Darstellungstheorie endlicher Gruppen, speziell der S_n

Inhaltsverzeichnis

1 Gruppen **4**

1.1 Def. Gruppe . . . 4

1.1.1 Bemerkungen . . . 4

1.1.2 Beispiele und Gegenbeispiele . . . 4

1.2 Def. Untergruppe . . . 4

1.2.1 Beispiele . . . 5

1.3 Def. Gruppenhomomorphismus . . . 5

1.3.1 Bemerkungen . . . 5

1.4 Def. Konjugationsoperation . . . 5

1.4.1 Bemerkungen . . . 5

2 Darstellungen endlicher Gruppen **6**

2.1 Def. Darstellung einer Gruppe . . . 6

2.1.1 Bemerkungen . . . 6

2.1.2 Beispiele . . . 6

2.2 Reguläre Darstellung . . . 7

2.2.1 Bemerkung . . . 7

2.2.2 Beispiel . . . 7

2.3 Def. Äquivalenz von Darstellungen . . . 7

2.3.1 Bemerkung . . . 8

2.4 Der Charakter . . . 8

2.4.1 Bemerkungen . . . 8

2.5 Def. unitäre Darstellung . . . 8

2.5.1 Bemerkung . . . 8

2.6 Satz über unitäre Darstellungen einer endlichen Gruppe . . . 9

2.7 Def. Direkte Summe von Darstellungen . . . 10

2.7.1 Bemerkung . . . 10

2.8 Def. Unter-, irreduzible, reduzible und vollständig reduzible Darstellung . . . 10

2.9 Satz über die Reduziblität endlicher Gruppen . . . 11

2.10 Lemma von Schur Teil 1 . . . 11

2.11 Lemma von Schur Teil 2 . . . 12

2.12 Die Fundamentale Orthogonalitätsrelation . . . 13

2.13 Orthogonalität von Charaktären . . . 14

2.14 Satz über die Anzahl der irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe . . . 15

2.15 Zerlegung in irreduzible Darstellungen . . . 15

3 Die irreduziblen Darstellungen der Permutationsgruppe S_n von n Elementen **17**

3.1 Bemerkung . . . 17

3.2 Satz von Cayley . . . 17

3.2.1 Bemerkung . . . 17

3.3 Die innere Struktur der S_n . . . 17

3.3.1 Zykel . . . 17

3.3.2 Lemma . . . 18

3.3.3 Satz über die Konjugationsklassen der S_n . . . 18

3.3.4 Bemerkungen . . . 18

3.4 Partition eine natürlichen Zahl 18
3.5 Young Diagramme und Eigenschaften 18
3.6 Young Tableau und Eigenschaften 19
3.7 Bestimmung der irreduziblen Darstellungen der S_3 mittels Young Tableaus 20

1 Gruppen

1.1 Def. Gruppe

Eine Gruppe G ist eine Menge G mit einer assoziativen Verknüpfung

$$*_G : G \times G \longrightarrow G, \quad (g,h) \longmapsto g *_G h$$

(Assoziativität bedeutet: $a *_G (b *_G c) = (a *_G b) *_G c$), so dass gilt:

- $\exists e_G \in G$, das *neutrale Element* der Gruppe G, mit $g *_G e_G = e_G *_G g = g$ $\forall g \in G$.
- $\forall g \in G \ \exists h \in G$, das *inverse Element* zu $g \in G$, mit $h *_G g = g *_G h = e_G$. h schreibt man in diesem Fall auch als $h = g^{-1}$.

1.1.1 Bemerkungen

- Gilt $h *_G g = g *_G h \ \forall g, h \in G$, so nennt man die Gruppe G *kommutativ* oder auch *abelsch*.
- Die Anzahl $\#G = |G|$ der Elemente der Gruppe G heißt *Ordnung* der Gruppe. Ist $|G| < \infty$, so heißt die Gruppe *endlich*, anderenfalls *unendlich*.

1.1.2 Beispiele und Gegenbeispiele

Beispiele für Gruppen und auch Gegenbeispiele für Mengen mit Verknüpfungen, die keine Gruppen sind, gibt es viele. Hier eine kleine Auswahl:

- $\mathbb{Z}$ mit der Addition $+$ ist eine kommutative unendliche Gruppe.
- $\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation $\bullet$ ist keine Gruppe. Es fehlen die Inversen Elemente $\forall z \in \mathbb{Z}/\{1, -1\}$.
- $\mathbb{C}$ mit der Addition $+$ ist eine kommutative unendliche Gruppe.
- $Sym(X) = \{f : X \longrightarrow X \big| f \ ist \ bijektiv\}$ mit der Verknüpfung $\circ$ von Abbildungen ist für jede Menge X eine Gruppe.
- Die dreielementige Menge $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{e, g, h\}$ mit der Verknüpfung $*_G$ und der Multiplikationstafel

$*_G$	e	g	h
e	e	g	h
g	g	h	e
h	h	e	g

  ist eine endliche abelsche Gruppe.

1.2 Def. Untergruppe

Sei G eine Gruppe. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heißt *Untergruppe* von G gdw. sie abgeschlossen unter der Verknüpfung $*_G$ ist (d.h. $\forall s, t \in H$ ist $s *_G t \in H$) und mit dieser Verknüpfung selbst wieder eine Gruppe wird.

1.2.1 Beispiele

- Die einelementige Gruppe $\{e_G\}$ und die ganze Gruppe G sind immer Untergruppen.
- $\mathbb{Z}$ mit der Addition $+$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{C}$ mit der Addition $+$.

1.3 Def. Gruppenhomomorphismus

Seien G und H zwei Gruppen. Eine Abbildung

$$\phi : G \longrightarrow H$$

heißt *Gruppenhomomorphismus* (kurz *Homomorphismus*) gdw. $\phi(a *_G b) = \phi(a) *_H \phi(b)\ \forall a, b \in G$ ist.

1.3.1 Bemerkungen

Sei $\phi : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus.

- Ist ϕ bijektiv, so spricht man von einem *Gruppenisomorphismus* (kurz *Isomorphismus*).
- Die Menge $Kern(\phi) := \{g \in G \big| \phi(g) = e_H\}$ ist eine Untergruppe von G und heißt der *Kern von ϕ*.
- ϕ ist injektiv gdw. $Kern(\phi) = e_G$.
- Die Menge $Bild(\phi) := \{h \in H \big| \exists g \in G\ \ mit\ \ \phi(g) = h\}$ ist eine Untergruppe von H und heißt das *Bild von ϕ*.

1.4 Def. Konjugationsoperation

Sei G eine Gruppe. Die Abbildung

$$\phi : G \longrightarrow Sym(G), \quad g \longmapsto \phi(g)\ \ mit\ \ \phi(g)(h) = ghg^{-1}$$

ist ein Homomorphismus von Gruppen, die sogenannte *Konjugationsoperation*.

1.4.1 Bemerkungen

- Sei $h \in G$ fest gewählt. Die Menge $GhG^{-1} := \{ghg^{-1} | g \in G\} \subseteq G$ heißt *Konjugationsklasse* von G.
- Die Relation $R \subset G \times G$ mit $g' \sim_R h$ gdw. $g' = ghg^{-1}$ für ein $g \in G$ definiert eine *Äquivalenzrelation*.
- Die Gruppe G wird von ihren Konjugationsklassen in disjunkte Teilmengen zerlegt.
- Die Konjugationsklassen werden später noch sehr hilfreich bei der Darstellungstheorie sein. Es gilt nämlich #{irreduzible, inäquivalente Darstellungen von G} = #{Konjugationsklassen von G}.

2 Darstellungen endlicher Gruppen

2.1 Def. Darstellung einer Gruppe

Sein K ein Körper.
Eine *Darstellung* (englisch: *representation*) einer Gruppe G ist ein Paar (V, ρ), bestehend aus einem K-Vektorraum V und einem Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \longrightarrow GL(V).$$

2.1.1 Bemerkungen

- V bezeichnet man dann als den *Darstellungsraum*, $\dim(V)$ wird *Dimension der Darstellung* genannt.

- Ist $dim(V) < \infty$, so ist $GL(V) \cong GL_n(K)$, die Menge aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in K.
  In diesem Fall werden die abstrakten Gruppenelemente von G durch eine konkrete Gruppe von invertierbaren Matrizen dargestellt. Eigenschaften und komplexe Fragestellungen im Gebiet der Gruppentheorie können somit mittels Methoden der *Linearen Algebra* behandelt werden. Dies ist eine enorme Vereinfachung des Ausgangsproblems, da die *Linearen Algebra* ein kleines, abgeschlossenes und wohlverstandenes Gebiet der Mathematik ist.

- Im Falle eines Hilbertraums H (jeder Hilbertraum ist auch ein Vektorraum) mit $dim(H) = \infty$ sind die Elemente von $GL(H)$ lineare und bijektive Operatoren. Ist die Basis des Hilbertraums jedoch abzählbar, z.B. h_i mit $i \in \mathbb{N}$, so kann man einem Operator O immer noch eine Matrix $(O_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ zuordnen. Diese Matrix besitzt als Koeffizienten

  $$O_{ij} = \big\langle h_i, Oh_j \big\rangle_H,$$

  wobei $\big\langle , \big\rangle_H$ das Skalarprodukt auf H ist. In der Physik wird hierfür, wie auch im Folgendem, die *DIRACsche Notation* verwendet:

  $$O_{ij} = \big\langle h_i \big| O \big| h_j \big\rangle.$$

- Ist $dim(H) = \infty$ und die Basis überabzählbar, so kann man nur noch von linearen Operatoren sprechen. Dieser Fall sei im Folgendem ausgeschlossen!

- Im Folgendem sei der Körper K, über welchem der Darstellungsraum V gebildet wird explizit mit $K = \mathbb{C}$ gegeben.

2.1.2 Beispiele

- Jeder Vektorraum V wird zu einer Darstellung einer endlichen Gruppe G mit $\rho(g) = id_V \;\; \forall g \in G$. Dies ist die sogenannte *Einsdarstellung*.

- Für die Gruppe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist $V = \mathbb{C}$ und $\rho(e) = 1$, $\rho(g) = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und $\rho(h) = e^{\frac{4\pi i}{3}}$ eine 1-dimensionale Darstellung.

2.2 Reguläre Darstellung

Die *reguläre Darstellung* einer endlichen Gruppe G ist eine besonders einfache, aber zum Teil mühselig zu konstruierende Darstellung. Dazu nummeriert man die Gruppenelemente in einer Folge $\{g_i\}_{i\in\{1,2,\ldots,|G|\}}$ an. Danach ordnet man jedem Gruppenelement g_i einen Basisvektor e_i der Standardbasis des Standardvektorraums $K^{|G|}$ zu, mit Hilfe der Bijektion von Mengen

$$\phi : G \longrightarrow K^{|G|}, \quad \phi(g_i) = e_i.$$

Danach wird der Gruppenhomomorphismus ρ wie folgt definiert:

$$\rho : G \longrightarrow GL_{|G|}(K), \quad \rho(g_i)(\lambda e_j + \mu e_k) := \lambda\phi(g_i *_G g_j) + \mu\phi(g_i *_G g_k).$$

So wird ρ definitionsgemäß linear und, wegen der Eindeutigkeit der Elemente von G und der Bijektivität von ϕ, sogar eine Bijektion.

2.2.1 Bemerkung

- Die Dimension der *regulären Darstellung* ist definitionsgemäß $|G| < \infty$.
- Analog könnte man auch die *reguläre Darstellung* einer unendlichen Gruppe mit abzählbar vielen Elementen konstruieren.
- Die Matrixelemente können wegen

  $$(\rho(g_k))_{ij} = \langle e_i \big| \rho(g_k) \big| e_j \rangle = \langle e_i \big| e_l \rangle = \delta_{il},$$

  wobei $g_k *_G g_j = g_l$ ist, nur die Werte 0 und 1 annehmen.
- Die Diagonalelemente aller $(\rho(g_k)_{ij})_{(i,j)\in\{1,\ldots,|G|\}^2}$ verschwinden, außer für $(\rho(e_G)_{ij})_{(i,j)\in\{1,\ldots,|G|\}^2} = E_{|G|}$.

2.2.2 Beispiel

Die *reguläre Darstellung* der Gruppe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist

$$V = \mathbb{C}^3, \quad \rho(e) = E_3, \quad \rho(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \rho(h) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 Def. Äquivalenz von Darstellungen

In einem Vektorraum ist die Wahl einer Basis nicht eindeutig. Alle Basen sind gleichberechtigt. Geht man von einer Basis durch eine lineare Transformation S in eine andere Basis$'$ über, so ändert sich die Darstellung der Elemente von G. Die Dimension der Darstellung bleibt jedoch erhalten. Ändert sich die Darstellung aller Elemente $g \in G$ folgendermaßen:

$$\rho(g)' = S^{-1}\rho(g)S,$$

so heißen zwei solche Darstellungen (V, ρ) und (V, ρ'), für die es eine derartige lineare Transformation S $\forall g \in G$ gibt, *äquivalent*. Diese Bezeichnung folgt in Anlehnung daran, dass diese Relation $R \subset GL(V) \times GL(V)$ mit $A \sim_R B$ gdw. $A = S^{-1}BS$ für ein $S \in GL(V)$ eine *Äquivalenzrelation* definiert.

2.3.1 Bemerkung

Die Darstellungen der Elemente einer Konjugationsklasse sind alle paarweise äquivalent.

2.4 Der Charakter

Es sei an dieser Stelle an die Spur einer quadratischen Matrix $(M_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ erinnert.

$$Spur(M) = \sum_i M_{ii}$$

Die Spur des Produkts zweier gleich großen quadratischen Matrizen $(A_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ und $(B_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ ist unabhängig von der Reihenfolge der Produzenten:

$$Spur(AB) = Spur(AB),$$

wie man mit ein wenig Aufwand nachrechnen kann. Dies gilt auch für Operatoren[1]. Betrachtet man nun den oberen Fall, so erhält man:

$$Spur(\rho(g)') = Spur(S^{-1}\rho(g)S) = Spur(\rho(g)SS^{-1}) = Spur(\rho(g)) \;\; \forall g \in G.$$

Die Spur der Darstellung eines Elementes $g \in G$ ist also eine Größe, die für äquivalente Darstellungen gleich ist.
Man nennt allgemein $\chi(g) = Spur(\rho(g))$ den *Charakter* von g unter der Darstellung (V, ρ).
Später werden einige, erstaunliche Beziehungen zwischen Charakteren und Darstellungen hergeleitet werden.

2.4.1 Bemerkungen

- Der Charakter des neutralen Elementes e_G einer endlichen Gruppe G ist immer die Dimension der Darstellung.
- Der Charakter jeden Elementes einer endlichen Gruppe G ist bei der *Einsdarstellung* immer die Dimension der Darstellung.
- Bei der *regulären Darstellung* ist, bis auf den Charakter des neutralen Elementes, jeder Charakter Null.
- Von diesen Bemerkungen wird bei der Orthogonalitätsrelation für Charaktere Gebrauch gemacht werden.

2.5 Def. unitäre Darstellung

Eine Darstellung (V, ρ) einer Gruppe G heißt *unitär* gdw. der Operator (bzw. die Matrix) $\rho(g)$ unitär ist $\forall g$, d.h. $(\rho(g)^T)^* = (\rho(g)^*)^T = \rho(g)^\dagger = \rho(g)^{-1}$

2.5.1 Bemerkung

Die Wichtigkeit dieser Definition wird sich im folgendem Satz zeigen, in welchem gesagt wird, dass alle Darstellungen endlicher Gruppen äquivalent zu unitären Darstellungen sind.

[1] Wie man dies zeigen kann, weiß ich aber nicht.

2.6 Satz über unitäre Darstellungen einer endlichen Gruppe

Jede Darstellung einer endlichen Gruppe ist äquivalent zu einer unitären Darstellung.

Beweis:
Sei (V, ρ) eine Darstellung der endlichen Gruppe G. Definiere auf V das Skalarprodukt

$$(x, y) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \big\langle \rho(g)x \big| \rho(g)y \big\rangle,$$

wobei $\langle | \rangle$ das *Standardskalarprodukt* auf V ist, also.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{N} x_j y_j^*$$

im endlichdimensionalen Fall und

$$\langle x, y \rangle = \int x^*(q) y(q) \mathrm{d}q$$

im Falle eines unendlichdimesionalen Hilbertraumes, in Anlehnung daran, dass die Vektoren im Hilbertraum auch Funktionen seien können.
Der hier vorgestellte Beweisversuch geht in beiden Fällen ähnlich. Sei $h \in G$, dann ist:

$$\begin{aligned}
(\rho(h)x, \rho(h)y) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \big\langle \rho(g)\rho(h)x \big| \rho(g)\rho(h)y \big\rangle \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \big\langle \rho(g *_G h)x \big| \rho(g *_G h)y \big\rangle \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \big\langle \rho(g')x \big| \rho(g')y \big\rangle \\
&= (x, y)
\end{aligned}$$

Die Umformung im zweiten Schritt war möglich, da mit g die Verknüpfung $g *_G h$ alle Gruppenelemente durchläuft. Man betrachte nun die explizite Formel des Skalarprodukts $(\rho(h)x, \rho(h)y)$:

$$\begin{aligned}
(\rho(h)x, \rho(h)y) &= \sum_{g \in G} \int (\rho(g *_G h)x)^* \rho(g *_G h) y \mathrm{d}q \\
&= \sum_{g' \in G} \int (\rho(g')x)^* \rho(g') y \mathrm{d}q
\end{aligned}$$

Man kann nun alles vergessen, was man über die innere Zusammensetzung von g' weiß. Die Summe der Integrale bleibt genau gleich, wenn man nun $g' = h *_G g''$ schreibt und über alle $g'' \in G$ summiert. Dies bedeutet im Grunde genommen nur eine Umsortierung der Summanden. Deswegen war es wichtig vorher zu prüfen, dass die Summe der Integrale konvergiert.

$$\begin{aligned}\Longrightarrow (\rho(h)x, \rho(h)y) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g''\in G}\int (\rho(h *_G g'')x)^* \rho(h *_G g'')y \mathrm{d}q \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g''\in G}\int x^*(\rho(h *_G g''))^\dagger \rho(h *_G g'')y \mathrm{d}q \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g''\in G}\int x^*(\rho(g''))^\dagger(\rho(h))^\dagger \rho(h)\rho(g'')y \mathrm{d}q \\ &= (x,y) \ \ \forall x,y \in V, \ \ \forall h \in G.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow (\rho(h))^\dagger{=}(\rho(h))^{-1}$, da das Skalarprodukt nicht ausgeartet ist.

2.7 Def. Direkte Summe von Darstellungen

Seien (V, ρ) und (W, σ) zwei Darstellungen einer Gruppe G über einen festen Körper K, so wird ihre *direkte Summe* definiert als Paar $(V \bigoplus W, (\rho, \sigma))$ mit $(\rho, \sigma)(g) = (\rho(g), \sigma(g))$. In Matrixschreibweise ist

$$(\rho(g), \sigma(g)) = \begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \sigma(g) \end{pmatrix}$$

Analog wird so die *direkte Summe* beliebig vieler Darstellungen definiert.

2.7.1 Bemerkung

Für die folgenden Betrachtungen wird die *direkte Summe* nur aus endlich vielen Unterdarstellungen gebildet werden. In diesem Fall stimmt die *direkte Summe* mit dem *kartesischen Produkt* überein.

2.8 Def. Unter-, irreduzible, reduzible und vollständig reduzible Darstellung

Sei (V, ρ) Darstellung einer Gruppe G.

- Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum von V, so heißt U *Unterdarstellung von* V gdw. $\rho(g)(u) \in U \ \forall g \in G$ und $\forall u \in U$.
- Die Darstellung (V, ρ) heißt *irreduzibel* oder *einfach* gdw. $\{0_V\}$ und V die einzigen Unterdarstellungen von V sind und *reduzibel* falls nicht.
- Die Darstellung (V, ρ) heißt *vollständig reduzibel* gdw. sie sich als eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen schreiben lässt.

2.9 Satz über die Reduziblität endlicher Gruppen

Jede Darstellung einer endlichen Gruppe ist vollständig reduzibel

Beweis:
Sei (V, ρ) eine unitäre Darstellung der endlichen Gruppe G. Ist sie irreduzibel, so ist nichts zu zeigen.
Sei diese unitäre Darstellung also reduzibel, mit den Unterdarstellungen $U_1, U_2, ..., U_N$.
Zeige nun, dass $V/\bigcup_{i=1}^{N} U_i$ eine Unterdarstellung von V ist. Der Einfachheit nenne $\bigcup_{i=1}^{N} U_i = U$ und betrachte dies als eine einzige Unterdarstellung. Im Folgenden ist $v, w \in V/U$ und $u, u' \in U$.
Betrachte den folgenden Operator:

$$P^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) P_U \rho(g^{-1}),$$

wobei P_U die Projektion auf U ist, also $P_U(u) = id(u) = u$ und $P_U(v) = 0$.
$P^0(u) = u$, da U eine Unterdarstellung ist.
$P^0(v) = 0$, denn wäre $\rho(g^{-1})(v)$ in V, insbesondere mit Komponenten in U, so könnte man $\rho(g^{-1})(v)$ schreiben als $w + u \Longrightarrow \rho(g)(w + u) = \rho(g)(w) + \rho(g)(u) = v' + u = v$, im Widerspruch zur Voraussetzung von v.
$\forall h \in G$ gilt:

$$\begin{aligned}
\rho(h)P^0 &= \rho(h)\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) P_U \rho(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(h *_G g) P_U \rho(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \rho(g') P_U \rho((g')^{-1} *_G h) \\
&= \big[\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) P_U \rho(g^{-1})\big]\rho(h) \\
&= P^0 \rho(h)
\end{aligned}$$

Also gilt $\forall v \in V/U$, dass $\rho(h)(v) \in V/U$, weil $P^0\rho(h)(v) = \rho(h)P^0(v) = 0$. V/U ist also ebenfalls eine Unterdarstellung von V. Mit Induktion kann man jetzt die Unterdarstellungen weiter zerlegen.

2.10 Lemma von Schur Teil 1

Seien $(V, \rho_V(g))$ und $(W, \rho_W(g))$ zwei inäquivalente, irreduzible Darstellungen von einer endlichen Gruppe G und $A : V \longrightarrow W$ linear, so dass gilt

$$\rho_W(g)A = A\rho_V(g) \ \ \forall g \in G,$$

dann ist schon A=0.

Beweis:
Betrachte den Kern von A.
Sei $|\mu\rangle \in Kern(A) \Longrightarrow \rho_V(g)|\mu\rangle \in Kern(A)\ \forall g \in G$, da $\rho_W(g)[A|\mu\rangle] = 0 = A[\rho_V(g)|\mu\rangle]$.
$\Longrightarrow$ Kern(A) ist ein unter $\rho_V(g)$ invarianter Raum $\forall g \in G$, also eine Unterdarstellung von V. Da $(V, \rho_V(g))$ nach Voraussetzung irreduzibel ist, ist $Kern(A) = 0_V$ oder $Kern(A) = V$. Wäre $Kern(A) = V$, so wäre bereits $A \equiv 0$. Also sei $Kern(A) = 0_V$, d.h. A ist injektiv. Da A linear ist, ist A ein injektiver Homomorphismus
Betrachte nun das Bild von A. $Bild(A)$ ist eine Untergruppe von W, da A ein Gruppenhomomorphismus ist.
$\forall |\mu\rangle \in V/\{0_V\}$ ist $\rho_W(g)[A|\mu\rangle] = A[\rho_V(g)|\mu\rangle] \neq 0_W\ \ \forall g \in G$, da A, $\rho_V(g)$ und $\rho_W(g)$ injektiv sind. Wegen der Irreduzibilität von $(W, \rho_W(g)) \Longrightarrow Bild(A) = 0_W$ oder $Bild(A) = W$. Ist $Bild(A) = 0_W$, so ist schon $A \equiv 0$. Es ist also $Bild(A) = W \Longrightarrow$ A ist surjektiv $\Longrightarrow$ A ist bijektiv.
Aus $\rho_W(g)A = A\rho_V(g)\ \ \forall g \in G$ folgt also $A^{-1}\rho_W(g)A = \rho_V(g)\ \ \forall g \in G$, im Widerspruch zur Inäquivalenz von $(V, \rho_V(g))$ und $(W, \rho_W(g))$.

2.11 Lemma von Schur Teil 2

Seien $(V, \rho_1(g))$ und $(V, \rho_2(g))$ zwei äquivalente, irreduzible, n-dimensionale Darstellungen (insbesondere endlich) von einer endlichen Gruppe G. Gilt

$$\rho_1(g)A = A\rho_2(g)\ \ \forall g \in G,$$

so folgt $A = \lambda E_n$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ und E_n die Einheitsmatrix in $GL_n(K)$ ist.

Beweis:
Sei O.B.d.A $\rho_1(g) = \rho_2(g)$, sonst schreibe um:
$\rho_1(g)A' = A'\rho_2(g) = A'S^{-1}\rho_1(g)S \Longleftrightarrow \rho_1(g)A'S^{-1} = A'S^{-1}\rho_1(g)$.
Schreibe nun $A := A'S^{-1}$ und es folgt $\rho_1(g)A = A\rho_1(g)\ \forall g \in G$
A muss eine $n \times n$-Matrix sein, da $\rho(g)$ eine ist.
Da $dim(V) = n$ endlich ist, hat A mindestens einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ (das *charakteristische Polynom* $det(A - \lambda E_n)$ ist immer $\neq 0$). Sei $|\mu\rangle$ der zugehörige Eigenvektor.
$\Longrightarrow \rho(g)(A - \lambda E_n) = (A - \lambda E_n)\rho(g)\ \ \forall g \in G$, da die Einheitsmatrix mit allen anderen Matrizen kommutiert. Schreibe $B := (A - \lambda E_n)$ $\Longrightarrow \rho(g)B = B\rho(g)\ \ \forall g \in G$. Wende beiden Seiten auf $|\mu\rangle$ an. $\Longrightarrow$ $\rho(g)[B|\mu\rangle] = B[\rho(g)|\mu\rangle] = 0\ \forall g \in G$. $\rho(g)|\mu\rangle \neq 0$, da $\rho(g)$ eine bijektive, lineare Abbildung ist. Aus diesem Grund muss $\rho(g)|\mu\rangle$ ein weiterer Eigenvektor von A zum Eigenwert λ sein $\forall g \in G$. Diese Prozedur mehrfach durchgeführt bedeutet aber nun, dass der Spann aller Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ invariant unter $\rho(g)$ $\forall g \in G$ ist, also eine Unterdarstellung. Nach Vorraussetzung ist $\rho(g)$ irreduzibel, d.h. der Spann aller Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ ist entweder 0_V oder V selbst. 0_V ist nach der Definition von Eigenvektoren nicht möglich $\Longrightarrow kern(B) = V \Longrightarrow A = \lambda E_n$

2.12 Die Fundamentale Orthogonalitätsrelation

Seien (V_α, ρ^α) und (V_β, ρ^β) für $\alpha \neq \beta$ zwei irreduzible inäquivalente Darstellungen einer endlichen Gruppe G. Für $\alpha = \beta$ seien die Darstellungen irreduzibel und äquivalent, also O.B.d.A. schon gleich.
Betrachte den Operator

$$B := \sum_{g \in G} \rho^\alpha(g) A \rho^\beta(g^{-1})$$

für eine zunächst beliebige lineare Abbildung A. Anwendung von $\rho^\alpha(h)$ für ein beliebiges $h \in G$ von links ergibt:

$$\rho^\alpha(h) \sum_{g \in G} \rho^\alpha(g) A \rho^\beta(g^{-1}) = \sum_{g \in G} \rho^\alpha(h) \rho^\alpha(g) A \rho^\beta(g^{-1}) = \sum_{g \in G} \rho^\alpha(h *_G g) A \rho^\beta(g^{-1})$$

Beim Durchlaufen aller $g \in G$ durchläuft $h *_G g$ alle $g' \in G$, also

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \rho^\alpha(h *_G g) A \rho^\beta(g^{-1}) &= \sum_{g' \in G} \rho^\alpha(g') A \rho^\beta(g'^{-1} *_G h) \\ &= \sum_{g \in G} \rho^\alpha(g) A \rho^\beta(g^{-1}) \rho^\beta(h) \\ &= \big[\sum_{g \in G} \rho^\alpha(g) A \rho^\beta(g^{-1}) \big] \rho^\beta(h) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \rho^\alpha(h) B = B \rho^\beta(h) \;\; \forall h \in G$, es sind also die Bedingungen für das *Lemma von Schur* erfüllt.

$$\Longrightarrow B = \sum_{g \in G} \rho^\alpha(g) A \rho^\beta(g^{-1}) = \lambda^\alpha_A \delta_{\alpha\beta} E,$$

wobei $\lambda^\alpha_A \in \mathbb{C}$ eine Konstante ist, die von der Darstellung und der linearen Abbildung A abhängt und E die Identität (Einheitsmatrix) darstellt.
In rein formaler Matrixschreibweise, also ohne darauf zu achten ob die Summen konvergieren oder nicht, sieht die Gleichung für den Fall $\alpha = \beta$ folgendermaßen aus:

$$\sum_{g \in G} \sum_{k,l} (\rho^\alpha(g))_{ik} A_{kl} (\rho^\alpha(g^{-1}))_{lj} = \lambda^\alpha_A (E)_{ij}.$$

Wähle nun $A = E_{rs}$, also diejenige Matrix, die nur in der Komponenten rs eine 1 hat und sonst nur 0. $E_{rs} = \delta_{kr}\delta_{ls}$. Es folgt:

$$\Longrightarrow \lambda^\alpha_{rs} (E)_{ij} = \sum_{g \in G} (\rho^\alpha(g))_{ir} ((\rho^\alpha(g))^{-1})_{sj}$$

Nimmt man nun die Spur bzgl. ij, so erhält man:

$$\Longrightarrow \lambda^\alpha_{rs} dim(V_\alpha) = \sum_{g \in G} (\rho^\alpha(e))_{sr} = \delta_{sr} |G| \Longrightarrow \lambda^\alpha_{rs} = \frac{|G|}{dim(V_\alpha)} \delta_{rs}$$

Insgesamt erhält man die sogenannte *fundamentale Orthogonalitätsrelation*:

$$\sum_{g \in G} (\rho^\alpha(g))_{ir} (\rho^\beta(g^{-1}))_{sj} = \frac{|G|}{dim(V_\alpha)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta_{rs}$$

2.13 Orthogonalität von Charaktären

Bildet man auf beiden Seiten der fundamentalen orthogonalen Relation die Spur bzgl. ir und sj durch $\sum_{i,j} \delta_{ir}\delta_{sj}$, so erhält man folgende Beziehung für die Charaktere von irreduziblen Darstellungen:

$$\sum_{g\in G} \chi^\alpha(g)\chi^\beta(g^{-1}) = \frac{|G|}{dim(V_\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\sum_{i,j}\delta_{ij}\delta_{ij} = \frac{|G|}{dim(V_\alpha)}\delta_{\alpha\beta}\sum_i \delta_{ii} = |G|\delta_{\alpha\beta}$$

Etwas abstrakter aufgefasst, hat man also ein Skalarprodukt auf der Menge der Charaktere erhalten:

$$\langle \chi^\alpha | \chi^\beta \rangle := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^\alpha(g)\chi^\beta(g^{-1}) = \delta_{\alpha\beta}$$

Wie bereits angesprochen sind die Charaktere auf den Konjugationsklassen von G konstant, d.h. für alle Elemente aus einer Konjugationsklasse nehmen die Charaktere die selben Werte an. Weiterhin wird G von seinen Konjugationsklassen disjunkt zerlegt. Habe also G k Konjugationsklassen K_i, in denen jeweils k_i, i=1, ..., k, Elemente liegen. Die Summe kann dann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^\alpha(g)\chi^\beta(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{k} k_i\chi_i^\alpha(\chi_i^\beta)^* = \delta_{\alpha\beta},$$

wobei χ_i^α bzw. χ_i^β der Charakter ausgewertet an einem Repräsentanten der Konjugationsklasse K_i ist. Die komplexe Konjugation kommt dadurch herein, dass χ^β an einem Representanten^{-1} ausgewertet werden muss, d.h. $\rho^\beta(g^{-1}) = (\rho^\beta(g))^{-1} = (\rho^\beta(g))^\dagger$, da jede Darstellung einer endlichen Gruppe äquivalent zu einer unitären Darstellung ist. Das Transponieren ändert aber die Spur einer Matrix nicht.
Obere Gleichung kann man aber nun als Orthogonalitätsrelation zweier Vektoren $\chi^\alpha = (\sqrt{k_1}\chi_1^\alpha, ..., \sqrt{k_k}\chi_k^\alpha)$ in einem k-dimensionalen Raum auffassen. In so einem Raum kann es aber nicht mehr als k orthogonale Vektoren geben, d.h. wenn r die Anzahl der irreduziblen Darstellungen von G sind, dann muss folglich $r \leq k$ gelten. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es noch einen von den anderen verschiedenen Charakter, was aber nicht sein kann.
Für $\alpha = \beta$ erhält man:

$$\sum_{g\in G}\chi^\alpha(g)\chi^\alpha(g^{-1}) = \sum_{g\in G}|\chi^\alpha(g)|^2 = |G|$$

Das bedeutet, dass die Summe der Quadrate der Charaktere der irreduziblen Darstellungen gleich der Gruppenordnung ist. Dies kann man als Kriterium für die irreduzibilität einer Darstellung verwenden.
Eine weitere wichitge Relation erhält man, wenn man ρ^β als die *Einsdarstellung* wählt, also $\rho^\beta(g) = id$ und $\chi^\beta(g) = dim(V_\beta)$ $\forall g \in G$ und ρ^α verschieden. Es folgt dann nämlich:

$$\sum_{g\in G}\chi^\alpha(g) = 0$$

Die Summe der Charaktere aller Gruppenelemente ist für jede irreduzible Darstellung, die nicht die Einsdarstellung ist, Null!
Man kann auch eine Orthogonalitätsrelation bzgl. ij herleiten.
Definiere dazu den Operator f mit Matrixelementen $f_{i\alpha} = \sqrt{\frac{k_i}{|G|}}\chi^\alpha(g_i)$, wobei g_i ein Repräsentant der Konjugationsklasse K_i ist. Es gilt

$$(f^\dagger f)_{\alpha\beta} = \sum_l (f^\dagger)_{\alpha l}(f)_{l\beta} = \sum_l \sqrt{\frac{k_l}{|G|}}\chi^\alpha(g_l)\sqrt{\frac{k_l}{|G|}}\chi^\beta(g_l) = \delta_{\alpha\beta},$$

nach der Orthogonalitätsbedingung. Es gilt also $f^\dagger f = E$, also $f^\dagger = f^{-1}$. f ist also quadratisch und unitär. Hieraus folgt wiederum $ff^\dagger = E$, oder ausgeschrieben:

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \sqrt{\frac{k_i}{|G|}}\chi^\alpha(g_i)\sqrt{\frac{k_j}{|G|}}\chi^\alpha(g_j) = \delta_{ij}$$

Analog zu bisherigen Überlegungen ist dies eine Orthogonalitätsbedingung für die Vektoren $\sqrt{\frac{k_i}{|G|}}\chi(g_i) = (\sqrt{\frac{k_i}{|G|}}\chi^1(g_i), ..., \sqrt{\frac{k_i}{|G|}}\chi^r(g_i))$ in einem r-Dimensionalen Raum. In diesem kann es nicht mehr als r orthogonale Vektoren geben $\Longrightarrow k \leq r$. Aus $k \leq r$ und $r \leq k$ folgt nun aber $r = k$! Es wurde somit der folgende Satz bewiesen:

2.14 Satz über die Anzahl der irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe

Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen derselbigen.

2.15 Zerlegung in irreduzible Darstellungen

Sei (V, ρ) eine nicht notwendigerweise irreduzible Darstellung einer endlichen Gruppe G. V lässt sich folgendermaßen zerlegen in

$$V = \bigoplus_{\beta=1}^{r} a_\beta V_\beta, \quad dim(V) = \sum_{\beta=1}^{r} a_\beta dim(V_\beta)$$

r ist die Anzahl der Konjugationsklassen von G und a_β ist die Vielfachheit, mit welcher die Unterdarstellung (V_β, ρ^β) in (V, ρ) vetreten ist. Analog sind

$$\rho = \bigoplus_{\beta=1}^{r} a_\beta \rho^\beta$$

und

$$\chi = \sum_{\beta=1}^{r} a_\beta \chi^\beta$$

Mit der Orthogonalitätsrelation ergibt sich für die Vielfachheiten:

$$a_\alpha = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi(g)(\chi^\alpha(g))^*$$

Nimmt man nun für (V, ρ) die *reguläre Darstellung* an, so ergibt sich

$$a_\alpha = \frac{1}{|G|} \chi^{regulär}(e)(\chi^\alpha(e))^* = \frac{1}{|G|} |G| dim(V_\alpha) = dim(V_\alpha)$$

Dies in eingesetzt ergibt:

$$dim(V) = \sum_{\beta=1}^{r} a_\beta dim(V_\beta) = \sum_{\beta=1}^{r} (dim(V_\beta))^2 = |G|$$

Die Summe der Quadrate der Dimensionen der irreduziblen Darstellungen muss gleich der Gruppenordnung sein!

3 Die irreduziblen Darstellungen der Permutationsgruppe S_n von n Elementen

3.1 Bemerkung

Die Wichitgkeit der S_n wird der folgende *Satz von Cayley* zeigen.

3.2 Satz von Cayley

Jede Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe.

Beweis:
Sei G eine Gruppe und $X = G$ eine Menge. Definiere die Abbildung

$$\lambda : G \longrightarrow Sym(G), \;\; \lambda(g)(x) = g *_G x \;\; \forall x \in X.$$

λ ist ein Homomorphismus von Gruppen, da
$\lambda(g *_G h)(x) = g *_G h *_G x = g *_G \lambda(h)(x) = \big[\lambda(g)\lambda(h)\big](x) \;\; \forall x \in X.$
λ ist injektiv, denn sei $\lambda(g) = e_{Sym(X)} = id_X$.
$\Longrightarrow g *_G x = x \;\forall x \in X \Longrightarrow g = e_G \Longrightarrow Kern(\lambda) = e_G$.
Betrachte nun:

$$\lambda : G \longrightarrow Bild(\lambda).$$

Dies ist nun ein Isomorphismus. Das Bild eines Gruppenhomomorphismus ist aber wieder eine Untergruppe.

3.2.1 Bemerkung

Nummeriere die Elemente eine Gruppe G mit $|G| = n < \infty$ durch.
$\phi : G \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$ ist bijektiv. Definiere auf {1, 2, ..., n} die folgende Gruppenstruktur *:

$$i * j = \phi\big(\phi^{-1}(i) *_G \phi^{-1}(j)\big).$$

ϕ wird dadurch zu einem Isomorphismus. Habe also insgesamt die Kette:
$Sym(\{1, ..., n\}) \supseteq$ Untergruppe $U \cong \{1, ..., n\} \cong G$.
$\Longrightarrow$ Jede endliche Gruppe G ist isomorph zu einer Untergruppe der Permutationsgruppe von $|G|$ Elementen.

3.3 Die innere Struktur der S_n

3.3.1 Zykel

Sei $\sigma \in S_n$ und $m \leq n$. Seien m paarweise verschiedene Elemente $a_1, a_2, ..., a_m$ aus {1, 2, ..., n} gegeben. σ heißt ein *m-Zykel* gdw.

$$\begin{aligned} \sigma(a_i) &= a_{i+1} \\ \sigma(a_m) &= a_1 \\ \sigma(b) &= b \;\; \forall b \in \{1, 2, ..., n\}/\{a_1, a_2, ..., a_m\}. \end{aligned}$$

Einen 2-Zykel nennt man auch *Transposition*. Im Folgenden werden m-Zykel notiert mit $(a_1...a_m)$. Ein $\sigma \in S_n$ kann dann eindeutig (bis auf Reihenfolge der Zyklen) geschrieben werden als Produkt von Zyklen, z.B. $(a_1...a_m)(b_1...b_k)(c)$, wobei $m + k + 1 = n$ seien muss und alle angegebenen Elemente paarweise verschieden.

3.3.2 Lemma

Sei $\sigma \in S_n$ ein k-Zykel $(i_1...i_k)$. $\forall \pi \in S_n$ gilt $\pi\sigma\pi^{-1}$ ist ein k-Zykel.

Beweis:
Sei $i \in \{1, ..., n\}$. Ist $\pi^{-1}(i) \notin \{i_1, ..., i_k\}$, dann ist $\pi\sigma(\pi^{-1}(i)) = \pi(\pi^{-1}(i)) = i$. Ist aber $\pi^{-1}(i) = i_r \in i_1...i_k$, dann ist $\pi\sigma\pi^{-1}(i) = \pi(i_{r+1})$, wobei $r + 1 = 1$ für $r = k$. Da $\pi \in S_n$ bijektiv ist, ist aber $\pi(i_r) = i$ und damit $(\pi\sigma\pi^{-1})(\pi(i_r)) = \pi(i_{r+1})$ ein k-Zykel.

3.3.3 Satz über die Konjugationsklassen der S_n

Die Konjugationsklasse $S_n\sigma S_n^{-1}$ einer Permutation $\sigma \in S_n$ besteht aus allen Permutationen aus S_n mit der gleichen Zykelstruktur.

Bestehe σ aus r k_r-Zykeln: $\sigma = (a_1...a_{k_1})(b_1...b_{k_2})...(c_1...c_{k_r})$.

$$\begin{aligned}\pi\sigma\pi^{-1} &= \pi(a_1...a_{k_1})(b_1...b_{k_2})...(c_1...c_{k_r})\pi^{-1} \\ &= \pi(a_1...a_{k_1})\pi^{-1}\pi(b_1...b_{k_2})\pi^{-1}\pi...\pi^{-1}\pi(c_1...c_{k_r})\pi^{-1}.\end{aligned}$$

Nach dem Lemma bleibt also die Zykelstruktur $(k_1, ..., k_r)$ erhalten.
Seien nun σ und σ' zwei Permutationen mit gleicher Zykelstruktur.
$\sigma = (a_1...a_{k_1})(b_1...b_{k_2})...(c_1...c_{k_r})$
$\sigma' = (a'_1...a'_{k_1})(b'_1...b'_{k_2})...(c'_1...c'_{k_r})$
Definiere $\pi \in S_n$ durch $\pi(a_1) = a'_1$, ..., $\pi(c_{k_r}) = c'_{k_r}$, dann gilt $\pi\sigma\pi^{-1} = \sigma'$

3.3.4 Bemerkungen

- Zykelstrukturen $(k_1, ..., k_r)$, die aus Permutation der k_i entstehen, werden als gleich betrachtet. Vereinbarungsgemäß, werden die k_i der Größe nach geordnet, also $(k'_1, ..., k'_r)$, so dass $k'_i \geq k'_{i+1}$ für $i = 1, ..., r-1$.
- Mit Hilfe dieses Satzes ist es nun möglich die Anzahl der Konjugationsklassen von S_n und damit die Anzahl der irreduziblen Darstellungen zu finden. Die Anzahl der Konjugationsklassen ist nämlich die Anzahl der möglichen verschiedenen Zykelstrukturen, oder anders die Anzahl der Möglichkeiten n als Summe natürlicher Zahlen zu schreiben.

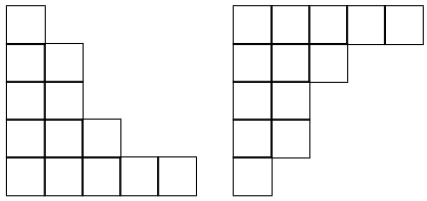
3.4 Partition eine natürlichen Zahl

Die *Partition* λ einer natürlichen Zahl $\neq 0$ ist ein Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ von natürlichen Zahlen $\neq 0$, mit $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, $i = 1, ..., r-1$ und $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$.

3.5 Young Diagramme und Eigenschaften

Ein *Young Diagramm* ist die graphische Darstellung einer Partition einer natürlichen Zahl n durch Kästchen. Dabei gibt der Index i bei λ_i die Zeile an und λ_i die Anzahl der Kästchen in der Zeile. Die Zeilen werden von oben nach unten gezählt (sogenannte *englische Notation*).

Hinweis dies ist eine willkürliche Vereinbarung, die sich als brauchbar herausgestellt hat! Es ist auch andere Vereinbarungen denkbar, wie z.B. dass die Reihen von unten nach oben gezählt werden (sogenannte *französische Notation*).



Das Bild zeigt die Partition λ=(5,3,2,2,1) von 13. Links ist die *französische* und rechts die *englische Notation*.
Im Folgendem wird von einem *Young Diagramm* der Gestalt λ gesprochen werden, wenn das *Young Diagramm* zu Partition λ gemeint ist.
Wie man sich überlegen mag, gibt es eine 1:1 Korrespondenz zwischen den Partitionen der natürlichen Zahl n und den Konjugationsklassen der S_n und damit zu den irreduziblen Darstellungen der S_n.
Z.B. bedeutet $n = 5 = 3 + 1 + 1$, dass die Konjugationsklasse diejenige ist mit einem 3-Zykel und zwei 1-Zykeln. Die Anzahl aller möglichen *Young Diagramme*, d.h. die Anzahl aller Partitionen zu einer natürliche Zahl n, ist nach bereits Gesagtem gleich der Anzahl der Konjugationsklassen der S_n. Diese wiederum ist die Anzahl der irreduziblen Darstellungen der S_n.

3.6 Young Tableau und Eigenschaften

Die Kästchen der *Young Diagramme* kann man nun mit Zahlen füllen. Dabei wird eine Leserichtung vereinbart: von links nach rechts und von oben nach unten (wie man ein Buch liest).
Das mit den Zahlen befüllte *Young Diagramm* heißt dann *Young Tableau*. Werden die Zahlen in jeder Reihe bzw. Spalte von links nach rechts bzw. von oben nach unten größer, so heißt das *Young Tableau standard*. Das *Young Tableau* heißt *normal*, wenn man beim Lesen der Zahlen in Leserichtung die Zahlenabfolge 1,2,...,n erhält.

5	7	2	1
4	6		
3			

1	2	3	6
4	5		
7			

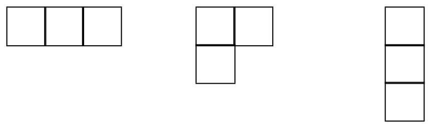
1	2	3	4
5	6		
7			

Das mittlere Tableau ist *standard*, das rechte Tableau ist *normal*.
Liest man nun die Zahlenfolge in Leserichtung ab, z.B. für n=7: 2,3,7,1,5,6,4, so ordnet man dies dem Basisvektor $|2371564\rangle$ der *regulären Darstellung* zu, wobei $|2371564\rangle$ die Permutation $1234567 \longmapsto 2371564$ ist.
Der *Symmetrisierer s* des Young Tableaus der Gestalt λ ist die Summe aller Permutationen der Zeilenzahlen innerhalb einer Zeile.

Der *Antisymmetrisierer a* des Young Tableaus der Gestalt λ ist die Summe aller Permutationen multipliziert mit ihrem Signum der Spaltenzahlen innerhalb einer Spalte.
Multipliziert man den *Antisymmetrisierer a* und den *Symmetrisierer s* so erhält man den sogenannten *Young Symmetrisierer Y=as*. Bildet man nun den *Young Symmetrisierer* zu den *standard Young Diagrammen* einer festen Gestalt λ, so erhält man Basisvektoren, welche eine irreduzible Unterdarstellung aufspannen. Mit diesen Vektoren können dann die Darstellungsmatrizen der Gruppenelemente auf der Unterdarstellung ausgerechnet werden.
Da diese Aussage in fast allen Büchern steht, aber nie explizit durchexerziert wird, hier ein Beispiel:

3.7 Bestimmung der irreduziblen Darstellungen der S_3 mittels Young Tableaus

Für die S_3 gibt es drei *Young Diagramme*:



Betrachte das der linken Gestalt. Es gibt sechs verschiedene *Young Tableaus* dafür:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&2&1\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&1\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&2\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&2\\\hline\end{array}$$

Der *Antisymmetrisierer* ist die Identität, der *Symmetrisierer* ist die Summe über alle Elemente der S_3, d.h. der *Young Symmetrisierer* ist die Summe über alle Elemente der S_3, also $Y = id{+}(12){+}(13){+}(23){+}(123){+}(132)$. Insbesondere sind für alle diese *Young Tableaus* der *Antisymmetrisierer*, der *Symmetrisierer* und der *Young Symmetrisierer* gleich! Der *Young Symmetrisierer* muss nun auf alle Vektoren, die man durch das Lesen der Tableaus erhält, angewandt werden:

$$\begin{aligned}
\bullet Y|123\rangle &= id|123\rangle + (12)|123\rangle + (13)|123\rangle + (23)|123\rangle + (123)|123\rangle + (132)|123\rangle \\
&= |123\rangle + |213\rangle + |321\rangle + |132\rangle + |312\rangle + |231\rangle \\
&=: |\alpha\rangle \\
\bullet Y|213\rangle &= id|213\rangle + (12)|213\rangle + (13)|213\rangle + (23)|213\rangle + (123)|213\rangle + (132)|213\rangle \\
&= |213\rangle + |123\rangle + |231\rangle + |312\rangle + |132\rangle + |321\rangle \\
&= |\alpha\rangle
\end{aligned}$$

Analog gerechnet ergibt sich:

$$\begin{aligned}\bullet Y\big|321\big\rangle &= Y\big|231\big\rangle = Y\big|132\big\rangle = Y\big|312\big\rangle = Y\big|213\big\rangle = Y\big|123\big\rangle \\ &= \big|123\big\rangle + \big|213\big\rangle + \big|321\big\rangle + \big|132\big\rangle + \big|312\big\rangle + \big|231\big\rangle \\ &= \big|\alpha\big\rangle\end{aligned}$$

Man erhält also einen Vektor $\big|\alpha\big\rangle$, dessen Spann von S_3 invariant gelassen wird. Dieser Vektor $\big|\alpha\big\rangle$, ist aber noch nicht normiert. $\big\langle\alpha\big|\alpha\big\rangle = 6$.
Definiere also $\big|\alpha'\big\rangle := \frac{1}{\sqrt{6}}\big|\alpha\big\rangle$. Somit gilt $\forall\pi \in S_3$:
$\big\langle\alpha'\big|\rho(\pi)\big|\alpha'\big\rangle = 1$. Die so erhaltene irreduzible Darstellung ist also die 1-dimensionale *Einsdarstellung*.

Nun betrachte das *Young Diagramm* der rechten Gestalt. Es gibt wieder sechs verschiedene *Young Tableaus*:

$$\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 3\\\hline 2\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 3\\\hline 1\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 1\\\hline 3\\\hline\end{array}$$

Der *Symmetrisierer* ist die Identität, der *Antisymmetrisierer* ist die Summe aller Elemente der S_3 gewichtet mit ihrem Signum, also $id - (12) - (13) - (23) + (123) + (132)$. Der *Young Symmetrisierer* ist gleich dem *Antisymmetrisierer*. Insbesondere sind für alle diese *Young Tableaus* der *Antisymmetrisierer*, der *Symmetrisierer* und der *Young Symmetrisierer* gleich!

$$\begin{aligned}\bullet Y\big|321\big\rangle &= id\big|321\big\rangle - (12)\big|321\big\rangle - (13)\big|321\big\rangle - (23)\big|321\big\rangle + (123)\big|321\big\rangle + (132)\big|321\big\rangle \\ &= \big|321\big\rangle - \big|312\big\rangle - \big|123\big\rangle - \big|231\big\rangle + \big|213\big\rangle + \big|132\big\rangle \\ &=: \big|\beta\big\rangle \\ \bullet Y\big|312\big\rangle &= id\big|312\big\rangle - (12)\big|312\big\rangle - (13)\big|312\big\rangle - (23)\big|312\big\rangle + (123)\big|312\big\rangle + (132)\big|312\big\rangle \\ &= \big|312\big\rangle - \big|321\big\rangle - \big|132\big\rangle - \big|213\big\rangle + \big|231\big\rangle + \big|123\big\rangle \\ &= -\big|\beta\big\rangle\end{aligned}$$

Analog errechnet sich:

$$\bullet Y\big|123\big\rangle = Y\big|231\big\rangle = -\big|\beta\big\rangle$$
$$\bullet Y\big|213\big\rangle = Y\big|132\big\rangle = \big|\beta\big\rangle$$

$\big|\beta\big\rangle$ spannt also einen Untervektorraum auf, der von S_3 invariant gelassen wird, bildet also eine 1-dimensionale Unterdarstellung. $\big|\beta\big\rangle$ ist aber noch nicht normiert wegen $\big\langle\beta\big|\beta\big\rangle = 6$. Definiere daher $\big|\beta'\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\big|\beta\big\rangle$. Für die Darstellungen der Elemente folgt:

$$
\begin{aligned}
\rho(id) &= \big\langle \beta' \big| id \big| \beta' \big\rangle = \big\langle \beta' \big| \beta' \big\rangle = 1 \\
\rho((12)) &= \big\langle \beta' \big| (12) \big| \beta' \big\rangle = \big\langle \beta' \big| - \beta' \big\rangle = -1 \\
\rho((13)) &= \big\langle \beta' \big| (13) \big| \beta' \big\rangle = \big\langle \beta' \big| - \beta' \big\rangle = -1 \\
\rho((23)) &= \big\langle \beta' \big| (23) \big| \beta' \big\rangle = \big\langle \beta' \big| - \beta' \big\rangle = -1 \\
\rho((123)) &= \big\langle \beta' \big| (123) \big| \beta' \big\rangle = \big\langle \beta' \big| \beta' \big\rangle = 1 \\
\rho((132)) &= \big\langle \beta' \big| (132) \big| \beta' \big\rangle = \big\langle \beta' \big| \beta' \big\rangle = 1
\end{aligned}
$$

Die so erhaltene irreduzible Darstellung ist unitär, was nicht schwierig einzusehen ist. Weiterhin zeigt eine kleine Rechnung mit den Charaktären:

$$\sum_{g \in S_3} |\chi(g)|^2 = 6 = |S_3|, \qquad \sum_{g \in S_3} \chi(g) = 0,$$

was durch die hergeleiteten Formeln aus der Orthogonalitätsbeziehung für Charaktere vorhergesagt wurde!

Zu guter Letzt wird nun das *Young Diagramm* der mittleren Gestalt betrachtet. Wieder gibt es sechs *Young Tableaus*:

$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}
\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}
$$

Symmetrisierer, *Antisymmetrisierer* und *Young Symmetrisierer* sind nun nicht mehr für jedes Tableau gleich. Sie müssen für alle Tableaus einzeln ausgerechnet werden. Dies erfordert viel Arbeit und soll exemplarisch an dem Tableau ganz links durchgeführt werden, also dasjenige, welchen den Basisvektor $\big|123\big\rangle$ der *regulären Darstellung* ergibt.
$s = id + (12)$, $a = id - (13) \Longrightarrow Y = as = (id - (13))(id + (12)) = id + (12) - (13) - (13)(12) = id + (12) - (13) - (132)$.

$$\bullet Y\big|123\big\rangle = \big|123\big\rangle + \big|213\big\rangle - \big|321\big\rangle - \big|231\big\rangle =: \big|\gamma\big\rangle$$

Analog gerechnet ergibt sich für die anderen Tableaus (Y ist immer der für das Tableau gültige *Young Symmetrisierer*!):

$$
\begin{aligned}
&\bullet Y\big|132\big\rangle = \big|132\big\rangle + \big|312\big\rangle - \big|231\big\rangle - \big|321\big\rangle =: \big|\delta\big\rangle \\
&\bullet Y\big|213\big\rangle = \big|213\big\rangle + \big|123\big\rangle - \big|312\big\rangle - \big|132\big\rangle = \big|\gamma\big\rangle - \big|\delta\big\rangle \\
&\bullet Y\big|231\big\rangle = \big|231\big\rangle + \big|321\big\rangle - \big|132\big\rangle - \big|312\big\rangle = -\big|\delta\big\rangle \\
&\bullet Y\big|312\big\rangle = \big|312\big\rangle + \big|132\big\rangle - \big|213\big\rangle - \big|123\big\rangle = -\big|\gamma\big\rangle + \big|\delta\big\rangle \\
&\bullet Y\big|321\big\rangle = \big|321\big\rangle + \big|231\big\rangle - \big|123\big\rangle - \big|213\big\rangle = -\big|\gamma\big\rangle
\end{aligned}
$$

$\big|\gamma\big\rangle$ und $\big|\delta\big\rangle$ spannen einen unter S_3 invarianten Untervektorraum auf, also eine

Unterdarstellung.

$$(12)\big|\gamma\big\rangle = \big|\gamma\big\rangle - \big|\delta\big\rangle \qquad (12)\big|\delta\big\rangle = -\big|\delta\big\rangle \qquad (13)\big|\gamma\big\rangle = -\big|\gamma\big\rangle \qquad (13)\big|\delta\big\rangle = \big|\delta\big\rangle - \big|\gamma\big\rangle$$
$$(23)\big|\gamma\big\rangle = \big|\delta\big\rangle \qquad (23)\big|\delta\big\rangle = \big|\gamma\big\rangle \qquad id\big|\gamma\big\rangle = \big|\gamma\big\rangle \qquad id\big|\delta\big\rangle = \big|\delta\big\rangle$$
$$(123)\big|\gamma\big\rangle = \big|\delta\big\rangle - \big|\gamma\big\rangle \qquad (123)\big|\delta\big\rangle = -\big|\gamma\big\rangle \qquad (132)\big|\gamma\big\rangle = -\big|\delta\big\rangle \qquad (132)\big|\delta\big\rangle = -\big|\delta\big\rangle + \big|\gamma\big\rangle$$

Die Vektoren $\big|\gamma\big\rangle$ und $\big|\delta\big\rangle$ sind aber noch nicht normiert oder orthogonal zueinander. Definiere deshalb $\big|\gamma'\big\rangle = \frac{1}{2}\big|\gamma\big\rangle$ und mit Hilfe des *Gram Schmidt Verfahren* $\big|\delta'\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\big|\delta\big\rangle - \frac{1}{2\sqrt{3}}\big|\gamma\big\rangle$. Diese beiden Vektoren sind orthonormiert und mit ihre Hilfe ergeben sich die Darstellungsmatrizen der Gruppenelemente:

$$\rho(id) = E_2 \quad \rho((12)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \rho((13)) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho((23)) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho((123)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \rho((132)) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Die Darstellung ist eine 2-dimensionale, unitäre Darstellung und für die Charaktere ergibt sich:

$$\sum_{g\in S_3} |\chi(g)|^2 = 6 = |S_3|, \qquad \sum_{g\in S_3} \chi(g) = 0,$$

was wiederum durch die hergeleiteten Formeln aus der Orthogonalitätsbeziehung für Charaktere vorhergesagt wurde!
Die Summe der Quadrate der Dimensionen der irreduziblen Darstellungen ergibt $1^2 + 1^2 + 2^2 = 1 + 1 + 4 = 6 = |S_3|$, wie es nach der Zerlegung in irreduzible Darstellungen zu erwarten war. Es haben sich 3 irreduzible Darstellungen ergeben, was der Anzahl der Konjugationsklassen der S_3 entspricht.

Alle hergeleiteten Formeln konnten also anhand dieses Beispieles voll bestätigt werden!

Literatur

[1] **Howard Georgi**
Lie Algebras in Particle Physics;
Second Edition, Westview Press; 1999

[2] **HF Jones**
Groups Representation and Physics;

[3] **Wu Ki Tung**
Group Theory in Physics;

[4] **W.Ludwig und C.Falter**
Symmetries in Physics;

[5] **L.D.Landau und E.M.Lifschitz**
Lehrbuch der Theoretischen Physik Band III: Quantenmechanik;
9.Auflage, Verlag Harri Deutsch 2007

[6] **W.Soergel**
Skript: Algebra;
Aktuelleste Version aus dem Internet

[7] **P.Fiebig**
Vorlesungsskript: Algebra;
Fassung vom 15.Februar 2006

[8] **Wikipedia**
Darstellungstheorie;
http://de.wikipedia.org/wiki/Darstellungstheorie

[9] **Wikipedia**
Young-Tableau, deutsche Seite;
http://de.wikipedia.org/wiki/Young-Tableau

[10] **Wikipedia**
Young-Tableau, englische Seite;
http://en.wikipedia.org/wiki/Young_tableau

[11] **Stefan Kottwitz**
Seminar Darstellungstheorie, WiSe 2005/06;
http://gruppentheorie.de/darstellungen3.pdf

[12] **Carsten Mayer**
Irreduzible Darstellungen der symmetrischen Gruppe;
Seminarvortrag vom 10.1.2000, http://www.informatik.uni-bremen.de/ emf/teaching/prev/seminar/carsten.pdf

[13] **Jannna**
Darstellungstheorie endlicher Gruppen;
http://www.matheplanet.com/, dann unter Mathe-Links⟶ Darstellungstheorie