 *Ein Kovektorfeld K auf der Mannigfalltigkeit M ordnet jedem Punkt $P \in M$ einen Kovektor $K(P) \in (M_p)^0_1$ zu.*

Kovektoren wirken auf Tangentialvektoren, wie duale Abbildungen auf Vektoren und bilden durch $< \cdot, K(P) >$ Tangentialvektoren auf reele Zahlen ab. Die Basis des Kotangentialraums definiert man ähnlich, wie im Fall gewöhnlicher Vektorräumen.

Definition 2.2.14 *Die n Kovektorfelder $\{du^1, ..., du^n\}$ ordnen jedem Punkt der Mannigfalltigkeit mit Koordinatenvektorfeldern $\frac{\partial}{\partial u^i}$ die Elemente der zur Basis $\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}(P), ..., \frac{\partial}{\partial u^i}(P)\right\}$ dualen Basis zu:*

$$< \frac{\partial}{\partial u^i}(P), du^k > = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, sonst \end{cases}$$

Die Tangentialräume $(M_p)^1_0$ werden aus den bereits in (2.2.3) definierten kontravarianten Vektoren, oder $(1, 0)-$ $-$Tensoren gebildet. (Tangential)Vektorfelder erhalten sofort die Bedeutung der $(1, 0)-$Tensorfelder. Die entsprechenden $(0, 1)-$Tensoren sind Kovektoren aus dem zu $(M_p)^1_0$ dualen Raums.

Die letzte Definition des Kapitels verallgemeinert den Begriff eines $(1, 0)-$Tensors (bzw. eines $(0, 1)-$Tensors) auf beliebige $(p, q)-$Tensoren.

Definition 2.2.15 *Ein $(p, q)-$ Tensorfeld T auf M ist eine Abbildung, die jedem Punkt $L \in M$ einen Tensor $T(L) \in (M_l)^p_q$ zuordnet.*

2.3 Die Lie-Ableitung

Als Hauptthema der Arbeit, spielt die Lie-Ableitung eine große Rolle in der Physik. Man denkt als Beispiel an die Hydrodynamik. Angenommen, es fließt Wasser, oder eine andere Flüßigkeit. Die Form des Rohres, in dem diese fließt ist zunächst ohne Bedeutung. So eine Bewegung wird als ein Vektorfeld von Geschwindigkeiten beschrieben. Das bedeutet, dass an jedem Punkt der Strömung die Richtung und Betrag der Geschwindigkeit gegeben sind. Man kann sich an dieser Stelle der Frage widmen, wie sich die Temperatur der Flüßigkeit, oder eine andere skalare Große (etwa die Dichte) von Punkt zu Punkt ändert.

Gesucht wird, anders gesagt, die Änderung einer skalaren Funktion auf einer Mannigfalltigkeit (strömendes Medium) mit vorgegebenem Vektorfeld.

Die Antwort auf diese Frage gibt die s.g. Lie-Ableitung, oder, salopp gesagt, die Ableitung in Richtung des vorgegebenen Vektorfeldes.

Auch hier, wie ebenso bei der Definition des Tensorbegriffes, gibt es verschiedene Möglichkeiten die Lie-Ableitung zu definieren. Im Folgenden werden zwei davon beschrieben, die jedoch zu einem und demselben Ergebnis führen. Welche Formulierung die bessere ist, lässt sich im Rahmen der Arbeit nicht diskutieren, da eine solche Diskussion aus Zeitgründen nicht möglich erscheint.

2.3.1 Der axiomatische Zugang.

Laut der Definition (2.2.3) von Tangentialvektoren seien nochmal M eine C^∞-Mannigfalltigkeit, $F(M)$ die Menge aller reelwertigen C^∞-Funktionen auf M, $f \in F(M)$ und γ eine C^∞-Kurve auf M (Siehe dazu die Definitionen (2.2.2) und (2.2.1)).

Für die Definition eines Tangentialvektors an *einem* Punkt $P = \gamma(0)$ wurde die Ableitung $\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}$ an der Stelle $t = 0$ untersucht. Der sich daraus ergebende Wert war das Resultat der Anwendung eines Tangentialvektors x_p auf f:

$$x_{\gamma(0)} = X(\gamma(0))f = \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}|_{t=0} =$$
$$= \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial(\varphi\circ\gamma)^\mu}\varphi(\gamma(0))\frac{d(\varphi\circ\gamma)^\mu}{dt}(0)$$

Welche Bedeutung hat diese Definition? Man will die Änderung der Funktion f in einer kleinen offenen Umgebung von $P = \gamma(0)$ bestimmen. Das Resultat ist aber das einfache Anwenden eines Tangentialvektors x_p, also eines Vektorfeldes X, ausgewertet am Punkte P: $x_p = X(P)$.

Ist die Änderung von f entlang der Kurve γ zu bestimmen, so ist anschaulich klar, dass nicht mehr x_p, sondern $X(\gamma(t))$ auf f anzuwenden ist.

Das motiviert die folgende Definition.

Definition 2.3.1 *Die Lie-Ableitung des skalaren Feldes $f \in F(M)$ mit dem Vektorfeld X ist das skalare Feld*

$$L_X f = Xf.$$

Um auf Ableitungen von Vektorfeldern zu kommen, postuliert[39] man die Produktregel:

$$L_X(Yf) = (L_X Y)f + Y(L_X f).$$

[39] Dieses „Postulat“ wird im nächsten Abschnitt bewiesen

Der linke Term ist bereits bekannt, da die Lie-Ableitung eines Skalaren Feldes entlang X einfach das Anwenden von X ist. Der Term $(L_X f)$ ist nun auch bekannt. Es folgt die

Definition 2.3.2 *Die Lie-Ableitung eines Vektorfeldes ist ein Vektorfeld*

$$(L_X Y)(f) = [X, Y](f).$$

Die Eigenschaften der Lie-Klammer wurden bereits in (2.2.2) untersucht.

Durch Bilden von $< Y, K >$, was ein skalares Feld ist, berechnet man die Lie-Ableitung eines Kovektorfeldes K .

$$L_X < Y, K >=< L_X Y, K > + < Y, L_X K >$$

Definition 2.3.3 *Die Lie-Ableitung eines Kovektorfeldes lautet:*

$$< Y, L_X K >= X < Y, K > - < [X, Y], K >$$

Definition 2.3.4 *Die Lie-Ableitung eines allgemeinen Tensorfeldes*[40] *S lautet:*

$$\begin{aligned}(L_X S)(A^1, ..., A^p, X_1, ..., X_q) = X(S(A^1, ..., X_q)) -\\ - \textstyle\sum_{i=1}^{p} S(A^1, ..., L_X A^i, ..., A^p, X_1, ..., X_q) -\\ - \textstyle\sum_{j=1}^{q} S(A^1, ..., A^p, X_1, ..., [X, X_j], ..., X_q).\end{aligned}$$

Speziell für das $(0, 2)-$Tensorfeld g gilt:

$$(L_X g)(X_1, X_2) = \tag{8}$$

$$= Xg(X_1, X_2) - g(L_X X_1, X_2) - g(X_1, L_X X_2) \tag{9}$$

Wie anhand den Definitionen ersichtlich ist, erzeugt die Lie-Ableitung eines $(p, q)-$Tensorfeldes immer ein äquivalentes (was die Indizes angeht) $(p, q)-$Tensorfeld.

Wir gehen nun etwas genauer und formaler vor und untersuchen die Lie-Ableitung genauer.

2.3.2 Formaler Zugang: Ableitungsformel.

Das Ziel dieses extrem formalen Kapitels besteht im vollständigen Beweis der Ableitungsformel für skalare und Vektorfelder. Das verifiziert die im vorherigen Kapitel intuitiv eingeführten Ableitungsvorschriften. Die Kovektorfelder und allgemeinen Tensorfelder sollen hier außer Acht gelassen werden. Es schadet nicht sich dieses Kapitel anzusehen und nachzuarbeiten, ist aber nicht drammatisch es zu überspringen.

Wieder soll die einfache Ableitung der Funktion f entlang einer Kurve als Ausgangspunkt genommen werden. Der Punkt, an dem die Ableitung auszuwerten ist sei aber nicht fest. Es gilt:

$$\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial(\varphi \circ \gamma)^\mu}\varphi(\gamma(t))\frac{d(\varphi \circ \gamma)\mu}{dt}(t) = X(\gamma(t))f \tag{10}$$

Die Koordinaten $\{(\varphi \circ \gamma)^1, ..., (\varphi \circ \gamma)^n\} \in \mathbb{R}^n$ der Kurve γ seien der Übersicht halber durch $\{\gamma^1, ..., \gamma^n\} \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet. Die entsprechenden Koordinaten von f entlang der Kurve γ: $\{(f \circ \varphi^{-1})^1, ..., (f \circ \varphi^{-1})^n\} \in \mathbb{R}^n$ seien durch $\{u^1, ..., u^n\} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Die Relation (10) lässt sich dann etwas kompakter schreiben:

$$X(\gamma(t))f = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^\mu}\varphi(\gamma(t))\frac{d\gamma^\mu}{dt}(\gamma(t)) \tag{11}$$

Durch Bilden von (11) wird der Kurve γ gefolgt und die Änderung des skalaren Feldes f an jedem Punkt berechnet. Die Definition (2.2.3) ermöglicht jedes Vektorfeld X in der Form $X = X^k(P)\partial_k(\varphi(P))$ zu schreiben. Insbesondere gilt

$$X(\gamma(t))f = X^k(\gamma(t))(\partial_k f)(\varphi(\gamma(t))) = \tag{12}$$

$$= X^k(\varphi^{-1} \circ \varphi(\gamma(t)))\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^k}(\varphi(\gamma(t))) \tag{13}$$

Vergleicht man (11) und (13), so folgt:

$$\frac{d\gamma^\mu}{dt}(t) = X^\mu(\varphi^{-1})(\gamma^1(t), ..., \gamma^n(t)) \tag{14}$$

Definition 2.3.5 *Für X-ein Vektorfeld und $t \in \mathbb{R}$ ist $\mu_t(P) = \gamma(t)$ mit $\frac{d\gamma}{dt} = X \circ \gamma$ und $\gamma(0) = P$ der Fluß von γ.*

Der Fluß $\mu_t(P)$ ist eine Lösung von (14) mit nach Voraussetzung C^∞ rechter Seite. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist $\mu_t(P)$ in diesem Fall eindeutig und ebenso C^∞. Insbesondere hängt die Lösung C^∞ von den Anfangsbedingungen ab, was die stetige Differenzierbarkeit von $\mu_t(P)$ in jeder Karte gewährleistet.

Definition 2.3.6 *(Tangentialabbildung) Die Abbildung T_μ, die dem Tangentialvektor $x \in TM(P)$ den Tangentialvektor $T_\mu x \in TM(\mu(P))$ mit*

$$(T_\mu x)(g) = x(g \circ \mu) \text{ für } g \in F(\mu(P))$$

zuordnet, heißt Tangente von μ.

Da μ_t den Punkt P auf den Punkt $\mu_t(P)$, oder einfach $\mu(P)$ abbildet, ist die Funktion $g \circ \mu \in F(P)$. Auf solche Funktionen können auch Tangentialvektoren aus $TM(P)$ wirken. Die Definition ist somit sinvoll.

Die Tangentialabbildung, oder Tangente eines Flußes ist sogar auch ein Tangentialvektor, da die Zuordnung $y : g \to x(g \circ \mu)$ die zwei Eigenschaften aus der Definition (2.2.3) erfüllt.

- $y(\alpha f + \beta g) = x(\alpha f + \beta g \circ \mu) = \alpha x(f \circ \mu) + \beta x(g \circ \mu)$, weil x ein Tangentialvektor ist.
- $y(f \cdot g) = x((f \cdot g) \circ \mu) = x\{f \circ \mu\} \cdot (g \circ \mu) + (f \circ \mu) \cdot x\{g \circ \mu\} = y(f)g(\mu) + f(\mu)y(g)$

Neben dieser Eigenschaft erfüllt die Tangentialabbildung auch die Relation: $T_{\mu\circ\nu}x = (T_\mu \circ T_\nu)x$ für zwei beliebige Flüße μ und ν. Das lässt sich relativ leicht beweisen, indem die Definitionen direkt angewendet werden. Sei $g \in F((\mu \circ \nu)(P))$. Es folgt:

$$\begin{aligned}(T_{\mu\circ\nu}x)g = x(g(\mu \circ \nu)) = T_\nu(x(g(\mu))) =\\ = (\{T_\mu \circ T_\nu\}x)g\end{aligned}$$

[40] Beweis der Tensoreigenschaften des Feldes siehe in [8], §12.3

Insbesondere: $T_{\mu\circ\mu^{-1}} = T_\mu \circ T_{\mu^{-1}} = id$. Zu jeder Tangente T_μ gibt es somit eine inverse Abbildung, solange der inverse Fluß existiert. Dies ist aber durch $\mu_t \circ \mu_s = \mu_{t+s}$ gewährleistet[41], da $\mu_t \circ \mu_{-t} = id$ gilt. Man soll noch eine Schlußfolgerung aus den Eigenschaften der Tangentialabbildung ziehen. Diese ist eine Bijektion von $TM(P)$ nach $TM(\mu(P))$. Der Beweis ist ebenso trivial. Zum einen wurde bereits gezeigt, dass die Tangente eine lineare Abbildung ist. Zum anderen gibt es an jeder Stelle eine inverse Abbildung, was die Injektivität bedeutet. Weil aber die Dimensionen von $TM(P)$ und $TM(\mu(P))$ gleich sind, folgt aus der Injektivität bereits die Bijektivität.

Eine bijektive lineare Abbildung zwischen linearen Räumen, etwa die Tangentialabbildung, erzeigt lineare Abbildungen zwischen den entsprechenden Tensorräumen.

Definition 2.3.7 *Sei T eine bijektive lineare Abbildung zwischen E und F (endlichedimensionale Vektorräume). Zu $g \in F_q^p$ ist $T^{\boldsymbol{*}} g \in E_q^p$ mit der dualen Abbildung T^* durch*

$$T^{\boldsymbol{*}} g(a^1, ..., a^p, x_1, ..., x_q) = \\ = ((T^*)^{-1} a^1, ..., (T^*)^{-1} a^p, Tx_1, ..., Tx_q)$$

für $x_1, ..., x_q \in E$ und $a^1, ..., a^p \in E^*$ definiert.

Zu $f \in E_q^p$ ist $T_* f \in F_q^p$ durch

$$T_* f(b^1, ..., b^p, y_1, ..., y_q) = \\ = (T^* b^1, ..., T^* b^p, (T)^{-1} y_1, ..., (T)^{-1} y_q)$$

für $y_1, ..., y_q \in F$ und $b^1, ..., b^p \in F^*$ definiert.

Diese Abbildungen sind per Definition linear (Siehe die Definition eines Tensors (2.2.7)). Für einfachste Fälle von $(1,0)-$ und $(0,1)-$Tensoren ergibt sich folgendes.

- Sei $y \in F$ ein Vektor ($(1,0)-$Tensor). $T^{\boldsymbol{*}} y$ bildet y auf einen $(1,0)-$Tensor in E. Das bedeutet, dass $T^{\boldsymbol{*}} y$ auf einen Kovektor aus E^* anzuwenden ist. Für einen *beliebigen* Kovektor $a \in E^*$ gilt:

  $$T^{\boldsymbol{*}} y(a) = y((T^*)^{-1} a) =< y, (T^*)^{-1} a >= \\ =< T^{-1} y, a >.$$

  Da a beliebig ist, gilt: $T^{\boldsymbol{*}} y = T^{-1} y$

- Sei $b \in F^*$ ein Kovektor ($(0,1)-$Tensor). $T^{\boldsymbol{*}} b$ bildet b auf einen $(0,1)-$Tensor in E. Das bedeutet, dass $T^{\boldsymbol{*}} b$ auf einen Vektor aus E anzuwenden ist. Für einen *beliebigen* Vektor $x \in E$ gilt:

  $$T^{\boldsymbol{*}} b(x) = b(Tx) =< b, Tx >=< T^* b, x >.$$

  Da x beliebig ist, gilt: $T^{\boldsymbol{*}} b = T^* b$

- Sei $x \in E$ ein Vektor ($(1,0)-$Tensor). $T_* x$ bildet x auf einen $(1,0)-$Tensor in F. Das bedeutet, dass $T_* x$ auf einen Kovektor aus F^* anzuwenden ist. Für einen *beliebigen* Kovektor $b \in F^*$ gilt:

  $$T_* x(a) = x((T^*) b) =< x, (T^*) b >=< Tx, b >.$$

  Da b beliebig ist, gilt: $T_* x = Tx$

- Sei $a \in E^*$ ein Kovektor ($(0,1)-$Tensor). $T_* a$ bildet a auf einen $(0,1)-$Tensor in F. Das bedeutet, dass $T_* a$ auf einen Vektor aus F anzuwenden ist. Für einen *beliebigen* Vektor $y \in F$ gilt:

  $$T_* a(y) = a(T^{-1} y) =< a, T^{-1} y >= \\ =< (T^*)^{-1} a, y >.$$

  Da y beliebig ist, gilt: $T_* a = (T^*)^{-1} a$

Die wichtigsten Eigenschaften von T_* und $T^{\boldsymbol{*}}$ werden im darauffolgenden Satz formuliert.

Satz 2.3.1 ***1:*** *Für $T : E \to F$ sind die Abbildungen T_* und $T^{\boldsymbol{*}}$ zueinander invers.*

2: *Für $f \in F_q^p$ und $g \in F_s^r$ gilt:*

$$T^{\boldsymbol{*}}(f \otimes g) = (T^{\boldsymbol{*}} f) \otimes (T^{\boldsymbol{*}} g).$$

3: *Für $S : F \to E$ gilt:*

$$(S \circ T)^{\boldsymbol{*}} = T^{\boldsymbol{*}} \circ S^{\boldsymbol{*}}$$

Beweis

1: Sei $g \in E_q^p$. Die Abbildung $(T^{\boldsymbol{*}} \circ T_*)g$ bildet g zunächst auf einen $(p,q)-$Tensor in F_q^p und dann wird dieser wieder zurück auf irgendeinen $(p,q)-$Tensor in E_q^p abgebildet. Zu zeigen ist, dass dieser derselbe ist.

Für $x_1, ..., x_q \in E$ und $a^1, ..., a^p \in E^*$ gilt:

$$\{T^{\boldsymbol{*}} \circ T_*(g)\}(a^1, ..., a^p, x_1, ..., x_q) = \\ = T_*(g)((T^*)^{-1} a^1, ..., Tx_q) = g(a^1, ..., x_q).$$

2: Der Tensor $f \otimes g$ liegt in F_{q+s}^{p+r}. Dieser wird auf einen Tensor in E_{q+s}^{p+r} abgebildet. Man wertet $T^{\boldsymbol{*}}(f \otimes g)$ auf $a^1, ..., a^{p+r} \in E^*$ und $x_1, ..., x_{q+s} \in E$ aus und bekommt:

$$\{T^{\boldsymbol{*}}(f \otimes g)\}(a^1, ..., x_{q+s}) = \\ = (f \otimes g)\{(T^*)^{-1} a^1, ..., Tx_{q+s}\} = \\ = T^{\boldsymbol{*}} f(a^1, ..., x_q) \cdot T^{\boldsymbol{*}} g(a^{p+1}, ..., x_{q+s}) = \\ = T^{\boldsymbol{*}} f \otimes T^{\boldsymbol{*}} g\{a^1, ..., x_{q+s}\}.$$

3: Die Abbildung $S \circ T$ bildet E auf E ab. Die entsprechende "stern oben" Abbildung $(S \circ T)^{\boldsymbol{*}}$ bildet E_q^p auf E_q^p ab. Für beliebige $a^1, ..., a^p \in E^*$ und $x_1, ..., x_q \in E$ gilt:

$$\{(S \circ T)^{\boldsymbol{*}} g\}(a^1, ..., x_q) = \\ = g\{(S \circ T)^*)^{-1} a^1, ..., (S \circ T)x_q\} = \\ = S^{\boldsymbol{*}}\{g((T)^*)^{-1} a^1, ..., Tx_q)\} = \\ = \{T^{\boldsymbol{*}} \circ S^{\boldsymbol{*}}\}(g)(a^1, ..., x_q)$$

Die dritte und die erste Eigenschaften implizieren $(S \circ T)_* = (T^{\boldsymbol{*}} \circ S^{\boldsymbol{*}})^{-1} = S_* \circ T_*$.

Definition 2.3.8 *(Push-forward, Pull-back) Zu einem Fluß μ, einem Tensorfeld $S \in TM_q^p$ auf der Mannigfalltigkeit M und einer Tangentialabbildung T_μ heißt die Abbildung*

$$\mu^{\boldsymbol{*}} S = (T_\mu)^{\boldsymbol{*}} \circ S \circ \mu$$

***pull-back**, und die durch*

[41] Per Definition ist $\mu_s(P)$ der Wert einer Kurve γ (Lösung des Differentialgleichungssystems $\frac{d\gamma}{dt} = X \circ \gamma$) am Punkt P für $\gamma(0) = P$. $\mu_t \circ \mu_s(P) = \mu_t(\mu_s(P))$ ist der Wert derselben Kurve γ am Punkt t mit einem verschobenen Anfangswert. Dieser liegt nicht mehr bei P, sondern bei $\mu_s(P)$. Es gilt dann: $\mu_t(\mu_s(P)) = \gamma(s+t)$.

$$\mu_* S = (T_\mu)_* \circ S \circ \mu^{-1}$$

*definierte Abbildung heißt **push-forward**.*

Die pull-back Abbildung bildet das Tensorfeld S, ausgewertet am Punkt $\mu(P)$, also, aus dem Vektorraum $TM_q^p(\mu(P))$ wieder zurück in den Vektorraum $TM_q^p(P)$. Die push-forward Abbildung macht das Gegenteil. Diese Aussage, formal geschrieben, sieht wie folgt aus:

$$\mu^* S(P) = S(\mu(P))((T_\mu^*)^{-1}a^1, ..., T_\mu x_q)$$
$$\mu_* S(P) = S(\mu(P))((T_\mu^*)a^1, ..., (T_\mu)^{-1}x_q)$$

Speziel für ein skalares Feld f ($(0,0)-$Tensorfeld) gilt:

$$\mu^* f = f \circ \mu$$
$$\mu_* f = f \circ \mu^{-1}$$

Für ein Vektorfeld X ($(1,0)-$Tensorfeld) gilt[42]:

$$\mu^* X = (T_\mu)^{-1} \circ X \circ \mu = T_{\mu^{-1}} \circ X \circ \mu$$
$$\mu_* X = (T_\mu) \circ X \circ \mu^{-1} = T_\mu \circ X \circ \mu^{-1}$$

Die wichtigsten Eigenschaften der oben definierten Abbildungen sind in dem zu (2.3.1) analogen Satz formuliert

Satz 2.3.2 ***1:*** *Die Abbildungen μ^* und μ^* sind zueinander invers.*

2: *Es gilt:*

$$\mu^*(S \otimes T) = (\mu^* S) \otimes (\mu^* T), \text{ sowie}$$
$$\mu_*(S \otimes T) = (\mu_* S) \otimes (\mu_* T).$$

3: *Für zwei Flüße μ und ν gilt*

$$(\mu \circ \nu)^* = \nu^* \circ \mu^*, \text{ sowie}$$
$$(\mu \circ \nu)_* = \mu_* \circ \nu_*.$$

Beweis

1: Für ein Tensorfeld S gilt: $\mu^*(\mu_* S) = T_\mu \circ (\mu_* S) \circ \mu = = T_\mu \circ ((T_\mu)^{-1} \circ S \circ \mu^{-1}) \circ \mu = S$

2: Mit (2.3.1, Punkt 2) folgt:

$$\mu^*(S \otimes T) = T_\mu^* \circ (S \otimes T) \circ \mu =$$
$$= (T_\mu^* S) \otimes (T_\mu^* T) \circ \mu = (T_\mu^* S \circ \mu) \otimes (T_\mu^* T \circ \mu) =$$
$$= (\mu^* S) \otimes (\mu^* T).$$

Die zweite Aussage folgt analog.

3: Mit $T_{\mu \circ \nu} = (T_\mu \circ T_\nu)$, sowie mit (2.3.1, Punkt 3) hat man:

$$(\mu \circ \nu)^* S = (T_\mu \circ T_\nu)^* \circ S \circ \mu \circ \nu = T_\nu^* \circ T_\mu^* \circ S \circ \mu \circ \nu = \nu^* \circ \mu^* S.$$

[42] Wir erinnern uns nochmal an die Abbildungen "Stern oben" und "Stern unten". Für $T : E \to F$, Vektoren $y \in F$ und $x \in E$ ergab sich: $T^* y = T^{-1} y$ und $T_* x = Tx$

Die oben eingeführten Definitionen und bewiesenen Sätze dienen nur einem Zweck - der allgemeinen Formulierung der Lie-Ableitung für beliebige $(p,q)-$Tensorfelder. Später, im nächsten Kapitel wird ein sehr spezielles $(0,2)-$Tensorfeld, die Metrik, auf Isometrien untersucht. Dabei werden Felder gesucht, entlang deren die Metrik invariant bleibt. Das ist eng mit dem Konzept der Lie-Ableitungen verbungen und das ist der Grund, warum man an dieser Stelle einen streng formalen Zugang benötigt.

Bevor der Satz formuliert wird, ist eine kurze Motivation angesagt. Der Ausgangspunkt dieses Kapitels war die Ableitung der Funktion f entlang einer Kurve γ: $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = \frac{d}{dt}\left\{(f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)\right\}$. Das führte zur Relation (10) und zum Fluß $\gamma(t) = \mu_t$. Mit diesem Fluß gilt:

$$\tfrac{d}{dt}(f \circ \gamma) = \tfrac{d}{dt}(f \circ \mu_t),$$

und das ist äquivalent zu

$$\tfrac{d}{dt}(f \circ \mu_t) = \tfrac{d}{dt}(\mu_t^* \circ f) = X(\mu_t) f,$$

wobei die letzte Relation per definition des Vektorfeldes X gilt (Siehe dazu (10) und (11), sowie die Definitionen (2.2.3) und (2.2.5)).

Da f nur ein Spezialfall eines Tensorfeldes ist, motiviert die oberen Überlegungen den folgenden allgemeinen Satz.

Satz 2.3.3 *Für ein Tensorfeld S und ein Vektorfeld X mit seinem Fluß μ_t gilt die Ableitungsformel*

$$\tfrac{d}{dt}\mu_t^* S = \mu_t^* L_X S = L_X(\mu_t^* S)$$

Beweis

Man zeigt zunächst die Vetrauschungsrelation $\mu_t^* L_X S = L_X(\mu_t^* S)$. Wegen $\mu_{t+s}^* = (\mu_t \circ \mu_s)^* = \mu_s^* \circ \mu_t^*$ (Siehe Satz (2.3.2, Punkt 3)) können die beiden Seiten der Gleichung mit μ_s^* multipliziert werden. Für die rechte Seite bedeutet das:

$$\mu_s^* L_X(\mu_t^* S) = \tfrac{d}{ds}(\mu_s^* \circ \mu_t^* S) = \tfrac{d}{ds}(\mu_{t+s}^* S) =$$
$$= \tfrac{d}{d(t+s)}(\mu_{t+s}^* S)$$

wegen der Translationsinvarianz der Ableitung.

Ferner gilt für die linke Seite.

$$\mu_s^* \circ \mu_t^* L_X S = \mu_{t+s}^* L_X S = \tfrac{d}{d(t+s)}(\mu_{t+s}^* S).$$

Die beiden Ausdrücke stimmen überein.

Man verifiziert nun die Ableitungsformel nacheinander für Skalare Felder, Vektor- und Kovektorfelder und verallgemeinert sie für allgemeine Tensorfelder. Wir beschränken uns auf skalare- und Vektorfelder. Der vollständige Beweis kann in ([8], Kapitel 12) gefunden werden.

Für ein skalares Feld f gilt:

$$\tfrac{d}{dt}(\mu_t^* f) = \tfrac{d}{dt}(f \circ \mu_t) =_{Def} X(\mu_t) f =$$
$$= \mu_t^* X f = \mu_t^* L_X f$$

Die Vertauschungsregel $\frac{d}{dt}(\mu_t^* f) = \mu_t^* L_X f$ ist somit für skalare Felder bewiesen. Man betrachtet nun ein Vektorfeld Y, wendet es auf f und bekommt ein anderes skalares Feld Yf (siehe (2.2.2)), für das $\frac{d}{dt}(\mu_t^* Y f)$ berechnet werden kann.

Man verifiziert aber zuerst: $\mu_t^*(Yf) = (\mu_t^* Y)(\mu_t^* f)$.

Linke Seite, ausgewertet an einem Punkt P:
$\mu_t^*(Yf)(P) = (Yf) \circ \mu_t^*(P) = Y(\mu_t^*(P))f$.
Rechte Seite am Punkt P:
$(\mu_t^* Y)(\mu_t^* f)(P) = (T_\mu^* \circ Y \circ \mu_t)(f \circ \mu_t)(P) =$
$= (T_{\mu^{-1}} \circ Y \circ \mu_t)(f \circ \mu_t)(P) =$
$= (Y \circ \mu_t \circ \mu_t^{-1})(f \circ \mu_t)(P) = Y_{\mu(P)} f$.

Mit dieser Eigenschaft gilt $(\mu_t^* Y)f = \mu_t^*(Y(\mu_{-t}^* f))$. Man leitet $(\mu_t^* Y)f$ nach t ab, wobei die Zeitabhängigkeit zunächst nur in $(\mu_t^* Y)$ steckt. Es ist zu beachten, dass f, sowie $Y(\mu_{-t}^* f)$ skalare Felder sind, was $\mu_{-t}^* f = f \circ \mu_{-t}$ und $\mu_t^*(Y(\mu_{-t}^* f)) = Y(\mu_t)(f \circ \mu_{-t})$ impliziert. Weiter gilt:

$$\left\{\tfrac{d}{dt}(\mu_t^* Y)\right\} f = \tfrac{d}{dt}(\mu_t^*(Y(\mu_{-t}^* f))) =$$
$$= \tfrac{d}{dt}\left\{Y(\mu_t)(f \circ \mu_{-t})\right\} = \tfrac{d}{dt}\left\{Y^i(\mu_t)\partial_i(f \circ \mu_{-t})\right\} =$$
$$\tfrac{d}{dt}\left\{Y^i(\mu_t)\right\}\partial_i(f \circ \mu_{-t}) + Y^i(\mu_t)\partial_i \tfrac{d}{dt}\left\{f \circ \mu_{-t}\right\}.$$

Im zweiten Summand wurde die partielle Ableitung ∂_i mit der totalen Ableitung $\frac{d}{dt}$ vertauscht. Das Vektorfeld $Y(\mu_)$ wurde als Linearkombination der Basisvektoren $Y = Y^i(\mu_t)\partial_i$ mit C^∞ skalaren Funktionen $Y^i : M \to \mathbb{R}$ geschrieben. Aus diesem Grund gilt: $Y^i(\mu_t) = \mu_t^* Y^i$, und man bekommt:

$$\tfrac{d}{dt}\left\{Y^i(\mu_t)\right\}\partial_i(f \circ \mu_{-t}) + Y^i(\mu_t)\partial_i \tfrac{d}{dt}\left\{f \circ \mu_{-t}\right\} =$$
$$= \tfrac{d}{dt}\left\{\mu_t^* Y^i\right\}\partial_i(\mu_{-t}^* f) + (\mu_t^* Y^i)\partial_i \tfrac{d}{dt}\left\{\mu_{-t}^* f\right\} =$$
$$= \mu_t^*(L_X Y^i)\partial_i(\mu_{-t}^* f) - (\mu_t^* Y^i)\partial_i \mu_{-t}^*(L_X f).$$

Y^i und f sind skalare Felder, deren Lie-Ableitungen durch $L_X Y^i = XY^i$ und $L_X f = Xf$ gegeben sind. Es folgt:

$$\left\{\tfrac{d}{dt}(\mu_t^* Y)\right\} f =$$
$$= \mu_t^*(XY^i)\partial_i(\mu_{-t}^* f) - (\mu_t^* Y^i)\partial_i \mu_{-t}^*(Xf) =$$
$$= \mu_t^*(XY)(\mu_{-t}^* f) - (\mu_t^* Y)\mu_{-t}^*(Xf) =$$
$$= \mu_t^*(XY)(\mu_{-t}^* f) - \mu_t^*(YX)(\mu_{-t}^* f).$$

Schließlich ergibt sich:

$$\left\{\tfrac{d}{dt}(\mu_t^* Y)\right\} f = \mu_t^*(XY)(\mu_{-t}^* f) - \mu_t^*(YX)(\mu_{-t}^* f) =$$
$$(\mu_t^*[X,Y])(\mu_{-t}^* f) = \mu_t^*([X,Y]f).$$

In den oberen Rechnungen wurde auch die in (2.3.1) postullierte Produktregel für $L_X Y f$ nachgewiesen.

2.3.3 Killing-Vektoren

Die Lie-Ableitung ist ein mächtiges Konzept, das ermöglicht allgemeine Tensorfelder entlang Flußlinien zu verfolgen. Dies gilt insbesondere für Aufgaben der ART.

Wir widmen uns nun folgender Frage. Angenommen, die Metrik $g(x^\alpha)$ ist als Funktion des 4-Vektors x^α gegeben. Durch eine Verschiebung in Richtung eines Vektors ξ^α geht man vom Punkt x^α zum Punkt $x^\alpha + \xi^\alpha$ über. Gibt es ein Vektorfeld $\xi^\alpha(x^\beta)$ mit $g(x^\alpha) - g(x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta)) = 0$? Anders gesagt gibt es eine Transformation, die die Metrik invariant läßt?

Für die konstante Lorentz-Metrik war die Antwort relativ einfach und sie führte zur Lorentz-Transformation. Bei einem ortsabhängigen $(0,2)-$Tensorfeld $g(x^\alpha)$ ist die Suche nach den passenden $\xi^\alpha(x^\beta)$ erschwert.

Per Definition der Lie-Ableigung ist die Änderung der Metrik g entlang der Flußlinie des Vektorfeldes ξ durch

$$L_\xi g = 0$$

gegeben. Ist diese Bedingung erfüllt, so nennt man die Lösungen **Killing-Vektoren**.

Die Lie-Ableitung von g wurde bereits in (9) angegeben. Für zwei Vektorfelder X und Y gilt dann:

$$(L_\xi g)(X,Y) = L_\xi g(X,Y) - g(L_\xi X, Y) - g(X, L_\xi Y).$$

Mit $L_\xi g = 0$ wird das zu

$$0 = L_\xi g(X,Y) - g(L_\xi X, Y) - g(X, L_\xi Y).$$

Wählt man zusätzlich eine ξ-invariante Basis X_μ mit $L_\xi X_\mu = 0$, so folgt:

$$0 = L_\xi \left\{g(X_\mu, X_\nu)\right\}.$$

Diese Relation definiert die Vektorraumstruktur der Menge aller Killing-Vektoren. Angenommen, ξ_1 und ξ_2 sind zwei Killing-Vektoren. Bei konstanten $a_1 \in \mathbb{R}$ und $a_2 \in \mathbb{R}$ ist $a_1\xi_1 + a_2\xi_2$ ebenfalls ein Killing-Vektor.

Für den Beweis braucht man nur $L_{a_1\xi_1 + a_2\xi_2}\left\{g(X_\mu, X_\nu)\right\}$ auszurechnen. Man berücksichtigt dabei, dass $g(X_\mu, X_\nu)$ ein skalares Feld ist. Es folgt:

$$L_{a_1\xi_1 + a_2\xi_2}\left\{g(X_\mu, X_\nu)\right\} =$$
$$= (a_1\xi_1 + a_2\xi_2)\left\{g(X_\mu, X_\nu)\right\} = 0.$$

Da die Killing-Vektoren einen Vektorraum bilden, lassen sie sich als Linearkombinationen von Basisvektoren $\{\xi_i\}$ darstellen. Insbesondere ist auch der Vektor $[\xi_i, \xi_j]$[43] durchaus als eine solche Linearkombination darstellbar:

$$[\xi_i, \xi_j] = C_{ij}^s \xi_s$$

Die dabei auftretenden Koeffizienten C_{ij}^s erhalten einen besonden Namen: Strukturkoeffizienten (Structure coefficients, siehe ([9], §6,2)).

3 Bianchi-Klassifikation

Die analytische Lösung der Einstein‘schen Feldgleichungen ist aufgrund ihrer Nichtlinearität nur dann möglich, wenn bereits vor der Lösung Annahmen über deren Form gemacht werden. Ein schönes Beispiel dafür ist die äußere Schwarzschild-Lösung für eine punktförmige Masse([5], §51). Die Lösung $g_{\mu\nu}$ folgt aus den Feldgleichungen relativ mühefrei, aber es sind folgende Annahmen erforderlich:

- $g_{\mu\nu}$ ist isotrop und statisch.
- $T_{\mu\nu} = 0$ außerhalb der gravitierenden Masse.

In der Kosmologie geht man ähnlich vor ([5], §60). Man stellt Anforderungen an die zukunftige Lösung $g_{\mu\nu}$ und versucht so die Feldgleichungen zu lösen. So ist die Robertson-Walker-Metrik (7) definitionsmäßig isotrop und homogen (Keine expliziten r und φ Abhängigkeiten).

Man kann jedoch die Frage stellen, was genau passiert, wenn die Lösung beispielsweise nur isotrop oder nur homogen sein soll. Genau an dieser Stelle stellt man fest, dass das

[43] Warum die Lie-Klammer ein (Tangential)Vektor ist, wurde im Kapitel (2.2.2) bewiesen.

Konzept der Lie-Ableitungen zusammen mit den oben definierten Killing-Vektoren von großer Bedeutung ist.

Das ist im folgenden Sinne zu verstehen. Die Homogenität einer Raumzeit impliziert die Existenz einer Gruppe von Translationen. Die Killing-Vektoren bilden dann sowohl eine Basis der Gruppe[44], als auch eine Vektorraumbasis für die Raumzeit. Die Suche nach den beiden Basen ist somit nur durch Bildung der Lie-Ableitung der Metrik möglich.

3.1 Definition der invarianten Basis

Die Raum-Zeit Mannigfalltigkeit M ist zusammen mit der oben erwähnten Symmetriegruppe G zu beschreiben. Diese Gruppe besteht aus mehreren (Dimension der Gruppe) Basis-Killing-Vektoren, die auch eine Basis für Vektorfelder auf M bilden.

In *einem* Tangentialraum $TM(P)$ seien Basisvektoren $X_{\mu 0}$ definiert, auf denen die Metrik operieren kann. In anderen Tangentialräumen wählt man die s.g. invariante Basis $\{X_\mu\}$ durch Translationen um $\xi(P)$ und zwar so, dass

$$[\xi_\mu, X_\nu] = 0,\ i = 1, ..., dimG;\ \mu = 1, ..., dimM$$
$$X_\mu(P) = X_{\mu 0}$$

und

$$[X_\mu, X_\nu] = D^\sigma_{\mu\nu} X_\sigma.$$

erfüllt sind.

Somit hat man zwei Strukturkonstanten: C^s_{ij} für die Killing-Vektoren und $D^\sigma_{\mu\nu}$ für die Basisvektoren von X.

Anschaulich gesprochen, enthält M, also, die Raumzeit sehr bestimmte Richtungen ξ_σ. Bewegt man sich in diesen Richtungen, so merkt man keine Änderung der Metrik. Man kann zumindest hoffen, dass es eine Basis aus ξ_σ gibt, die andere Vektorfelder beschreibt.

Um den Zusammenhang zwischen C^s_{ij} und $D^\sigma_{\mu\nu}$ zu finden und die Hoffnung zu bestätigen, schreibt man X_μ im Anfangspunkt (P) als Linearkombination von ξ_σ:

$$X_\mu(P) = a^\sigma_\mu(P)\xi_\sigma,\ a^\sigma_\mu(P) = \delta^\sigma_\mu$$

Die Anfangsbedingung für die Koeffizienten sichert die Lösung von $[\xi_\mu, X_\nu] = 0$ an einem Punkt, denn es gilt:

$$[\xi_\mu, X_\nu](P) = [\xi_\mu, \xi_\mu] = 0,$$

Und genauer:

$$[\xi_\mu, X_\nu] = L_{\xi_\mu} X_\nu = 0 = L_{\xi_\mu}(a^\sigma_\nu \xi_\sigma) \Longleftrightarrow$$
$$0 = L_{\xi_\mu}(a^\sigma_\nu)\xi_\sigma + a^\sigma_\nu L_{\xi_\mu}\xi_\sigma \Rightarrow$$
$$(\xi_\mu a^s_\nu)\xi_s = -a^\sigma_\nu C^s_{\mu\sigma}\xi_s \Rightarrow$$
$$(\xi_\mu a^s_\nu)(P) = -C^s_{\mu\nu}$$

Weiter gilt:

$$[X_\mu, X_\nu] = D^\sigma_{\mu\nu} X_\sigma = [a^\sigma_\mu \xi_\sigma, a^\tau_\nu \xi_\tau] =$$
$$= 1/2 \left\{ a^\sigma_\mu L_{\xi_\sigma}(a^\tau_\nu \xi_\tau) - a^\tau_\nu L_{\xi_\tau}(a^\sigma_\mu \xi_\sigma) \right\}$$

Nach einigen Rechenschritten bekommt man $D^\sigma_{\mu\nu} = -C^\sigma_{\mu\nu}$.

Man schränkt nun diesen allgemeinen Fall auf die für die Kosmologie relevante Probleme. Es wird eine vierdimensionale Mannigfalltigkeit untersucht, die invariant unter drei räumlichen Killing-Vektoren ist.

Seien im folgenden X_0 die Zeit und X_1, X_2, X_3 die drei zeitabhängigen räumlichen Vektoren. Durch Angabe von $C^\sigma_{\mu\nu}$ wird die Killing-Basis festgelegt und dadurch die Symmetriegruppe der Metrik definiert. Da $C^\sigma_{\mu\nu}$ definitionsmäßig schiefsymmetrisch bezüglich der unteren zwei Indizes ist, gibt es insgesamt 9 Komponenten. Jeder Komponente entspricht eine eigene „Welt“, bestehend aus den entsprechenden Killing-Vektoren als Basisvektoren und der der Relation $L_{X_i} g = 0$ genügenden Metrik g. Die vollständige Beschreibung dieser Klassifikation findet man in ([9], §6.4). An dieser Stelle wird jedoch auf weitere Details verzichtet.

Literatur

[1] D. Guilini; T. Filk. *Am Anfang war die Ewigkeit.* 2003.

[2] T. Filk. *Modelle von Raum und Zeit.* 2003.

[3] T. Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie.* 5. Auflage; 2006.

[4] H. Karttunen; P. Kröger. *Fundamental Astronomy.* 4 edition, 2003.

[5] D. F. Lawden. *Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology.* 1982.

[6] L. D. Landau; E. M. Lifschitz. *Theoretische Physik, Band 1.* 1988.

[7] L. D. Landau; E. M. Lifschitz. *Theoretische Physik, Band 2.* 1988.

[8] R. Oloff. *Geomettrie der Raumzeit.* 4. Auflage; 2008.

[9] M. P. Ryan Jr; L. C. Shepley. *Homogeneous Relativistic Cosmologies.* 1975.

[10] Tensorbegriff der Mathematik Wikiperia.

[44] Die Verschiebung des 4-Vektors $x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta)$ ist eine lineare Transformation, die von $\xi^\alpha(x^\beta)$ „erzeugt“ wird. Es gibt trivialerweise eine neutrale Transformation $x^\alpha \rightarrow x^\alpha$ und eine inverse: $x^\alpha + (\xi^\alpha(x^\beta))^{-1} \rightarrow x^\alpha$. Auch die Hintereinanderschaltung zweier solchen Verschiebungen ist ebenfalls eine Verschiebung: $x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta) + \xi^\alpha(x^\beta + \xi^\beta(x^\gamma))$