Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Übungen zur Vorlesung

Supersymmetrie

WS 07/08

Prof. Dr. J. Reuter
(Hochhaus/803), 8407

Blatt 1

Präsenz-Aufgabe 1 Spinordarstellungen der Lorentz-Gruppe

Die Lorentz-Gruppe ($SO(1,3)$) besitzt die folgende Algebra (Verallgemeinerung der Drehimpuls-Vertauschungsrelationen):

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho})$$

(a) Definiere die Generatoren der Rotationen und Boosts folgendermaßen:

$$L^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}J^{jk} \qquad K^i = J^{0i},$$

$i, j, k = 1, 2, 3$. Eine infinitesimale Lorentztransformation kann dann geschrieben werden als

$$\Phi \to (1 - i\vec{\theta}\vec{L} - i\vec{\beta}\vec{K})\Phi.$$

Finde die Vertauschungsrelationen der Operatoren L^i, K^j. Zeige, dass

$$\vec{J}_+ = \frac{1}{2}\left(\vec{L} + i\vec{K}\right) \qquad \vec{J}_- = \frac{1}{2}\left(\vec{L} - i\vec{K}\right)$$

miteinander kommutieren und jeder für sich die Drehimpulsalgebra der $SU(2)$ erfüllt.

(b) Darstellungen der Drehimpulsalgebra (Vielfachen von $1/2$) implizieren Darstellungen der Lorentz-Algebra als (j_+, j_-). Nutze $\vec{J} = \vec{\sigma}/2$ und finde das Transformationsverhalten der beiden fundamentalen Darstellungen $(\frac{1}{2}, 0)$ (ungepunktete oder linkshändige Spinoren $(\psi_L)_\alpha$) und $(0, \frac{1}{2})$ (gepunktete oder rechtshändige Spinoren). Zeige, dass $\epsilon\psi_L^*$ mit $\epsilon = i\sigma^2$ sich wie ψ_R transformiert. (Punkten durch komplex Konjugieren, Heben durch ϵ).

(c) Zeige, dass sich $\psi' = \psi_L^T\sigma^2$ gemäss

$$\psi' = \psi'\left(1 + i\vec{\theta}\frac{\vec{\sigma}}{2} + \vec{\beta}\frac{\vec{\sigma}}{2}\right)$$

transformiert. Eine 2×2-Matrix transformiert sich dann unter der $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-Darstellung der Lorentz-Gruppe, wenn sie sich von links mit ψ_R und von rechts mit ψ_L^T transformiert. Schreibe $\bar{\sigma}^\mu V_\mu = V^0\mathbb{1} + \vec{\sigma}\vec{V}$ für einen beliebigen "Vektor" als Matrix und zeige dass er sich wie ein 4-Vektor transformiert. Was gilt für die Determinante?