Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Übungen zur Vorlesung

Supersymmetrie

WS 07/08

Prof. Dr. J. Reuter
(Hochhaus/803), 8407

Blatt 2

Hausaufgabe 1 Spinorengymnastik

Zu Zeigen:

a)

$$\psi\,\chi \;=\; \chi\,\psi, \quad (\psi\,\chi)^\dagger; = \;\bar\chi\,\bar\psi, \quad \psi\,\sigma^\mu\,\bar\chi \;=\; -\bar\chi\,\sigma^\mu\,\psi,$$
$$\left(\chi\,\sigma^\mu\,\bar\psi\right)^\dagger \;=\; \psi\,\sigma^\mu\,\bar\chi, \quad (\chi\,\sigma^\mu\,\bar\sigma^\nu\psi)^\dagger \;=\; \bar\chi\,\bar\sigma^\nu\,\sigma^\mu\bar\psi$$

b)

$$\sigma^{\mu\,\dot\alpha\alpha} \;=\; \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\epsilon^{\alpha\beta}\,\sigma^\mu_{\beta\dot\beta}$$
$$\mathrm{Tr}\,[\sigma^\mu\,\bar\sigma^\nu] \;=\; \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\bar\sigma^{\nu\,\dot\alpha\alpha} \;=\; 2\,g^{\mu\nu}$$
$$\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\bar\sigma_\mu^{\dot\beta\beta} \;=\; 2\,\delta_\alpha{}^\beta\,\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}$$
$$\left(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu + \sigma^\nu\bar\sigma^\mu\right)_\alpha{}^\beta = 2g^{\mu\nu}\delta_\alpha{}^\beta$$
$$\left(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu + \bar\sigma^\nu\sigma^\mu\right)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = 2g^{\mu\nu}\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}$$

c) Definiere

$$\sigma^{\mu\nu} = \left(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu - \sigma^\nu\bar\sigma^\mu\right), \quad \bar\sigma^{\mu\nu} = \left(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu - \bar\sigma^\nu\sigma^\mu\right).$$

Zeige:

$$\mathrm{Tr}\,[\sigma^{\mu\nu}] = \mathrm{Tr}\,[\bar\sigma^{\mu\nu}] = 0.$$

d) (Fierz-Identität)

$$(\psi\,\phi)\;\bar\chi_{\dot\beta} \;=\; -\frac{1}{2}\,(\phi\,\sigma^\mu\,\bar\chi)\;(\psi\,\sigma_\mu)_{\dot\beta}$$

Präsenz-Aufgabe 2   Der supersymmetrische harmonische Oszillator

a) Betrachte einen (bosonischen) harmonischen Oszillator. Setze $\hbar = c = \omega = \cdots = 1$. Es gelten die üblichen Beziehungen

$$[q,p] = i, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q+ip), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(q-ip), \quad [a,a^\dagger] = 1,$$

so dass für einen Eigenzustand $|n\rangle$ gilt: $a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \quad a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\;.$
Der Anzahl- und Hamiltonoperaator sind gegeben durch

$$N_B = a^\dagger a, \quad H_B = \frac{1}{2}(p^2+q^2) = \,?$$

Was erhält man für $[N_B, a]$, $[N_B, a^\dagger]$, $N_B\,|n\rangle$ und $H_B\,|n\rangle$?

b) Man nehme ein 2-Zustandssystem (analog zu Spin-1/2 Zuständen $\left|\vec{S}^{\,2}, S_z\right\rangle$) hinzu:

$$\left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle = |+\rangle\,, \quad \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = |-\rangle\,.$$

Welcher Algebra genügen die S_i? Unter Verwendung von $S_\pm = S_x \pm iS_y$ definiert man die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$d^\dagger := S_+, \quad d := S_-.$$

Welchen Antivertauschungsregeln genügen $d^\dagger, d$?

$$N_F = d^\dagger d, \quad H_F = S_z = ?$$

Wie wirken $d^\dagger, d, N_F$ auf die Zustände $|+\rangle\,, |-\rangle$?

c) Kopple das fermionische an das bosonische System:

$$H := H_B + H_F = ?$$

Die gekoppelten Zustände haben die Form:

$$|n,+\rangle = |n\rangle \otimes |+\rangle\,, \quad |n,-\rangle = |n\rangle \otimes |-\rangle\,.$$

Wie sieht das Spektrum von H aus? Welche Entartungen treten auf?

d) Bildung der SUSY-Generatoren
Ihre Wirkung auf die Zustände wird beschrieben durch:

$$Q\,|1,+\rangle = |2,-\rangle \quad \text{(allg.: } Q\,|n,+\rangle \to \sqrt{n+1}\,|n+1,-\rangle)$$
$$Q^\dagger\,|2,-\rangle = |1,+\rangle \quad \text{(allg.: } Q^\dagger\,|n,-\rangle \to \sqrt{n}\,|n-1,+\rangle).$$

Was folgt daraus für $Q, Q^\dagger$? Berechne $[N_{B,F}, Q^{(\dagger)}]$. Was erhält man für

$$\{Q^{(\dagger)}, Q^{(\dagger)}\}, \quad [H, Q^{(\dagger)}]?$$

Wie lauten die Energieeigenwerte?