Jürgen Reuter

Standardmodell, Supersymmetrie, Superstrings und danach...

Notizen

2000

Meine Güte, es gibt doch nur zwei Vorzeichen, die wird man doch wohl noch auseinanderhalten können.

In Wino veritas.

A squark to a flame.

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Allgemeines

Kapitel 1

Konventionen

1.1 Allgemeine Konventionen

Hier sammeln wir die Konventionen, die im weiteren benötigt werden. Kleine griechische Buchstaben vom Anfang des Alphabets, $\alpha, \beta, \ldots$ dienen zur Bezeichnung von Spinorindizes, griechische Buchstaben des mittleren Alphabets, $\mu, \nu, \ldots$ für Lorentz-Indizes, s. auch [5]. Die Metrik lautet

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Der Impulsvektor ist $p^\mu = (E, \vec{p})$.

1.2 Die Lorentz-Gruppe

Betrachtet man die Lorentz-Gruppe, kann man deren speziellen Anteil

$$L_+^\uparrow = \{\Lambda \in O(1,3) |\, \det \Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 > 0\}$$

als isomorph zur Gruppe $SO(1,3)$ mit der Einschränkung der Positivität des linken oberen Matrixelementes ansehen (auch mit $SO_+(1,3)$ bezeichnet). Die Darstellung mittels Generatoren ist die folgende:

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}\right), \tag{1.2}$$

in der $\omega_{\mu\nu}$ die in einer antisymmetrischen Matrix angeordneten 6 unabhängigen Parameter der Lorentz-Gruppe sind. Man kann zeigen, daß die Vertauschungsrelation der Lorentz-Gruppe

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -\mathrm{i}(g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}) \tag{1.3}$$

von den Generatoren der sogenannten Tensordarstellung erfüllt werden:

$$(M^{\mu\nu})^{\rho}{}_{\sigma} = \mathrm{i}(g^{\mu\rho}\delta^{\nu}_{\sigma} - g^{\nu\rho}\delta^{\mu}_{\sigma}). \tag{1.4}$$

Nun definiert man die folgenden Linearkombinationen der Generatoren (unabhängig von der Darstellung (1.4)):

$$J^k = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M^{ij}, \qquad K^i = M^{0i}. \tag{1.5}$$

Diese besitzen die Kommutatorrelationen:

$$\begin{aligned}
[J^i, J^j] &= \frac{1}{4}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}[M^{kl}, M^{mn}] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}(\delta_{km}M^{ln} - \delta_{kn}M^{lm} - \delta_{lm}M^{kn} + \delta_{ln}M^{km}) \\
&= \mathrm{i}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jkn}M^{ln} \\
&= -2\mathrm{i}(\delta^{in}\delta^{lj} - \delta^{ij}\delta^{ln})M^{ln} = -2\mathrm{i}M^{ji} \\
&= \mathrm{i}(\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{lj})M^{ln} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon^{ijr}\epsilon^{rln}M^{ln} \\
&= \mathrm{i}\epsilon^{ijr}J^r,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
[J^i, K^j] &= \frac{1}{2}\epsilon^{imn}[M^{mn}, M^{0j}] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon^{imn}(\delta_{mj}M^{n0} - \delta_{nj}M^{m0}) \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon^{ijn}M^{n0} + \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon^{imj}M^{m0} = \mathrm{i}\epsilon^{ijk}K^k.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Und schließlich

$$[K^i, K^j] = [M^{0i}, M^{0j}] = -\mathrm{i}g^0 0M^{ij} = -\mathrm{i}\epsilon^{ijk}J^k. \tag{1.8}$$

Mit der Definition

$$J^i_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(J^i \pm \mathrm{i}K^i) \tag{1.9}$$

sieht man die Isomorphie der Lie-Algebren $SL(2,\mathbb{C}) \cong SU(2) \otimes SU(2)$, die aus den Vertauschungsrelationen folgt:

$$[J^i_+, J^j_+] = \mathrm{i}\,\epsilon^{ijk}J^k_+, \tag{1.10}$$

$$[J^i_-, J^j_-] = \mathrm{i}\,\epsilon^{ijk}J^k_-, \tag{1.11}$$

$$[J^i_+, J^j_-] = 0. \tag{1.12}$$

Damit ist die Klassifikation der irreduziblen, enedlichdimensionalen Darstellungen der Lorentz-Gruppe klar, nämlich entsprechend derjenigen der $SU(2)$. Neben der trivialen Darstellung $(0,0)$ sind die rechte und die linke Fundamentaldarstellung die einfachsten irreduziblen Darstellungen:

Die linke Fundamentaldarstellung:

$$\Psi_L(x) \longrightarrow \Psi'_L(x') = A_L \Psi_L(x), \tag{1.13}$$

mit

$$A_L \equiv \Lambda^{(\frac{1}{2},0)} = \exp\{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\vec{\phi} - \mathrm{i}\vec{\nu}) \cdot \vec{\sigma}\}. \tag{1.14}$$

Hierin wurde mit der Umbenennung der Parameter $\omega_{0i} = \nu_i = -\omega_{i0}$ für die Boostparameter und $\omega_{ij} = \epsilon^{ijk}\phi_k$ für die Drehparameter folgende Aufspaltung erreicht:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{ij}M^{ij} - \mathrm{i}\omega_{0i}M^{0i}\right)\\ &= \exp[-\mathrm{i}(\vec{\phi}\vec{J} + \vec{\nu}\vec{K})]\\ &= \exp[-\mathrm{i}(\vec{\phi} - \mathrm{i}\vec{\nu})\vec{J}_+] \cdot \exp[-\mathrm{i}(\vec{\phi} + \mathrm{i}\vec{\nu})\vec{J}_-]\end{aligned} \tag{1.15}$$

Man erkennt hierin die Nicht-Unitarität der Darstellung.

Die rechte Fundamentaldarstellung:

$$\Psi_R(x) \longrightarrow \Psi'_R(x') = A_R \Psi_R(x), \tag{1.16}$$

mit

$$A_R \equiv \Lambda^{(0,\frac{1}{2})} = \exp\{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\vec{\phi} + \mathrm{i}\vec{\nu}) \cdot \vec{\sigma}\}. \tag{1.17}$$

Der Zusammenhang

$$A_L^\dagger = A_R^{-1} \tag{1.18}$$

ist sofort ersichtlich, der zeigt, daß sich der hermitesch adjungierte rechtshändige Spinor mit der inversen linkshändigen Darstellungsmatrix transformiert, womit dieser sich (und nicht der linkshändige hermitesch konjugierte!) als dual zum linkshändigen Spinor erweist.

$$\Psi'_L = A_L \Psi_L, \tag{1.19}$$

$$\Psi'^\dagger_R = (A_R \Psi_R)^\dagger = \Psi_R^\dagger A_L^{-1}, \tag{1.20}$$

$$\Psi'_R = A_R \Psi_R = A_L^{-1\dagger} \Psi_R, \tag{1.21}$$

$$\Psi'^\dagger_L = (A_L \Psi_L)^\dagger = \Psi^\dagger A_L^\dagger. \tag{1.22}$$

1.2.1 Transformationsverhalten der Spinoren unter der Gruppe $SL(2,\mathbb{C})$

Spinor	Transformationsmatrix
ξ_α	A_L
$\bar{\xi}_{\dot\alpha}$	A_L^*
ξ^α	A_L^{-1}
$\bar{\xi}^{\dot\alpha}$	$(A^{-1})_L^*$

(1.23)

Es gilt also für die Spinoren, daß komplexe Konjugation die gequerten und ungequerten Darstellungen ineinander überführt:

$$\bar{\xi}_{\dot\alpha} = (\xi_\alpha)^*, \qquad \xi^\alpha = (\bar{\xi}^{\dot\alpha})^*. \tag{1.24}$$

Man kann damit die zueinander dualen Spinoren folgendermaßen wählen:

$$\xi_L = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \qquad \xi_R^\dagger = (\xi^1, \xi^2) \tag{1.25}$$

$$\bar{\xi}_R = \begin{pmatrix} \bar{\xi}^{\dot 1} \\ \bar{\xi}^{\dot 2} \end{pmatrix}, \qquad \bar{\xi}_L^\dagger = (\bar{\xi}_{\dot 1}, \bar{\xi}_{\dot 2}) \tag{1.26}$$

$$\tag{1.27}$$

- Spinor-Metrik:

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

- Konventionen zum Heben und Senken von Indizes mittels der Spinormetrik:

$$\xi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta, \quad \bar{\xi}^{\dot\alpha} = \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar{\xi}_{\dot\beta}, \quad \xi_\alpha = \xi^\beta\epsilon_{\beta\alpha}, \quad \bar{\xi}_{\dot\alpha} = \bar{\xi}^{\dot\beta}\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha}. \tag{1.29}$$

Bemerkung: Das Heben und Senken der Spinorindizes ist auch auf die Spinormetrik selbst anwendbar; die Regeln für das Heben und Senken sind unabhängig davon, ob es sich dabei um gepunktete oder ungepunktete Indizes handelt. Das Heben bzw. Senken einer geraden Zahl von Spinorindizes zieht in dieser Konvention der Spinormetrik keinen Vorzeichenwechsel nach sich (bei den Einträgen in einer Tensordarstellung), was impliziert, daß auch die Spintensoren als Objekte mit zwei (wenn auch unterschiedlichen Darstellungen angehörenden) Spinorindizes die gleichen Komponenten bei oberen wie unteren Indizes besitzen.

- **Antisymmetrisches Spinorprodukt für kommutierende Spinorkomponenten** (hier wird auf die eckigen Klammern verzichtet, ebenso wie auf den Stern für komplexe Konjugation; das komplex konjugierte Spinorprodukt ist an den Querstrichen zu erkennen):

$$\begin{aligned} \eta\xi &= \eta_\alpha\xi^\alpha = \eta_1\xi_2 - \eta_2\xi_1 \\ \bar{\eta}\bar{\xi} &= \bar{\eta}_{\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} = (\eta_1\xi_2 - \eta_2\xi_1)^* = \bar{\eta}_{\dot{1}}\bar{\xi}_{\dot{2}} - \bar{\eta}_{\dot{2}}\bar{\xi}_{\dot{1}}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Damit gilt also

$$(\eta\xi)^* = (\bar{\eta}\bar{\xi}). \tag{1.31}$$

$$\eta\xi = -\eta\xi, \qquad \bar{\eta}\bar{\xi} = -\bar{\xi}\bar{\eta}, \qquad \xi\xi = \bar{\xi}\bar{\xi} = 0 \tag{1.32}$$

Diese Eigenschaften gelten nur für c-Zahleinträge in den Spinoren; die Definition der Summationskonvention ist so gewählt, daß die komplexe Konjugation des Spinorproduktes auch tatsächlich das Spinorprodukt der komplex konjugierten Spinoren ergibt, so wie es für die Berechnung von Helizitätsamplituden von Nutzen ist, s. [13], [14], [15].

- **(Anti-)symmetrisches Spinorprodukt für Grassmann-wertige Spinorkomponenten:** Behandelt man Feldoperatoren oder Spinorladungen in supersymmetrischen Theorien, dann empfiehlt es sich, folgende Relationen zu benutzen:

$$\begin{aligned} \eta\xi &= \eta^\alpha\xi_\alpha = \eta_2\xi_1 - \eta_1\xi_2 \\ \bar{\eta}\bar{\xi} &= \bar{\eta}_{\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\eta}_{\dot{1}}\bar{\xi}_{\dot{2}} - \bar{\eta}_{\dot{2}}\bar{\xi}_{\dot{1}} = \bar{\xi}_{\dot{1}}\bar{\eta}_{\dot{2}} - \bar{\xi}_{\dot{2}}\bar{\eta}_{\dot{1}} = (\eta_2\xi_1 - \eta_1\xi_2)^*. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Beachte hierin die alles entscheidende Definition des Umkehrens der Reihenfolge der Grassmann-wertigen Komponenten bei der Operation der komplexen Konjugation:

$$(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^* = -\alpha^*\beta^* \tag{1.34}$$

Man hat - wie gewünscht - denselben Zusammenhang zwischen den beiden Spinorprodukten wie im Falle kommutierender Komponenten:

$$(\eta\xi)^* = (\bar{\eta}\bar{\xi}). \tag{1.35}$$

$$\eta\xi = \xi\eta, \quad \bar{\eta}\bar{\xi} = \bar{\xi}\bar{\eta}, \quad \xi\xi = 2\xi_1\xi_2, \quad \bar{\xi}\bar{\xi} = 2\bar{\xi}_{\dot{1}}\bar{\xi}_{\dot{2}} \tag{1.36}$$

- Die Regeln über das Heben und Senken der Indizes hat zur Folge, daß das „Kippen“ der Achse kontrahierter Spinorindizes einen Vorzeichenwechsel zur Folge hat:

$$\eta_\alpha\xi^\alpha = \eta^\beta\epsilon_{\beta\alpha}\epsilon^{\alpha\gamma}\xi_\gamma = \eta^\beta(-\delta^\gamma_\beta)\xi_\gamma = -\eta^\alpha\xi_\alpha \tag{1.37}$$

Dies ist unabhängig von der „Statistik“ der Spinorkomponenten, d.h. unabhängig von den unterschiedlichen obigen Definitionen der Spinorprodukte!

- Schouten-Identität:

$$\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\gamma\delta}+\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\delta\beta}+\epsilon^{\alpha\delta}\epsilon^{\beta\gamma}=0 \tag{1.38}$$

Da die Schouten-Identität *das* Werkzeug für Rechnungen mit Spinor-Amplituden ist, sei hier ein Beweis dieser wichtigen Relation notiert: Hält man in dem Ausdruck

$$\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\gamma\delta}+\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\delta\beta}+\epsilon^{\alpha\delta}\epsilon^{\beta\gamma} \tag{1.39}$$

einen Index fest, z.B. das α, dann hat man bezüglich der anderen Indizes $\beta\gamma\delta$ einen Tensor 3. Stufe. Vertauscht man von diesen irgend zwei, dann ändert (1.38) sein Vorzeichen. (1.39) ist damit eine 3-Form in einem zweidimensionalen Raum und muß daher notwendig verschwinden.

- Schouten-Identität, mit Spinoren kontrahiert (Vorsicht: Gilt wieder nur für kommutierende Spinorkomponenten!):

$$(\phi\psi)(\xi\chi)+(\phi\xi)(\chi\psi)+(\phi\chi)(\psi\xi)=0 \tag{1.40}$$

1.3 Spintensoren

Die „Vektoren der Pauli-Matrizen“ besitzen die folgenden Vorzeichen:

$$\sigma^\mu=(1,\vec{\sigma}), \qquad \bar{\sigma}^\mu=(1,-\vec{\sigma}). \tag{1.41}$$

Für diese Vektoren gilt die allgemeine Regel, daß das Herauf- bzw. Herunterziehen der Indizes das Vorzeichen der räumlichen Komponenten ändert; in diesem Sinne gilt für die Pauli-Matrizen:

$$\sigma^1=-\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \quad \sigma^2=-\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix},$$
$$\sigma^3=-\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \tag{1.42}$$

Komponentenschreibweise der bereits in (1.41) eingeführten Spintensoren für den Übergang von Vektoren von der Tensor- zur Spinordarstellung:

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}=\sigma^{\mu,\alpha\dot{\beta}}=(1,\vec{\sigma})\,, \qquad \bar{\sigma}^\mu_{\dot{\alpha}\beta}=\bar{\sigma}^{\mu,\dot{\alpha}\beta}=(1,-\vec{\sigma})\,, \tag{1.43}$$

Man beachte, daß der ungequerte Spintensor links den gepunkteten Index trägt, der gequerte Spintensor dagegen rechts. Die Stellung der Indizes, ob unten oder oben, spielt hierfür keine Rolle, bzgl. des Vorzeichens siehe oben.

Kontraktion eines 4-Minkowski-Vektors mit einem Spintensor ergibt einen Spinor 2. Stufe, der für reelle Vektoren durch eine hermitesche 2×2-Matrix dargestellt werden kann (bei Minkowski-Vektoren wird aus offensichtlichen Gründen auf die Verwendung von Querstrichen verzichtet):

$$K_{\alpha\dot{\beta}} = k^\mu \sigma_{\mu,\alpha\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} k^0 + k^3 & k^1 + \mathrm{i}k^2 \\ k^1 - \mathrm{i}k^2 & k^0 - k^3 \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

Hermitezität der Spintensoren:

$$\sigma^{\mu,\alpha\dot{\beta}} = \bar{\sigma}^{\mu,\dot{\beta}\alpha}, \qquad \bar{\sigma}^\mu_{\dot{\alpha}\beta} = \sigma^\mu_{\beta\dot{\alpha}}. \tag{1.45}$$

Die Spintensoren gehorchen den folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\sigma}^{\nu,\dot{\beta}\alpha} = \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \sigma^{\nu,\alpha\dot{\beta}} &= 2g^{\mu\nu}, \\ \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \sigma^{\nu,\gamma\dot{\beta}} + \sigma^\nu_{\alpha\dot{\beta}} \sigma^{\mu,\gamma\dot{\beta}} &= 2g^{\mu\nu} \delta^\gamma_\alpha, \\ \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \sigma_{\mu,\gamma\dot{\delta}} &= 2\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\delta}}. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Mit der tensoriellen Notation haben diese spinoriellen Relationen folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,[\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu] &= 2g^{\mu\nu}, \\ \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu &= 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbf{1}, \\ \sigma^\mu \sigma_\mu &= -2 \cdot \mathbf{1}. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Die erste Relation erlaubt es, Skalarprodukte von Minkowski-Vektoren durch Kontraktionen von Spinorprodukten auszudrücken:

$$2k \cdot p = k_\mu 2g^{\mu\nu} p_\nu = k_\mu \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \sigma^{\nu,\alpha\dot{\beta}} p_\nu = K_{\alpha\dot{\beta}} P^{\alpha\dot{\beta}}, \tag{1.48}$$

die zweite Gleichung stellt die Antivertauschungsrelationen der Sigma-Matrizen, und die dritte die formale Kontraktion des Spintensors als Minkowski-Vektor in spinorieller Form (komponentenweise) dar.

1.4 Bispinoren

Dirac- und Majorana-Spinoren, allgemein Bispinoren, gehören der $D(\frac{1}{2}, 0) \oplus D(0, \frac{1}{2})$ – Darstellung der Lorentz-Gruppe an und haben folgerichtig die Gestalt (vgl. für den komplex konjugierten Spinor (1.25)):

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \qquad \Psi^\dagger = (\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, \eta^\alpha) \tag{1.49}$$

Das beste - wenn nicht einzige - Bindeglied zwischen der vierkomponentigen und der zweikomonentigen Spinorschreibweise (beide haben ihre Vor- und Nachteile) ist die chirale Darstellung der Gamma-Matrizen unter Berücksichtigung der Spinorindizes:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} \\ \bar\sigma^{\mu,\dot\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \; \vec\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \vec\sigma \\ -\vec\sigma & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.50}$$

Beachte hierbei, daß die Einsoperatoren in γ^0 die gleiche Struktur gepunkteter und ungepunkteter Indizes tragen wie die Pauli-Matrizen allgemein. In dieser Darstellung schreibt sich γ^5 dann

$$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{1.51}$$

Damit erlangen die Projektoren auf die rechtshändigen und linkshändigen Feldkomponenten die folgende Gestalt:

$$\mathcal{P}_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{1.52}$$

so daß die linkshändigen Komponenten die oberen Komponenten des Bispinors sind, die rechtshändigen dagegen die unteren:

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar\eta^{\dot\alpha}. \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

Der antisymmetrische Tensor 2. Stufe, der ja bis auf Vorfaktoren den Spinoperator darstellt, schreibt sich nun:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2\mathrm{i}\begin{pmatrix} (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\beta} & 0 \\ 0 & (\bar\sigma^{\mu\nu})^{\dot\alpha}_{\dot\beta} \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

Hierin bedeuten

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\beta} = \frac{1}{4}\Big(\sigma^\mu_{\alpha\dot\gamma}\bar\sigma^{\nu,\dot\gamma\beta} - \sigma^\nu_{\alpha\dot\gamma}\bar\sigma^{\mu,\dot\gamma\beta}\Big), \qquad (\bar\sigma^{\mu\nu})^{\dot\alpha}_{\dot\beta} = \frac{1}{4}\Big(\bar\sigma^{\mu,\dot\alpha\gamma}\sigma^\nu_{\gamma\dot\beta} - \bar\sigma^{\nu,\dot\alpha\gamma}\sigma^\mu_{\gamma\dot\beta}\Big) \tag{1.55}$$

Der adjungierte Spinor besitzt dann leider eine mißzuverstehende Bezeichnung, da der Querstrich über dem Bispinor nicht der gleichen Operation der komplexen Konjugation entspricht wie derjenige über der Weyl-2-Spinoren:

$$\overline{\Psi} \equiv \Psi^\dagger\gamma^{0\,\dagger} = (\bar\xi_{\dot\beta}, \eta^\beta)\begin{pmatrix} 0 & \bar\sigma^{0,\dot\alpha\beta} \\ \sigma^0_{\dot\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (\bar{\xi}_{\dot\beta}, \eta^\beta) \begin{pmatrix} 0 & \bar\sigma^{0,\dot\beta\alpha} \\ \sigma^0_{\beta\dot\alpha} & 0 \end{pmatrix} \eta^\beta, \bar{\xi}_{\dot\beta}) \tag{1.56}$$

In der letzten Zeile wurde (1.45) verwendet.

Für die Helizitäsamplituden benötigt man die Lösungen der Dirac-Gleichung:

$$(\mathrm{i}\not\partial - m)\Psi = 0. \tag{1.57}$$

Verwendet man die chirale Darstellung und setzt ebene Wellen-Lösungen der Form $\Psi = \exp\{\mp \mathrm{i}kx\}\Psi_k^{(\pm)}$ ein, so erhält man ein Paar von Gleichungen (man beachte, daß das Superskript $(\pm)$ hier nicht wie in Anhang B die Helizitäten der Fermionen meint, sondern Lösungen positiver und negativer Frequenz unterscheidet):

$$K_{A\dot B}\psi_k^{(\pm),\dot B} = \pm m\phi_{k,A}^{(\pm)}, \qquad K^{\dot A B}\phi_{k,B}^{(\pm)} = \pm m\psi_k^{(\pm),\dot A}, \qquad k^2 = m^2. \tag{1.58}$$

Die Spinoren ψ und ϕ beziehen sich auf die Notation des Bispinors in (A.21). Die vier linear unabhängigen Lösungen der beiden Gleichungen (A.26) lauten dann:

$$\Psi_{k,1}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \kappa_{1,A} \\ \mp\kappa_2^{\dot A} \end{pmatrix}, \qquad \Psi_{k,2}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \pm\kappa_{2,A} \\ \kappa_1^{\dot A} \end{pmatrix}. \tag{1.59}$$

Hierin unterscheidet das Superskript $(\pm)$ hinsichtlich des Vorzeichens der Frequenz der Lösung, während der Index $i = 1, 2$ unten am Bispinor die jeweilige Lösung numeriert. Für die Bedeutung dieser Spinoren zur Beschreibung äußerer Fermionen- oder Antifermionenzustände sei auf Anhang B verwiesen. Die zugehörigen adjungierten Spinoren sind

$$\overline{\Psi}_{k,1}^{(\pm)} = \left(\mp\kappa_2^A, \kappa_{1,\dot A}\right), \qquad \overline{\Psi}_{k,2}^{(\pm)} = \left(\kappa_1^A, \pm\kappa_{2,\dot A}\right). \tag{1.60}$$

Die Lösungen der Dirac-Gleichung (A.26) sind dabei auf die übliche Weise normiert:

$$\Psi_{k,i}^{(\tau)\dagger}\Psi_{k,j}^{(\sigma)} = 2k^0\delta_{\sigma\tau}\delta_{ij}, \qquad \overline{\Psi}_{k,i}^{(\tau)}\Psi_{k,j}^{(\sigma)} = 2m\cdot(\operatorname{sgn}\tau)\delta_{\sigma\tau}\delta_{ij}, \tag{1.61}$$
$$\sigma, \tau = \pm, \qquad\qquad i, j = 1, 2$$

1.5 Vektorbosonen

Hier sind noch einige nützliche Formeln für massive wie masselose Vektorbosonen zusammengetragen. Die Bewegungsgleichung für wechselwirkungsfreie Vektorbosonen ist die Proca-Gleichung im Falle $m \neq 0$:

$$\left[(\partial^2 + m^2)g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu\right] A_\nu = 0, \tag{1.62}$$

die bei verschwindender Masse in die Maxwell-Gleichung übergeht:

$$\left[\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu\right] A_\nu = 0. \tag{1.63}$$

Aus diesen folgt in beiden Fällen die Bedingung, daß die Kontraktion der Polarisationsvektoren, die wiederum aus einem ebene Wellen-Ansatz $A_\mu = \exp\{\mp \mathrm{i}kx\}\varepsilon_\mu$ zur Lösung der Bewegungsgleichung folgen, mit dem Impulsvektor verschwinden muß:

$$\varepsilon_\mu(k) \cdot k^\mu = \frac{1}{2} K^{\dot{A}B} \varepsilon_{\dot{A}B}(k) = 0. \tag{1.64}$$

Für beide Fälle, massiv wie masselos, gilt wieder eine Normierungs- und Orthogonalitätsbedingung hinsichtlich der verschiedenen Polarisationen:

$$(\varepsilon_i(k) \cdot \varepsilon_j^*(k)) = \frac{1}{2} \varepsilon_{i,\dot{A}B}(k) \varepsilon_j^{*\dot{A}B} = -\delta_{ij}, \qquad i,j = \pm\,,\ [0 \text{ für } m \neq 0] \tag{1.65}$$

Eine Basis von Polarisationsvektoren erhält man durch die folgende Wahl, in der über eine freie Phase so verfügt wurde, daß die Überführung in spinorielle Gestalt möglichst einfach wird:

$$\varepsilon_\pm^\mu(k) = \frac{e^{\mp \mathrm{i}\phi}}{\sqrt{2}} (0, -\cos\theta\cos\phi \pm \mathrm{i}\sin\phi, -\cos\theta\sin\phi \mp \mathrm{i}\cos\phi, \sin\theta)\,, \tag{1.66a}$$

$$\varepsilon_0^\mu(k) = \frac{k^0}{m} \left(\frac{|\vec{k}|}{k^0}, \cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta \right), \tag{1.66b}$$

wobei die Winkel gerade die Polarkoordinaten des räumlichen Impulsvektors darstellen. Diese Polarisationsvektoren haben, wenn man die longitudinale Komponente $\varepsilon_0(k)$ wegläßt, auch für Photonen und Gluonen, also masselose Vektorbosonen Gültigkeit. Die Polarisationsspinoren für ein- bzw. auslaufende Vektorbosonzustände finden sich in Anhang B; für sie gelten die vor allem für die Crossing-Symmetrie wichtigen Relationen

$$\varepsilon_{i,\dot{A}B}(k) = \varepsilon_{-i,B\dot{A}}(k) = \varepsilon^*_{-i,\dot{A}B}(k) = \varepsilon^*_{i,B\dot{A}}(k). \tag{1.67}$$

Teil II

Das Standardmodell

Kapitel 2

Wichtige Relationen für das Standardmodell

Mischungen der Eichfelder der $SU(2)_L \times U(1)_Y-$Symmetrie: Hierbei bedeuten die W_μ^i-Felder die drei fundamentalen Eichfelder der $SU(2)_L-$Eichgruppe, B_μ das Eichfeld der $U(1)_Y-$Eichgruppe des schwachen Isospins, während A_μ das physikalische Photonenfeld bezeichnet. Z_μ und $W_\mu^\pm$ sind die Felder der physikalischen Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung.

$$\begin{aligned} A_\mu &= W_\mu^3 \sin\theta_W + B_\mu \cos\theta_W \qquad & W_\mu^+ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2\right) \\ Z_\mu^0 &= W_\mu^3 \cos\theta_W - B_\mu \sin\theta_W \qquad & W_\mu^- &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^1 + \mathrm{i}W_\mu^2\right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die invertierten Beziehungen lauten:

$$\begin{aligned} B_\mu &= A_\mu \cos\theta_W - Z_\mu^0 \sin\theta_W \qquad & W_\mu^1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^+ + W_\mu^-\right) \\ W_\mu^3 &= A_\mu \sin\theta_W + Z_\mu^0 \cos\theta_W \qquad & W_\mu^2 &= \tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^+ - W_\mu^-\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Kopplungskonstanten, Massen der elektroschwachen Eichbosonen, Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes:

$$v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{2.3}$$

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{2.4}$$

$$\sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{2.5}$$

$$m_H = \sqrt{2}\,\mu = \sqrt{2\lambda} \cdot v \tag{2.6}$$

$$m_W = \frac{gv}{2} \tag{2.7}$$

$$m_Z = \sqrt{g^2 + g'^2}\,\frac{v}{2} = \frac{g}{\cos\theta_W}\frac{v}{2}\lambda = \frac{m_H^2}{2v^2} \tag{2.8}$$

$$e = g \sin\theta_W \tag{2.9}$$

Gell-Mann-Nishijima-Relation:

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2} \tag{2.10}$$

Kapitel 3

Die Lagrangedichte des Standardmodells

3.1 Die Lagrangedichte *in totaliter*

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{\text{Standardmodell}} = \\
&\quad -\frac{1}{4}\mathcal{B}_{\mu\nu}\mathcal{B}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3}\mathcal{F}^{a}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}_{a} - \frac{1}{4}\sum_{c=1}^{8}\mathcal{G}^{c}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}_{c} + \sum_{i=e,\mu,\tau}\overline{L}_{L,i}(\mathrm{i}\not{D})L_{L,i} \\
&+ \sum_{i=e,\mu,\tau}\overline{L}_{L,i}(\mathrm{i}\not{D})L_{L,i} + \sum_{i=e,\mu,\tau}\overline{\ell}_{R,i}(\mathrm{i}\not{D})\ell_{R,i} + \sum_{i=(u,d),(c,s),(t,b)}\overline{Q}_{L,i}(\mathrm{i}\not{D})Q_{L,i} \\
&\quad + \sum_{u,d,c,s,t,b}\overline{q}_{R,i}(\mathrm{i}\not{D})q_{R,i} + (\mathrm{D}_\mu\Phi)^\dagger(\mathrm{D}^\mu\Phi) + \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \\
&- \sum_{i,j}\overline{\ell}_{R,i}\,\mathcal{C}_{\ell,ij}(\Phi^\dagger L_{L,j}) + \sum_{i,j}\overline{q}^{u}_{R,i}\,\mathcal{C}'_{q,ij}(\Phi^T\epsilon Q_{L,j}) - \sum_{i,j}\overline{q}^{d'}_{R,i}\,\mathcal{C}_{q,ij}(\Phi^\dagger Q_{L,j})
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Hierbei gelten folgende Bezeichnungen:

$$\mathrm{D}_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}gW^a_\mu T^a - \mathrm{i}g'B_\mu\tfrac{Y}{2} - \mathrm{i}g_sG^c_\mu T^c \quad \text{eichkovariante Ableitung,} \tag{3.2}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix}\Phi^+\\ \Phi^0\end{pmatrix} \quad \text{Higgsdublett,} \tag{3.3}$$

$$\Phi \equiv \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(v + H + \vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{Parametrisierung nach t'Hooft} \tag{3.4}$$

3.2 Kinetische Eichterme

Dieser Abschnitt, siehe auch [1], beschäftigt sich mit dem kinetischen Term der Eichfelder der elektroschwachen Eichgruppe $SU(2)_L \times U(1)_Y$, der die übliche Gestalt besitzt:

$$-\frac{1}{4}\mathcal{B}_{\mu\nu}\mathcal{B}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3}\mathcal{F}^a_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}_a \tag{3.5}$$

Die Feldstärketensoren sind dabei folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{3.6}$$

$$\mathcal{F}^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g\epsilon^{abc}W^b_\mu W^c_\nu, \quad a,b,c = 1,2,3 \tag{3.7}$$

Einsetzen der nach 2.2 gedrehten Eichbosonen-Felder ergibt für den kinetischen Term der $\mathcal{B}-$Felder:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\mu\nu}\mathcal{B}^{\mu\nu} &= \big(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\big)\big(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu\big) \\
&= \big(\cos\theta_W \partial_\mu A_\nu - \sin\theta_W \partial_\mu Z^0_\nu - \cos\theta_W \partial_\nu A_\mu + \sin\theta_W \partial_\nu Z^0_\mu\big)\cdot \\
&\quad\ \big(\cos\theta_W \partial^\mu A^\nu - \sin\theta_W \partial^\mu Z^{0\nu} - \cos\theta_W \partial^\nu A^\mu + \sin\theta_W \partial^\nu Z^{0\mu}\big) \\
&= \cos^2\theta_W \big(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\big)\big(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\big) \\
&\quad + \sin^2\theta_W \big(\partial_\mu Z^0_\nu - \partial_\nu Z^0_\mu\big)\big(\partial^\mu Z^{0\nu} - \partial^\nu Z^{0\mu}\big) \\
&\quad - 2\sin\theta_W\cos\theta_W \big(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\big)\big(\partial^\mu Z^{0\nu} - \partial^\nu Z^{0\mu}\big)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Die entsprechende Umformung der Eichfelder der $SU(2)_L-$Eichgruppe ist etwas aufwendiger:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^a_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}_a \\
&= \Big(\partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g\epsilon^{abc}W^b_\mu W^c_\nu\Big)\Big(\partial^\mu W^\nu_a - \partial^\nu W^\mu_a + g\epsilon_{abc}W^\mu_b W^\nu_c\Big) \\
&= \ \Big[\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu(W^+_\nu + W^-_\nu) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\nu(W^+_\mu + W^-_\mu) + g\Big(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(W^+_\mu - W^-_\mu)W^3_\nu - \\
&\quad \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(W^+_\nu - W^-_\nu)W^3_\mu\Big)\Big]\cdot\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu(W^{+\nu} + W^{-\nu}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\nu(W^{+\mu} + W^{-\mu}) \\
&\quad + g\Big(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(W^{+\mu} - W^{-\mu})W^{3\nu} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(W^{+\nu} - W^{-\nu})W^{3\mu}\Big)\Big] \\
&\ + \Big[\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\partial_\mu(W^+_\nu - W^-_\nu) - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\partial_\nu(W^+_\mu - W^-_\mu) - g\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(W^+_\mu + W^-_\mu)W^3_\nu -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}}(W_\nu^+ + W_\nu^-)W_\mu^3\Big)\Big] \cdot \Big[\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\partial^\mu(W^{+\nu} - W^{-\nu}) - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\partial^\nu(W^{+\mu} - W^{-\mu}) \\
&- g\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(W^{+\mu} + W^{-\mu})W^{3\nu} - \frac{1}{\sqrt{2}}(W^{+\nu} + W^{-\nu})W^{3\mu}\Big)\Big] \\
+ &\Big[\partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 + g\Big(\frac{\mathrm{i}}{2}(W_\mu^+ + W_\mu^-)\cdot(W_\nu^+ - W_\nu^-) \\
&- \frac{\mathrm{i}}{2}(W_\mu^+ - W_\mu^-)\cdot(W_\nu^+ + W_\nu^-)\Big)\Big] \cdot \Big[\partial^\mu W^{3\nu} - \partial^\nu W^{3\mu} + \\
&g\Big(\frac{\mathrm{i}}{2}(W^{+\mu} + W^{-\mu})\cdot(W^{+\nu} - W^{-\nu}) - \frac{\mathrm{i}}{2}(W^{+\mu} - W^{-\mu})\cdot(W^{+\nu} + W^{-\nu})\Big)\Big] \\
= \; &\frac{1}{2}\Big(\partial_\mu(W_\nu^+ + W_\nu^-) - \partial_\nu(W_\mu^+ + W_\mu^-)\Big)\cdot \\
&\quad\Big(\partial^\mu(W^{+\nu} + W^{-\nu}) - \partial^\nu(W^{+\mu} + W^{-\mu})\Big) \\
&- \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu(W_\nu^+ - W_\nu^-) - \partial_\nu(W_\mu^+ - W_\mu^-)\Big)\cdot \\
&\quad\Big(\partial^\mu(W^{+\nu} - W^{-\nu}) - \partial^\nu(W^{+\mu} - W^{-\mu})\Big) \\
&+ \mathrm{i}g\Big(\partial_\mu(W_\nu^+ + W_\nu^-) - \partial_\nu(W_\mu^+ + W_\mu^-)\Big)\cdot \\
&\quad\Big(W^{3\nu}(W^{+\mu} - W^{-\mu}) - W^{3\mu}(W^{+\nu} - W^{-\nu})\Big) \\
&+ \mathrm{i}g\Big(\partial_\mu(W_\nu^+ - W_\nu^-) - \partial_\nu(W_\mu^+ - W_\mu^-)\Big)\cdot \\
&\quad\Big(W^{3\mu}(W^{+\nu} + W^{-\nu}) - W^{3\nu}(W^{+\mu} + W^{-\mu})\Big) \\
&- \frac{g^2}{2}\Big(W_\nu^3(W_\mu^+ - W_\mu^-) - W_\mu^3(W_\nu^+ - W_\nu^-)\Big)\cdot \\
&\quad\Big(W^{3\nu}(W^{+\mu} - W^{-\mu}) - W^{3\mu}(W^{+\nu} - W^{-\nu})\Big) \\
&+ \frac{g^2}{2}\Big(W_\mu^3(W_\nu^+ + W_\nu^-) - W_\nu^3(W_\mu^+ + W_\mu^-)\Big)\cdot \\
&\quad\Big(W^{3\mu}(W^{+\nu} + W^{-\nu}) - W^{3\nu}(W^{+\mu} + W^{-\mu})\Big) \\
&+ \Big(\partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 + \mathrm{i}g(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-)\Big)\cdot \\
&\qquad\Big(\partial^\mu W^{3\nu} - \partial^\nu W^{3\mu} + \mathrm{i}g(W^{-\mu}W^{+\nu} - W^{+\mu}W^{-\nu})\Big) \\
= \; &4(\partial_\mu W_\nu^+)(\partial^\mu W^{-\nu}) - 4(\partial_\mu W_\nu^+)(\partial^\nu W^{-\mu}) \\
&+ 4\mathrm{i}g\Big((\partial_\mu W_\nu^-)W^{+\mu}W^{3\nu} - (\partial_\mu W_\nu^+)W^{-\mu}W^{3\nu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - (\partial_\mu W^-_\nu) W^{+\nu} W^{3\mu} + (\partial_\mu W^+_\nu) W^{-\nu} W^{3\mu}\Big) \\
&+ 4g^2 \Big(W^+_\mu W^{-\mu} W^3_\nu W^{3\nu} - W^+_\mu W^-_\nu W^{3\mu} W^{3\nu} \Big) \\
&+ \Big(\partial_\mu W^3_\nu - \partial_\nu W^3_\mu + \mathrm{i}g (W^-_\mu W^+_\nu - W^+_\mu W^-_\nu) \Big) \cdot \\
&\qquad \Big(\partial^\mu W^{3\nu} - \partial^\nu W^{3\mu} + \mathrm{i}g (W^{-\mu} W^{+\nu} - W^{+\mu} W^{-\nu}) \Big) \\
= {} & 2(\partial_\mu W^+_\nu - \partial_\nu W^+_\mu) \cdot (\partial^\mu W^{-\nu} - \partial^\nu W^{-\mu}) \\
&+ \sin^2\theta_W \, (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \cdot (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
&+ \cos^2\theta_W \, (\partial_\mu Z^0_\nu - \partial_\nu Z^0_\mu) \cdot (\partial^\mu Z^{0\nu} - \partial^\nu Z^{0\mu}) \\
&+ 2 \sin\theta_W \cos\theta_W \, (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \cdot (\partial^\mu Z^{0\nu} - \partial^\nu Z^{0\mu}) \\
&+ 4\mathrm{i}g \cdot \Big(\sin\theta_W (\partial_\mu W^-_\nu) W^{+\mu} A^\nu + \cos\theta_W (\partial_\mu W^-_\nu) W^{+\mu} Z^{0\nu} \\
&\qquad - \sin\theta_W (\partial_\mu W^+_\nu) W^{-\mu} A^\nu - \cos\theta_W (\partial_\mu W^+_\nu) W^{-\mu} Z^{0\nu} \\
&\qquad - \sin\theta_W (\partial_\mu W^-_\nu) W^{+\nu} A^\mu - \cos\theta_W (\partial_\mu W^-_\nu) W^{+\nu} Z^{0\mu} \\
&\qquad + \sin\theta_W (\partial_\mu W^+_\nu) W^{-\nu} A^\mu + \cos\theta_W (\partial_\mu W^+_\nu) W^{-\nu} Z^{0\mu} \\
&\qquad + \sin\theta_W (\partial_\mu A_\nu) W^{-\mu} W^{+\nu} + \cos\theta_W (\partial_\mu Z^0_\nu) W^{-\mu} W^{+\nu} \\
&\qquad - \sin\theta_W (\partial_\mu A_\nu) W^{+\mu} W^{-\nu} - \cos\theta_W (\partial_\mu Z^0_\nu) W^{+\mu} W^{-\nu} \Big) \\
&+ 4g^2 \Big(\sin^2\theta_W (W^+_\mu W^{-\mu}) A_\nu A^\nu + \cos^2\theta_W (W^+_\mu W^{-\mu}) Z^0_\nu Z^{0\nu} \\
&\quad - \sin^2\theta_W W^+_\mu W^-_\nu A^\mu A^\nu - \cos^2\theta_W W^+_\mu W^-_\nu Z^{0\mu} Z^{0\nu} \\
&\quad - \sin\theta_W \cos\theta_W W^+_\mu W^-_\nu A^\mu Z^{0\nu} - \sin\theta_W \cos\theta_W W^+_\mu W^-_\nu A^\nu Z^{0\mu} \\
&\quad + 2 \sin\theta_W \cos\theta_W (W^+_\mu W^{-\mu}) A_\nu Z^{0\nu} \Big) \\
&- 2g^2 \Big(W^+_\mu W^{+\mu} W^-_\nu W^{-\nu} - W^+_\mu W^-_\nu W^{-\mu} W^{+\nu} \Big)
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Die Ergebnisse der Gleichungen (3.8) und (3.9) lassen sich dann unter Verwendung der Abkürzungen

$$\mathcal{A}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.10a}$$

$$\mathcal{Z}_{\mu\nu} = \partial_\mu Z^0_\nu - \partial_\nu Z^0_\mu \tag{3.10b}$$

$$\mathcal{W}^\pm_{\mu\nu} = \partial_\mu W^\pm_\nu - \partial_\nu W^\pm_\mu \tag{3.10c}$$

zu den folgenden Ausdrücken für die kinetischen Terme des Photonen-, des Z^0-Feldes und der $W^\pm$-Felder sowie der Drei- und Vier-Eichboson-Vertizes zusammenfassen (beachte den unterschiedlichen Vorfaktor des kinetischen

Terms der W-Bosonen!):

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\mathcal{B}_{\mu\nu}\mathcal{B}^{\mu\nu}-\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3}\mathcal{F}^a_{\mu\nu}\mathcal{F}_a^{\mu\nu}\\
&\quad=-\frac{1}{4}\mathcal{A}_{\mu\nu}\mathcal{A}^{\mu\nu}-\frac{1}{4}\mathcal{Z}_{\mu\nu}\mathcal{Z}^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\mathcal{W}^+_{\mu\nu}\mathcal{W}^{-\mu\nu}\\
&\quad-\mathrm{i}g\sin\theta_W\Big[(\partial_\mu W^-_\nu)(W^{+\mu}A^\nu-W^{+\nu}A^\mu)+(\partial_\mu W^+_\nu)(W^{-\nu}A^\mu-\\
&\qquad\qquad W^{-\mu}A^\nu)+(\partial_\mu A_\nu)(W^{-\mu}W^{+\nu}-W^{+\mu}W^{-\nu})\Big]\\
&\quad-\mathrm{i}g\cos\theta_W\Big[(\partial_\mu W^-_\nu)(W^{+\mu}Z^{0\nu}-W^{+\nu}Z^{0\mu})+(\partial_\mu W^+_\nu)(W^{-\nu}Z^{0\mu}-\\
&\qquad\qquad W^{-\mu}Z^{0\nu})+(\partial_\mu Z^0_\nu)(W^{-\mu}W^{+\nu}-W^{+\mu}W^{-\nu})\Big]\\
&\quad-g^2\sin^2\theta_W\Big[W^+_\mu W^{-\mu}A_\nu A^\nu-W^+_\mu W^-_\nu A^\mu A^\nu\Big]\\
&\quad-g^2\cos^2\theta_W\Big[W^+_\mu W^{-\mu}Z^0_\nu Z^{0\nu}-W^+_\mu W^-_\nu Z^{0\mu}Z^{0\nu}\Big]\\
&\quad-g^2\sin\theta_W\cos\theta_W\Big[2W^+_\mu W^{-\mu}A_\nu Z^{0\nu}-W^+_\mu W^-_\nu A^\mu Z^{0\nu}-W^+_\mu W^-_\nu A^\nu Z^{0\mu}\Big]\\
&\quad+\frac{g^2}{2}\Big[W^+_\mu W^{+\mu}W^-_\nu W^{-\nu}-W^+_\mu W^-_\nu W^{-\mu}W^{+\nu}\Big]
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Die ersten drei Ausdrücke sind die kinetischen Terme der Eichboson-Felder, während die sechs Summanden in eckigen Klammern in dieser Reihenfolge die ersten sechs Vertizes der Liste der Feynman-Diagramme im folgenden Kapitel ergeben.

Der im Gluon-Feldstärketensor quadratische Term liefert sofort die kinetische Energie der Gluonen sowie den 3- und 4-Gluon-Vertex:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8}\mathcal{G}^a_{\mu\nu}\mathcal{G}_a^{\mu\nu}\\
&=(\partial_\mu G^a_\nu-\partial_\nu G^a_\mu+g_s f^{abc}G^b_\mu G^c_\nu)\cdot(\partial^\mu G^{a\nu}-\partial^\nu G^{a\mu}+g_s f^{abc}G^{b\mu}G^{c\nu})\\
&=(\partial_\mu G^a_\nu-\partial_\nu G^a_\mu)\cdot(\partial^\mu G^{a\nu}-\partial^\nu G^{a\mu})\\
&\quad+2g_s f^{abc}(\partial_\mu G^a_\nu-\partial_\nu G^a_\mu)G^{b\mu}G^{c\nu}
\end{aligned}
$$

$$+ g^2 f^{abc} f^{ade} G^b_\mu G^c_\nu G^{d\mu} G^{e\nu} \tag{3.12}$$

Die Richtigkeit der QCD-Vertizes, die im folgenden Kapitel aufgelistet sind, erkennt man, wenn man eine bestimmte Index-Kombination für die Farbquantenzahlen einsetzt.

3.3 Das Higgsfeld

Das Minimum das Potentials des Higgsfeldes ist leicht ermittelt:

$$\frac{\partial}{\partial\Phi}\Big(\mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2\Big) = \mu^2\Phi^\dagger - 2\lambda(\Phi^\dagger\Phi)\Phi^\dagger \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\Phi^\dagger\Phi)_{\text{min.}} = \langle 0|\Phi^\dagger\Phi|0\rangle = \frac{\mu^2}{2\lambda^2} \equiv \frac{1}{2}v^2 \iff \boxed{v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}} \tag{3.13}$$

Man erhält hierdurch also den Vakuumerwartungserwert des Higgsfeldes, ausgedrückt durch die Kopplungsparameter in der Lagrangedichte. Es besteht nun die Möglichkeit, die Freiheitsgrade der Goldstone-Bosonen (Ausführlicheres hierzu in [7]) durch eine Eichtransformation zu beseitigen. Darauf wird hier verzichtet, alle Feynman-Regeln unter Mitnahme der Goldstone-Bosonen hergeleitet. Arbeitet man später in der Unitaritätseichung, dann hat man lediglich alle Vertizes wegzulassen, die Goldstone-Bosonen enthalten.

Beim Berechnen der eichkovarianten Ableitung kann man elektroschwache Theorie und Quantenchromdynamik getrennt voneinander betrachten, da keine Mischung der Eichfelder wie im Falle der $SU(2)_L \times U(1)_Y$ vorliegt. Zunächst der elektroschwache Anteil, für den die eichkovariante Ableitung die Form

$$\Big(\mathrm{D}_\mu\Phi\Big)_{\text{elektroschwach}} = \Big(\partial_\mu - \mathrm{i}gW^a_\mu\frac{\sigma^a}{2} - \mathrm{i}g'\frac{Y}{2}B_\mu\Big)\Phi \tag{3.14}$$

besitzt. Hier kann man folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} W^a_\mu\frac{\sigma^a}{2} &= W^1_\mu\frac{\sigma^1}{2} + W^2_\mu\frac{\sigma^2}{2} + W^3_\mu\frac{\sigma^3}{2} \qquad (3.15)\\ &= \frac{W^+_\mu + W^-_\mu}{\sqrt{2}}\frac{\sigma^1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{W^+_\mu - W^-_\mu}{\sqrt{2}}\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sin\theta_W}{2}A_\mu\sigma^3 + \frac{\cos\theta_W}{2}Z^0_\mu\sigma^3\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}W^+_\mu T^+ + \frac{1}{\sqrt{2}}W^-_\mu T^- + \sin\theta_W A_\mu T^3 + \cos\theta_W Z^0_\mu T^3, \end{aligned}$$

wobei

$$T^+ = \frac{1}{2}(\sigma^1 + \mathrm{i}\sigma^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad T^- = \frac{1}{2}(\sigma^1 - \mathrm{i}\sigma^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$T^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Der $U(1)_Y$-Faktor ist trivial, da er nur die Weinberg-Mischung enthält:

$$YB_\mu = Y\cos\theta_W A_\mu - Y\sin\theta_W Z^0_\mu. \tag{3.17}$$

Entwickelt man das Higgs-Feld um seinen Vakuumerwartungswert unter Beibehaltung der Goldstone-Bosonen $\phi^a, a = 1,2,3$, so hat man mit den Abkürzungen $\phi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^1 \pm \mathrm{i}\phi^2)$, $\phi^3 \equiv \phi^0$:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi^2 + \mathrm{i}\phi^1 \\ v + H - \mathrm{i}\phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\phi^- \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H - \mathrm{i}\phi^0) \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

Damit und unter Verwendung der Relationen (2.3) sowie der Gell-Mann-Nishijima-Formel (2.10) nimmt die eichkovariante Ableitung insgesamt diese Gestalt an:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_\mu\Phi =& \Big[\partial_\mu - \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}(W^+_\mu T^+ + W^-_\mu T^-) - \mathrm{i}A_\mu(g\sin\theta_W T^3 + g'\cos\theta_W\frac{Y}{2}) \\ & - \mathrm{i}Z^0_\mu(g\cos\theta_W T^3 - g'\sin\theta_W\frac{Y}{2})\Big]\Phi \\ =& \Big[\partial_\mu - \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}(W^+_\mu T^+ + W^-_\mu T^-) - \mathrm{i}eA_\mu(T^3 + \frac{Y}{2}) \\ & - \mathrm{i}Z^0_\mu\frac{g}{\cos\theta_W}(\cos^2\theta_W T^3 - \sin^2\theta_W\frac{Y}{2})\Big]\Phi \\ =& \Big[\partial_\mu - \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}(W^+_\mu T^+ + W^-_\mu T^-) - \mathrm{i}eA_\mu Q \\ & - \mathrm{i}Z^0_\mu\frac{g}{\cos\theta_W}(T^3 - \sin^2\theta_W Q)\Big]\Phi \\ =& \Big\{\begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} - \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & W^+_\mu \\ W^-_\mu & 0 \end{pmatrix} - \mathrm{i}\frac{g}{\cos\theta_W}Z^0_\mu\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \\ & +\mathrm{i}\frac{g\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}Z^0_\mu\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \mathrm{i}eA_\mu\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big\}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\phi^- \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H - \mathrm{i}\phi^0) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{D}_\mu\Phi =$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}\partial_\mu\phi^- - \frac{\mathrm{i}g}{2}W^+_\mu(v + H - \mathrm{i}\phi^0) + \frac{g}{2\cos\theta_W}Z^0_\mu\phi^- - \frac{g\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}Z^0_\mu\phi^- + eA_\mu\phi^- \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu H - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\partial_\mu\phi^0 + \frac{g}{\sqrt{2}}W^-_\mu\phi^- + \frac{\mathrm{i}g}{2\sqrt{2}\cos\theta_W}Z^0_\mu(v + H - \mathrm{i}\phi^0) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \left[-\frac{g}{2}W_\mu^+\phi^0 + \frac{g}{2\cos\theta_W}(2\cos^2\theta_W - 1)Z_\mu^0\phi^- + eA_\mu\phi^-\right] + \mathrm{i}\left[\partial_\mu\phi^- - \frac{g}{2}W_\mu^+(v+H)\right] \\ \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu H + \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^-\phi^- + \frac{g}{2\sqrt{2}\cos\theta_W}Z_\mu^0\phi^0\right] + \mathrm{i}\left[\frac{g}{2\sqrt{2}\cos\theta_W}Z_\mu^0(v+H) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu\phi^0\right] \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

$$\Longrightarrow (\mathrm{D}_\mu\Phi^\dagger)(\tag{3.21}$$

3.4 Yukawa-Terme und CKM-Mischung

Die Massen der Fermionen, Quarks und Leptonen,

3.5 Allgemeines zur Herleitung der Feynman-Regeln

Allgemein muß man bei der Konstruktion der Feynman-Regeln folgendes beachten: Wählt man bei allen Vertizes die Impulse aller beteiligten Teilchen auslaufend, dann liefert die Anwendung der partiellen Ableitung ∂_μ auf die Einteilchen-Wellenfunktion $(e^{-\mathrm{i}p_\mu x^\mu})^*$ den entsprechenden Impuls p_μ mit einem Vorfaktor i (in den Feynman-Regeln werden später alle Lorentz-Indizes heraufgezogen). Da jeder Vertex einem Term des Störhamiltonoperators im Wechselwirkungsbild angehört, die obigen Terme aber aus der Lagrangedichte gewonnen wurden, erhält man einen zusätzlichen Vorfaktor (-1) vom Übergang $\mathcal{L}_I \to -\mathcal{H}_I$. Weiterhin tritt jeder Vertex auf als ein Term erster Ordnung der Störungsreihe, so daß ein weiterer Vorfaktor $-\mathrm{i}$ aus dieser hinzukommt. Insgesamt hat man also einen relativen Faktor

$$+\mathrm{i} \quad \text{zwischen den Termen oben und den folgenden Feynman-Regeln.} \tag{3.22}$$

Die partiellen Ableitungen bei Diagrammen mit Ableitungskopplungen sind durch $\mathrm{i}p^\mu$ zu ersetzen, worin p^μ, wie bereits gesagt, der nach außen laufende Impuls des Teilchens ist.

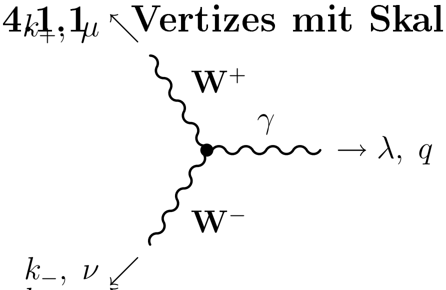
Kapitel 4

Feynmanregeln im Standardmodell

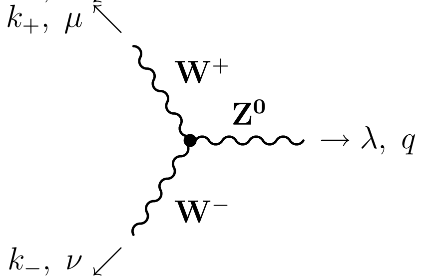
Siehe hierzu auch [2], beachte aber die teilweise gegensätzlichen Konventionen!.

4.1 Elektroschwache Theorie

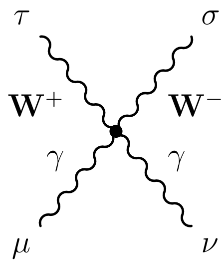
4.1.1 Vertizes mit Skalaren und Vektoren



$$\mathrm{i}e\Big[(k_- - k_+)^\lambda g^{\mu\nu} + (q - k_-)^\mu g^{\nu\lambda} + (k_+ - q)^\nu\Big]$$

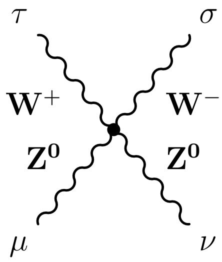


$$\mathrm{i}g\cos\theta_W\Big[(k_- - k_+)^\lambda g^{\mu\nu} + (q - k_-)^\mu g^{\nu\lambda} + (k_+ - q)^\nu\Big]$$



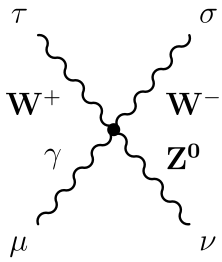
$$-\mathrm{i}e^2\Big[2g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau} - g^{\mu\tau}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\Big]$$

Beachte die möglichen Kontraktionen!

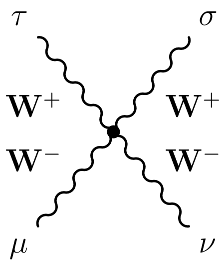


$$-\mathrm{i}g\cos^2\theta_W\left[2g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau} - g^{\mu\tau}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\right]$$

Beachte die möglichen Kontraktionen!

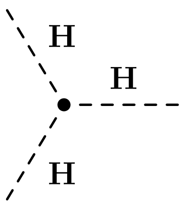


$$-\mathrm{i}g^2\cos\theta_W\sin\theta_W\left[2g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau} - g^{\mu\tau}g^{\nu\sigma}\right.$$
$$\left.-g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\right]$$

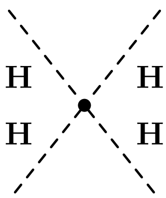


$$\mathrm{i}g^2\left[2g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau} - g^{\mu\tau}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\right]$$

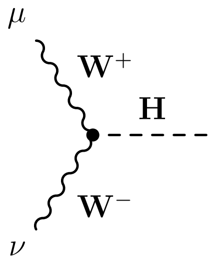
Vier mögliche Kontraktionen beim ersten Term, zwei beim zweiten Term der Lagrangedichte!



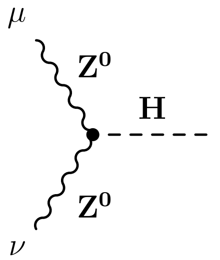
$$-\mathrm{i}\cdot 3!\cdot\lambda v = -3\mathrm{i}\,\frac{m_H^2}{v} = -3\mathrm{i}g\,\frac{m_H^2}{m_W}$$



$$-\tfrac{\mathrm{i}}{4}\cdot 4!\cdot\lambda = -3\mathrm{i}\,\frac{m_H^2}{v^2}$$

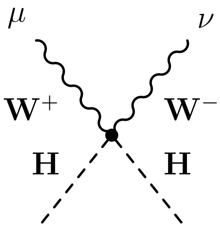


$$\mathrm{i}\cdot 2\,\frac{m_W^2}{v}\cdot g^{\mu\nu}$$



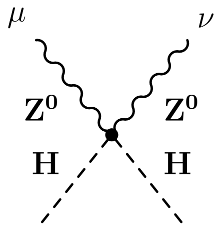
$$\mathrm{i}\cdot 2\,\frac{m_Z^2}{v}\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 der Z^0 – Bosonen.



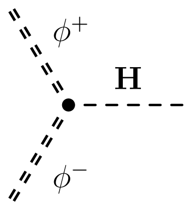
$$\mathrm{i}\cdot 2\,\frac{m_W^2}{v^2}\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 der Higgs-Bosonen.

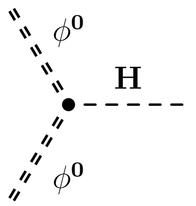


$$\mathrm{i}\cdot 2\,\frac{m_Z^2}{v^2}\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Higgs-Bosonen und Z^0.

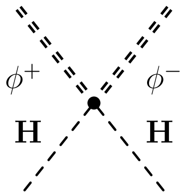


$$-2\mathrm{i}\lambda v = -\mathrm{i}\frac{m_H^2}{v} = -\mathrm{i}g\,\frac{m_H^2}{2m_W}$$



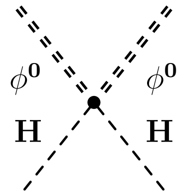
$$-2\mathrm{i}\lambda v = -\mathrm{i}\,\frac{m_H^2}{v} = -\mathrm{i}g\,\frac{m_H^2}{2m_W}$$

Symmetriefaktor 2 für ϕ^0



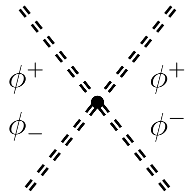
$$-\mathrm{i}\cdot 2\cdot\lambda = -\mathrm{i}g^2\,\frac{m_H^2}{4m_W^2}$$

Symmetriefaktor 2 für Higgs-Bosonen.



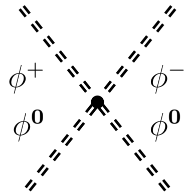
$$-\mathrm{i}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{\lambda}{2} = -\mathrm{i}g^2\,\frac{m_H^2}{4m_W^2}$$

Symmetriefaktor 2 für Higgs-Bosonen und ϕ^0.



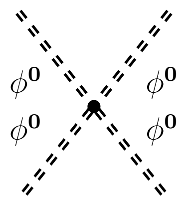
$$-\mathrm{i}\cdot 2\cdot 2\cdot\lambda = -\mathrm{i}g^2\,\frac{m_H^2}{2m_W^2}$$

Symmetriefaktor 2 für ϕ^+und ϕ^-.



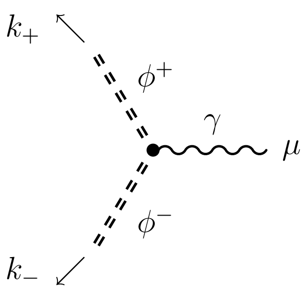
$$-\mathrm{i}\cdot 2\cdot\lambda = -\mathrm{i}g^2\frac{m_H^2}{4m_W^2}$$

Symmetriefaktor 2 für ϕ^0.

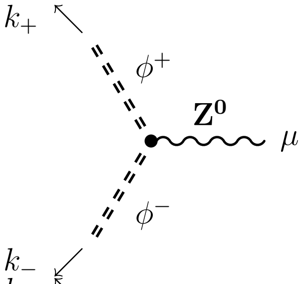


$$-\mathrm{i}\cdot 4!\cdot\frac{\lambda}{4} = -\mathrm{i}\cdot 6\lambda = -\mathrm{i}g^2\,\frac{3m_H^2}{4m_W^2}$$

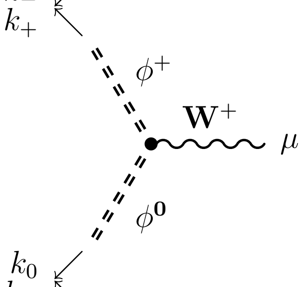
Symmetriefaktor 4! für ϕ^0.



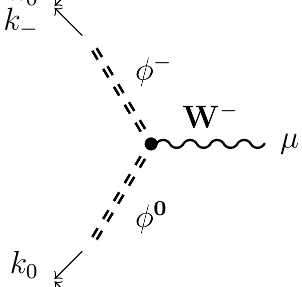
$$\mathrm{i}e\,(k_- - k_+)^\mu$$



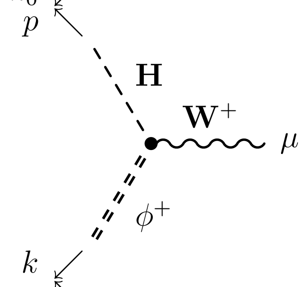
$$\mathrm{i}g\,\frac{(\cos^2\theta_W - 1)}{2\cos\theta_W}\,(k_- - k_+)^\mu$$



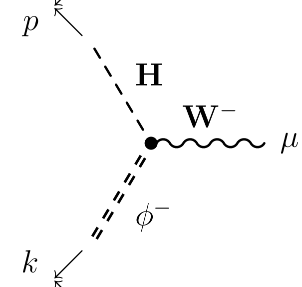
$$\mathrm{i}\,\frac{g}{2}\,(k_+ - k_0)^\mu$$



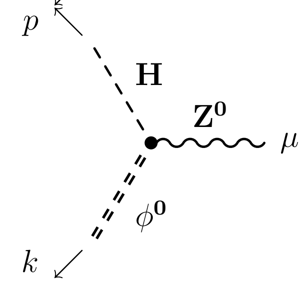
$$\mathrm{i}\,\frac{g}{2}\,(k_0 - k_-)^\mu$$



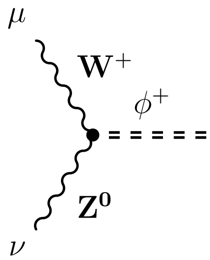
$$\frac{g}{2}\,(p - k)^\mu$$



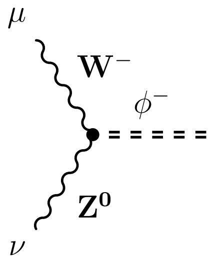
$$\frac{g}{2}\,(p - k)^\mu$$



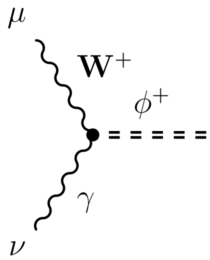
$$\frac{g}{2\cos\theta_W}\,(p - k)^\mu$$



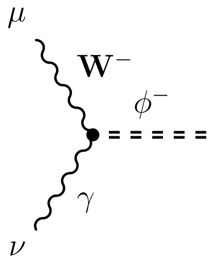
$$-g^2 \frac{\sin^2\theta_W v}{2\cos\theta_W} g^{\mu\nu} = -g \frac{\sin^2\theta_W m_W}{\cos\theta_W} g^{\mu\nu}$$



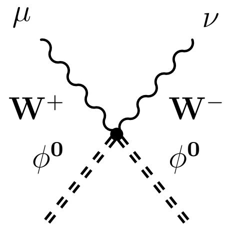
$$g^2 \frac{\sin^2\theta_W v}{2\cos\theta_W} g^{\mu\nu} = g \frac{\sin^2\theta_W m_W}{\cos\theta_W} g^{\mu\nu}$$



$$\frac{egv}{2} g^{\mu\nu} = e m_W g^{\mu\nu} = g m_W \sin\theta_W g^{\mu\nu}$$

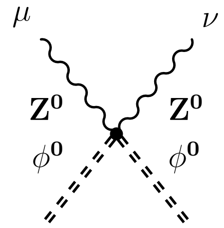


$$-\frac{egv}{2} g^{\mu\nu} = -e m_W g^{\mu\nu} = -g m_W \sin\theta_W g^{\mu\nu}$$



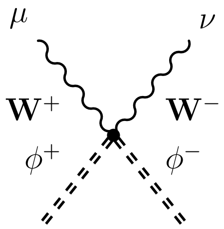
$$\mathrm{i}\,\frac{g^2}{2} \cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für ϕ^0.

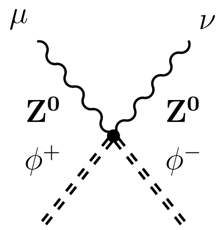


$$\mathrm{i}\,\frac{g^2}{2\cos^2\theta_W} \cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Z^0 und ϕ^0.

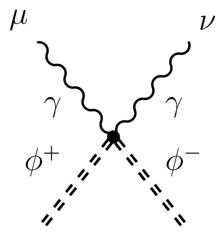


$$\mathrm{i}\,\frac{g^2}{2}\cdot g^{\mu\nu}$$



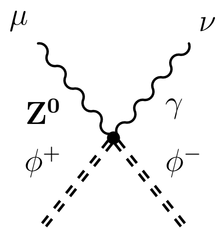
$$\mathrm{i}\cdot 2\cdot\frac{g^2}{4}\cdot\frac{(1-2\sin^2\theta_W)^2}{\cos^2\theta_W}\cdot g^{\mu\nu}$$
$$=\mathrm{i}\frac{g^2}{2}\,\frac{(2\cos^2\theta_W-1)^2}{\cos^2\theta_W}\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Z^0.

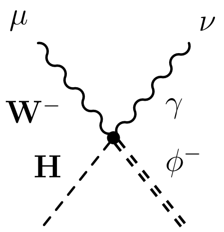


$$2\mathrm{i}e^2\cdot g^{\mu\nu}$$

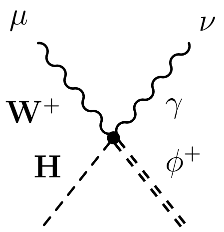
Symmetriefaktor 2 für Photonen.



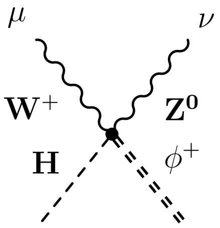
$$\mathrm{i}eg\,\frac{(2\cos^2\theta_W-1)}{\cos\theta_W}\cdot g^{\mu\nu}$$
$$=\mathrm{i}g^2\,\frac{(2\cos^2\theta_W-1)\sin\theta_W}{\cos\theta_W}\cdot g^{\mu\nu}$$



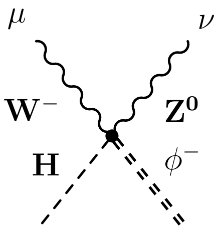
$$-\frac{eg}{2}\cdot g^{\mu\nu}=-\frac{g^2}{2}\sin\theta_W\cdot g^{\mu\nu}$$



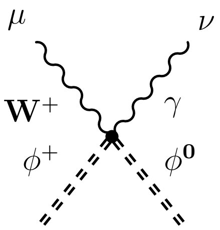
$$\frac{eg}{2}\cdot g^{\mu\nu}=\frac{g^2}{2}\sin\theta_W\cdot g^{\mu\nu}$$



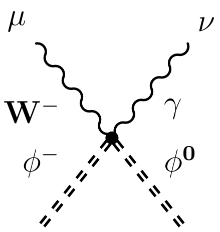
$$-g^2\,\frac{\sin^2\theta_W}{2\cos\theta_W}\cdot g^{\mu\nu}$$



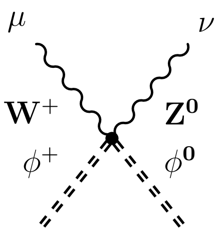
$$g^2\,\frac{\sin^2\theta_W}{2\cos\theta_W}\cdot g^{\mu\nu}$$



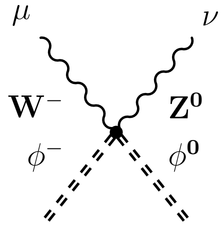
$$-\frac{eg}{2}\cdot g^{\mu\nu}=-\frac{g^2}{2}\sin\theta_W\cdot g^{\mu\nu}$$



$$-\frac{eg}{2}\cdot g^{\mu\nu}=-\frac{g^2}{2}\sin\theta_W\cdot g^{\mu\nu}$$

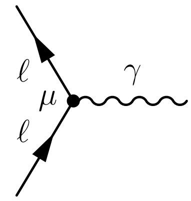


$$\mathrm{i}g^2\,\frac{\sin^2\theta_W}{2\cos\theta_W}\cdot g^{\mu\nu}$$

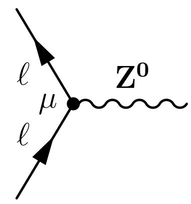


$$\mathrm{i}g^2 \, \frac{\sin^2\theta_W}{2\cos\theta_W} \cdot g^{\mu\nu}$$

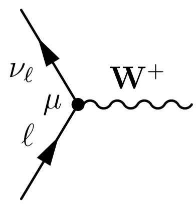
4.1.2 Fermionische Vertizes



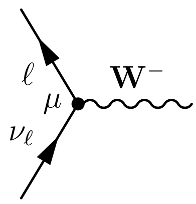
$$-\mathrm{i}e\gamma^\mu$$



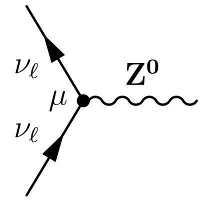
$$-\mathrm{i}\,\frac{g}{4\cos\theta_W}\,\gamma^\mu(1-4\sin^2\theta_W-\gamma^5)$$



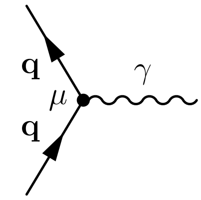
$$\mathrm{i}\,\frac{g}{2\sqrt{2}}\,\gamma^\mu(1-\gamma^5)$$



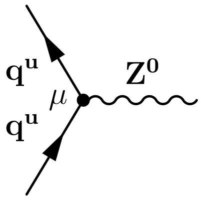
$$\mathrm{i}\,\frac{g}{2\sqrt{2}}\,\gamma^\mu(1-\gamma^5)$$



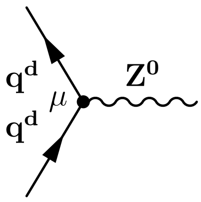
$$\mathrm{i}\,\frac{g}{4\cos\theta_W}\,\gamma^\mu(1-\gamma^5)$$



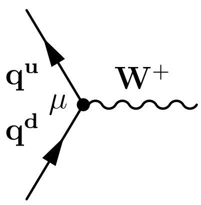
$$\mathrm{i}eQ_q\gamma^\mu$$



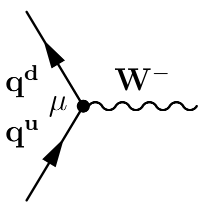
$$\mathrm{i}\,\frac{g}{4\cos\theta_W}\,\gamma^\mu(1-\tfrac{8}{3}\sin^2\theta_W-\gamma^5)$$



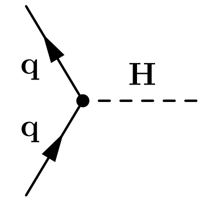
$$-\mathrm{i}\,\frac{g}{4\cos\theta_W}\,\gamma^\mu(1-\tfrac{4}{3}\sin^2\theta_W-\gamma^5)$$



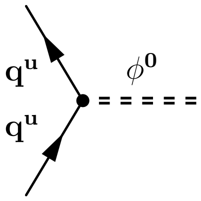
$$\mathrm{i}\,\frac{g}{2\sqrt{2}}\;\cdot V_{q^uq^d}\cdot\gamma^\mu(1-\gamma^5)$$



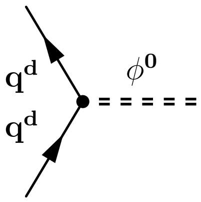
$$\mathrm{i}\,\frac{g}{2\sqrt{2}}\;\cdot V^*_{q^uq^d}\cdot\gamma^\mu(1-\gamma^5)$$



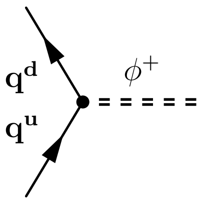
$$-\mathrm{i}\,\frac{m_q}{v}$$



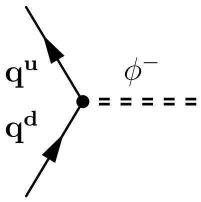
$$\frac{m_{q^u}}{v}\,\gamma^5$$



$$-\,\frac{m_{q^d}}{v}\,\gamma^5$$

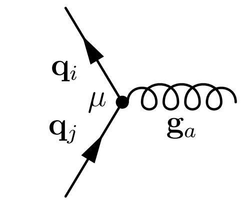


$$-\,\frac{1}{\sqrt{2}\,v}\,\Big((m_{q^u}-m_{q^d})+(m_{q^u}+m_{q^d})\gamma^5\Big)\cdot V^*_{q^u q^d}$$

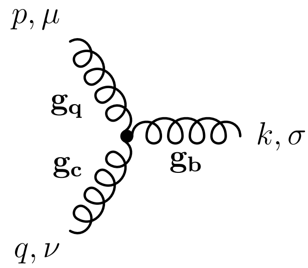


$$-\,\frac{1}{\sqrt{2}\,v}\,\Big(-(m_{q^u}-m_{q^d})+(m_{q^u}+m_{q^d})\gamma^5\Big)\cdot V_{q^u q^d}$$

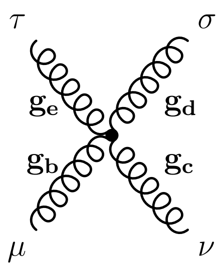
4.2 Quantenchromodynamik (QCD)



$$i\, g_s \gamma^\mu (T^a)_{ij}$$



$$-g_s f^{abc}\big[(p-k)^\nu g^{\mu\sigma} + (q-p)^\sigma g^{\mu\nu} \\ (k-q)^\mu g^{\nu\sigma}\big]$$



$$-i g_s^2 \big[f^{abc} f^{ade} (g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} - g^{\mu\tau} g^{\nu\sigma}) \\ + f^{abd} f^{ace} (g^{\mu\nu} g^{\sigma\tau} - g^{\mu\tau} g^{\nu\sigma}) \\ + f^{abe} f^{acd} (g^{\mu\nu} g^{\sigma\tau} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau}) \big]$$

Teil III

Supersymmetrie

Kapitel 5

Supersymmetrie

5.1 Die Poincaré-Algebra

Die Poincaré-Algebra besteht aus den Generatoren der Lorentz-Gruppe $M^{\mu\nu}$, die für räumliche Indizes $\mu, \nu \equiv i, j = 1, 2, 3$ die Drehungen und für Kombinationen der Art $\mu = 0, \nu = i$ die Boosts erzeugen, sowie dem 4-Impuls P^μ als Erzeugendem der Raum-Zeit-Translationen. Für diese gelten folgende Kommutatorrelationen:

$$\boxed{\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0, \\ [P^\mu, M^{\rho\sigma}] &= \mathrm{i}(g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho), \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= -\mathrm{i}(g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}) \end{aligned}} \tag{5.1}$$

Die beiden Casimir-Operatoren der Poincaré-Gruppe sind die Quadrate des Impuls- und des Pauli-Lubanski-Vektors:

$$P^2 = P_\mu P^\mu, \qquad W^2 = W_\mu W^\mu \tag{5.2}$$

P^2 vertauscht natürlich mit den Impulskomponenten, aber auch mit den Lorentz-Generatoren:

$$\begin{aligned} [P^2, M^{\rho\sigma}] &= P_\mu [P^\mu, M^{\rho\sigma}] + [P_\mu, M^{\rho\sigma}] P^\mu \\ &= \mathrm{i} P_\mu (g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho) + \mathrm{i}(\delta^\rho_\mu P^\sigma - \delta^\sigma_\mu P^\rho) P^\mu = 0 \end{aligned}$$

5.2 Die Super-Poincaré-Algebra

Die Super-Poincaré-Algebra in zweikomponentiger Schreibweise:

$$\boxed{\begin{aligned}
[P^\mu, P^\nu] &= 0, \\
[P^\mu, M^{\rho\sigma}] &= \mathrm{i}(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho), \\
[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= -\mathrm{i}(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}) \\
[Q^i_\alpha, P^\mu] &= 0, \\
[\bar{Q}^i_{\dot\alpha}, P^\mu] &= 0, \\
[Q^i_\alpha, M^{\mu\nu}] &= (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\beta} Q^i_\beta, \\
[\bar{Q}^i_{\dot\alpha}, M^{\mu\nu}] &= (\bar\sigma^{\mu\nu})_{\dot\alpha}^{\dot\beta} Q^i_{\dot\beta}, \\
\{Q^i_\alpha, \bar{Q}^j_{\dot\alpha}\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} P_\mu\, \delta_{ij}, \\
\{Q^i_\alpha, Q^j_\beta\} &= \epsilon_{\alpha\beta}\, Z_{ij} \\
\{\bar{Q}^i_{\dot\alpha}, \bar{Q}^j_{\dot\beta}\} &= \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\, Z^\dagger_{ij} \\
[Z^{(\dagger)}_{ij}, T] &= 0, \qquad T = \text{beliebiger Operator}
\end{aligned}} \tag{5.3}$$

In der vierdimensionalen Darstellung, die vieles kompakter darstellt, deshalb aber auch manches verschleiert, definiert man die Superladungen paarweise zu Majorana-Spinoren:

$$Q_i = \begin{pmatrix} Q_{i,\alpha} \\ \bar{Q}_i^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Die allgemeine Jacobi-Identität für $\mathbb{Z}_2$-graduierte Lie-Algebren lautet:

$$\begin{multlined}(-1)^{\eta_C\eta_A}[[T_A, T_B\}, T_C\} + (-1)^{\eta_A\eta_B}[[T_B, T_C\}, T_A\} + \\ (-1)^{\eta_B\eta_C}[[T_C, T_A\}, T_B\} = 0\end{multlined} \tag{5.5}$$

Dies enthält die folgenden Spezialfälle, worin B für bosonische und F für fermionische Operatoren stehen:

$$\begin{aligned}
[[B_A, B_B], B_C] + [[B_B, B_C], B_A] + [[B_C, B_A], B_B] &= 0 \\
[[F_A, B_B], B_C] + [[B_B, B_C], F_A] + [[B_C, F_A], B_B] &= 0 \\
\{[B_A, F_B], F_C\} + [\{F_B, F_C\}, B_A] - \{[F_C, B_A], F_B\} &= 0 \\
\{\{F_A, F_B\}, F_C\} + \{\{F_B, F_C\}, F_A\} + \{\{F_C, F_A\}, F_B\} &= 0
\end{aligned} \tag{5.6}$$

5.3 Der Superraum

Man kann das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum erweitern zu einem graduierten Vektorraum der Gestalt $\mathbb{R}^{(1,3)|4}$, der über vier reelle c-Zahl-wertige Komponenten und vier Grassmann-wertige Komponenten

$$(x^0, x^1, x^2, x^3, \theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4) \tag{5.7}$$

verfügt. Dies ist der Spezialfall der einfachen Supersymmetrie, im Falle der N-fachen Supersymmetrie erhält man den Raum $\mathbb{R}^{(1,3)|2\cdot 2N}$. Die 14 Generatoren der einfachen Supersymmetrie $(P^\mu, M^{\rho\sigma}, Q_\beta, \bar{Q}_{\dot\beta})$ erzeugen die Super-Raumzeit-Transformationen, Raumzeit-Translationen durch P^μ, Boosts und Rotationen durch $M^{\rho\sigma}$, sowie Translationen in den Grassmann-wertigen Komponenten um *spinorielle* Inkremente $\alpha, \bar\alpha$ durch die Superladungen $Q_\beta, \bar{Q}_{\dot\beta}$. Diese spinoriellen Parameter werden ebenso wie die Superladungen als Weyl-Spinoren formuliert:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \qquad \bar\alpha = \begin{pmatrix} \bar\alpha^{\dot 1} \\ \bar\alpha^{\dot 2} \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

Diese sind Grassmann-wertig, so daß

$$\{\alpha_\gamma, \alpha_\delta\} = \{\alpha_\gamma, \bar\alpha_{\dot\delta}\} = \{\bar\alpha_{\dot\gamma}, \bar\alpha_{\dot\delta}\} = 0. \tag{5.9}$$

Da diese Parameter konstant sind, antikommutieren sie auch mit den Superladungen:

$$\{\alpha_\gamma, Q_\delta\} = \{\alpha_\gamma, \bar{Q}_{\dot\delta}\} = \{\bar\alpha_{\dot\gamma}, Q_\delta\} = \{\bar\alpha_{\dot\gamma}, \bar{Q}_{\dot\delta}\} = 0. \tag{5.10}$$

Aus den oben geschilderten Elementen der verschiedenen Operationen auf dem Superraum kann man nun die Poincaré-Supergruppe konstruieren, deren allgemeinstes Element die Gestalt

$$S(b, \omega, \alpha, \bar\alpha) = \exp\left[\mathrm{i}\left(b_\mu P^\mu + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} + \alpha Q + \bar\alpha \bar{Q}\right)\right] \tag{5.11}$$

besitzt. Eine vollständige Darstellung der Theorie der Lie-Supergruppen findet sich in [12].

Was ist mit den Rotationen oder Boosts im fermionischen Teil des Superraums? Ein Generator, der so etwas leistet, müßte ein Spintensor 2. Stufe in den Spinorindizes und folglich ein (gemischtes) Tensorprodukt der beiden Superladungen sein. Dies ist aber laut der Poincaré-Superalgebra (5.3) proportional zu einer gewöhnlichen *Translation* in der Raumzeit. Der entscheidende Punkt, weshalb sich Drehungen der fermionischen Koordinaten nicht definieren lassen, ist der, daß - wie unten noch ausführlicher erläutert - Superfunktionen, also Funktionen dieser Grassmann-Parameter maximal linear in diesen sein können. Drehungen sind gegeben durch Potenzreihenentwicklungen beliebig hoher Ordnungen, die es auf dem fermionischen Teil des Superraumes nicht gibt.

5.3.1 Analysis mit fermionischen Superraumkoordinaten

Für die Ableitungen nach den Superraum-Koordinaten gilt:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\,\theta^\beta=\delta^\beta_\alpha & \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\,\theta_\beta=\delta^\alpha_\beta \\ \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}\,\bar\theta^{\dot\beta}=\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha} & \frac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}}\,\bar\theta_{\dot\beta}=\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta} \end{array}} \tag{5.12}$$

Für gleiche Indexstellungen erhält man (entsprechend für die gepunkteten Größen):

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\,\theta_\beta=\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\,\theta^\gamma\epsilon_{\gamma\beta}=\epsilon_{\alpha\beta}, \tag{5.13a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\,\theta^\beta=\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\,\epsilon^{\beta\gamma}\theta_\gamma=\epsilon^{\beta\alpha}=-\epsilon^{\alpha\beta} \tag{5.13b}$$

Vorsicht: Die obigen Relationen haben zur Konsequenz, daß das Herauf- und Herunterziehen von Spinorindizes bei den Ableitungsoperatoren mit einem relativen Vorzeichen zu versehen ist!

$$\epsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}=-\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha},\qquad \frac{\partial}{\partial\theta_\beta}\epsilon^{\beta\alpha}=-\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \tag{5.14}$$

Die Ableitungen nach den Superraumkoordinaten sind selber fermionische „Koordinaten", so daß die Antikommutatorrelationen nur natürlich sind:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha},\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right\}=0,\quad \left\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha},\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}\right\}=0,\quad \left\{\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}},\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}\right\}=0 \tag{5.15}$$

Obige Ableitungsregeln lassen sich auch in der Gestalt von Antikommutatoren schreiben:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha},\theta^\beta\right\}=\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_\beta},\theta^\alpha\right\}=\delta^\beta_\alpha \tag{5.16a}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha},\theta^\beta\right\}=-\epsilon^{\alpha\beta} \tag{5.16b}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \theta_\beta \right\} = \epsilon_{\alpha\beta} \tag{5.16c}$$

Die entsprechenden Gleichungen für rein gepunktete Indizes sind identisch. Natürlich müssen die gemischten Antikommutatoren verschwinden:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot\alpha}}, \theta_\beta \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \bar{\theta}_{\dot\beta} \right\} = 0 \tag{5.16d}$$

Ableitungen aus Kontraktionen der Superraum-Koordinaten lassen sich leicht ermitteln:

$$\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}\,\theta\theta = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}(\theta^\beta \theta_\beta) = (\delta_\alpha^\beta - \theta^\beta \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha})\theta_\beta = \theta_\alpha - \theta^\beta \epsilon_{\alpha\beta} = 2\theta_\alpha \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot\alpha}}\,\bar{\theta}\bar{\theta} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot\alpha}}(\bar{\theta}_{\dot\beta}\bar{\theta}^{\dot\beta}) = (\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} - \bar{\theta}_{\dot\beta}\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot\alpha}})\bar{\theta}^{\dot\beta} = -\bar{\theta}^{\dot\beta}\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha} - \bar{\theta}_{\dot\beta}\delta_{\dot\alpha}^{\dot\beta} = -2\bar{\theta}_{\dot\alpha} \tag{5.18}$$

Daraus folgen die Identitäten:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta} \right)\,\theta\theta = 4, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}}\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \right)\,\bar{\theta}\bar{\theta} = 4 \tag{5.19}$$

Es gelten die vier Relationen

$$\boxed{\begin{array}{ll} \theta^\alpha\theta^\beta = -\dfrac{1}{2}\,\epsilon^{\alpha\beta}\,\theta\theta & \qquad \bar{\theta}^{\dot\alpha}\,\bar{\theta}^{\dot\beta} = \dfrac{1}{2}\,\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar{\theta}\bar{\theta} \\ \theta_\alpha\theta_\beta = -\dfrac{1}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta}\,\theta\theta & \qquad \bar{\theta}_{\dot\alpha}\bar{\theta}_{\dot\beta} = \dfrac{1}{2}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar{\theta}\bar{\theta} \end{array}} \tag{5.20}$$

Beweis: Aufgrund der Gestalt der Spinormetrik gilt

$$\theta_1 = \theta^2\,\epsilon_{21} = -\theta^2, \qquad \theta_2 = \theta^1\,\epsilon_{12} = \theta^1,$$

womit sich leicht nachrechnen läßt:

$$\theta\theta = \theta^\beta\theta_\beta = \theta^1\theta_1 + \theta^2\theta_2 = -\theta^1\theta^2 + \theta^2\theta^1 = -2\theta^1\theta^2$$

Für die gepunkteten Spinoren rehält man das Resultat durch komplexe Konjugation unter Beachtung der Reihenfolge beim Konjugieren von Grassmann-Zahlen

$$(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$$

und der unterschiedlichen „Kontraktionsrichtung“ bei der Summationskonvention.

5.3.2 Integrationen über Grassmann-Parameter

Dies ist ein Problem, das schon von der Definition von Pfadintegralen für fermionische Feldvariablen bekannt ist und an dieser Stelle wiederholt werden soll. Die historische Quellenangabe hier ist [26]. Für die Definition von Integralen, insbesondere Pfadintegralen, essentiell ist die Invarianz des Integrals unter Translationen der Integrationsvariablen.

5.3.3 Fermionische Koordinaten als Bispinoren

Die fermionischen Superraum-Koordinaten lassen sich in natürlicher Weise als (Majorana-) Bispinoren schreiben:

$$\theta \equiv \begin{pmatrix} \theta_\alpha \\ \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \theta_L \\ \theta_R \end{pmatrix}, \qquad \overline{\theta} \equiv \theta^\dagger \gamma^0 = \left(\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \right) = \left(\theta_R, \theta_L \right) \tag{5.21}$$

Hier wurden die rechts- und linkshändigen Anteile des Bispinors wie üblich eingeführt:

$$\theta_R = \frac{1}{2}\left(1 + \gamma^5\right)\theta, \qquad \theta_L = \frac{1}{2}\left(1 - \gamma^5\right)\theta \tag{5.22}$$

5.3.4 Eigenschaften von Majorana-Spinoren

Da sowohl die fermionischen Superraum-Koordinaten wie auch die Superladungen Majorana-Spinoren sind, ist es sinnvoll, an dieser Stelle Eigenschaften dieser reellen Bispinoren mit vier reellen Komponenten zu untersuchen. Ein Majorana-Spinor besitzt als linkshändige Komponente den gleichen Feldgehalt wie die rechtshändige Komponente, lediglich komplex konjugiert und mit der Spinormetrik transformiert:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \epsilon \bar{\xi}^* \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{\xi}^{\dot{\beta}})^* \epsilon_{\beta\alpha} \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

Der Majorana-Spinor ist zu seinem komplex Konjugierten mittels einer konstanten Matrix proportional, nämlich

$$\Psi_M^* = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \\ \epsilon^{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\beta \\ \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \\ \epsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}^* \tag{5.24}$$

Diese Matrix entsteht z.B. durch Multiplikation der Ladungskonjugationsmatrix von links mit γ^0:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} = \gamma^0 C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix}; \tag{5.25}$$

man hat damit

$$\Psi_M^* = \gamma^0 C \Psi \tag{5.26}$$

Zur weiteren mathematischen Beleuchtung dieser Konstruktion s. z.B. [24]. Durch Transponieren der Gleichung (5.26) gelangt man zu der Identität

$$\overline{\Psi}_M \equiv \Psi_M^\dagger \gamma^0 = -\Psi_M^T C \tag{5.27}$$

Führt man noch die antisymmetrische Matrix

$$\mathrm{e} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

ein, kann man durch Multiplikation mit γ^5 die benötigte negative Ladungskonjugationsmatrix bauen:

$$-C = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}\gamma^5 \tag{5.29}$$

Von nun an bezeichnen wir in Anlehnung an die Superraum-Koordinaten die Majorana-Spinoren in diesem Abschnitt mit θ. Als erstes untersuchen wir die Symmetrien der bilinearen Ausdrücke von Majorana-Spinoren.

$$\begin{aligned} \overline{\theta}_1 \Gamma \theta_2 = & \left(\overline{\theta}_1 \Gamma \theta_2\right)^T = -(\theta_1^T C \Gamma \theta_2)^T = -(\theta_2^T \Gamma^T C \theta_1) \\ = & \ \overline{\theta}_2 C^{-1} \Gamma^T C \theta_1 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Am dritten Gleichheitszeichen entstehen zwei Minuszeichen, eines durch die Antikommutativität der Spinorkomponenten, das andere aufgrund der Antisymmetrie der Ladungskonjugationsmatrix. Verwendet man jetzt die im Anhang diskutierten Gleichungen

$$\Gamma^T = \begin{cases} +C\Gamma C^{-1} & \Gamma = 1, \gamma^5\gamma^\mu, \gamma^5 \\ -C\Gamma C^{-1} & \Gamma = \gamma^\mu, [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \end{cases} , \tag{5.31}$$

dann ergibt sich

$$\overline{\theta}_1 \Gamma \theta_2 = \begin{cases} +\overline{\theta}_2 \Gamma \theta_1 & \Gamma = 1, \gamma^5\gamma^\mu, \gamma^5 \\ -\overline{\theta}_2 \Gamma \theta_1 & \Gamma = \gamma^\mu, [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \end{cases} \tag{5.32}$$

Daraus folgt sofort, daß die einzigen Bilinearen, die mit einem Majorana-Spinor θ gebildet werden können,

$$\overline{\theta}\theta, \qquad \overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta, \qquad \overline{\theta}\gamma^5\theta \tag{5.33}$$

sind, da die anderen beiden Kombinationen verschwinden:

$$\overline{\theta}\gamma^\mu\theta = \overline{\theta}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\,\theta = 0. \tag{5.34}$$

Will man ein dyadisches Produkt zweier Majorana-Spinoren untersuchen, entwickeln wir die entstehende 4×4-Matrix in eine Linearkombination der 16 Gamma-Matrizen

$$\begin{aligned}\theta\overline{\theta} &= C_S(\overline{\theta}\theta) + C_V\gamma_\mu(\overline{\theta}\gamma^\mu\theta) + C_T\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\,(\overline{\theta}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\,\theta) \\ &\quad + C_A\gamma_5\gamma_\mu(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta) + C_P\gamma_5(\overline{\theta}\gamma^5\theta),\end{aligned} \tag{5.35}$$

wobei die Form der Koeffizienten durch die Forderung nach Lorentz-Invarianz bestimmt ist (man denke sich die Matrix $\theta\overline{\theta}$ zwischen zwei Spinoren, was einen Skalar ergäbe, so daß das Transformationsverhalten der Koeffizienten festliegt, und die $C_i, i = S, V, T, A, P$ nur noch Lorentz-Skalare sein können). Nach (5.34) darf man $C_V = C_T = 0$ setzen. Durch Multiplikation beider Seiten von rechts mit $1, \gamma^5, \gamma^5\gamma^\mu$ und Spurbildung kann man durch Ausnutzen solcher Relationen wie

$$\mathrm{Tr}\,[\theta\overline{\theta}] = -(\overline{\theta}\theta),$$

wo das Minuszeichen wieder durch die Antikommutativität der Spinorkomponenten entstanden ist, die weiteren Koeffizienten zu $C_S = -1/4, C_A = 1/4, C_P = -1/4$ (beachte, daß beim Axialvektor keine Summation über μ erfolgt!) bestimmen, so daß man hat:

$$\boxed{\theta\overline{\theta} = -\frac{1}{4}(\overline{\theta}\theta) + \frac{1}{4}\gamma^5\gamma_\mu(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta) - \frac{1}{4}\gamma_5(\overline{\theta}\gamma^5\theta).} \tag{5.36}$$

Um sich von der unhandlichen Form mit dem adjungierten Spinor zu befreien, multipliziert man von rechts mit $-\mathrm{e}\gamma^5$ und erhält [1]:

$$\boxed{\theta_a\theta_b = \frac{1}{4}\,(\mathrm{e}\gamma^5)_{ab}(\overline{\theta}\theta) + \frac{1}{4}\,(\gamma_\mu\mathrm{e})_{ab}(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta) + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}_{ab}(\overline{\theta}\gamma^5\theta)} \tag{5.37}$$

Benutzt man (5.27) und (5.28), kann man dies schreiben in der Form

$$\theta_a\theta_b = \frac{1}{4}\,(\mathrm{e}\gamma^5)_{ab}(\theta^T\mathrm{e}\gamma^5\theta) + \frac{1}{4}\,(\gamma_\mu\mathrm{e})_{ab}(\theta^T\mathrm{e}\gamma^\mu\theta) + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}_{ab}(\theta^T\mathrm{e}\theta) \tag{5.38}$$

Nachdem nun das Produkt zweier Komponenten von (antikommutierenden) Majorana-Spinoren feststeht, wenden wir uns dem Produkt von drei

[1] Bis zum Ende dieses Abschnitts werden Spinorkomponenten mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet, um nicht zwischen gepunkteten und ungepunkteten Indizes unterscheiden zu müssen. Dies ist hier aber auch nicht nötig und verschleierte nur die Aussage der jeweiligen Gleichungen.

Spinorkomponenten zu. Dazu unterteilen wir den Majorana-Spinor in seine rechts- und linkshändigen Anteile,

$$\theta_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\theta, \qquad \theta_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\theta, \qquad \theta = \theta_L + \theta_R. \tag{5.39}$$

Da sowohl θ_R wie θ_L je zwei unabhängige Komponenten besitzen, so daß ein dreifaches Produkt verschwinden muß:

$$\theta_{L,a}\theta_{L,b}\theta_{L,c} = \theta_{R,a}\theta_{R,b}\theta_{R,c} = 0. \tag{5.40}$$

Nutzt man dies aus, kann man ein allgemeines dreifaches Produkt von θ hinschreiben:

$$\begin{aligned}\theta_a\theta_b\theta_c = {} & \theta_{L,a}\theta_{L,b}\theta_{R,c} + \theta_{L,a}\theta_{R,b}\theta_{L,c} + \theta_{R,a}\theta_{L,b}\theta_{L,c} \\ & + \theta_{R,a}\theta_{R,b}\theta_{L,c} + \theta_{R,a}\theta_{L,b}\theta_{R,c} + \theta_{L,a}\theta_{R,b}\theta_{R,c}.\end{aligned} \tag{5.41}$$

Multipliziert man die Gleichung (5.38) für jeden Index mit $\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$, so verschwindet der mittlere Term wegen der Antikommutativität der Matrizen γ^5 und γ^μ, die beiden anderen ergeben denselben Beitrag, wenn man bedenkt, daß die Bilinearen, die auf der rechten Seite stehen, natürlich mit den Komponenten des linkshändigen Majorana-Spinors gebildet werden müssen. Man erhält

$$\theta_{L,a}\theta_{L,b} = \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}(1-\gamma^5)\right]_{ab}(\theta_L^T\mathrm{e}\theta_L) \tag{5.42}$$

Da bei Multiplikation dieses Ausdruckes mit $\theta_{R,c}$ ein entsprechender Term mit zwei bereits vorhandenen rechtshändigen Spinorkomponenten verschwindet, kann man in dem bilinearen Ausdruck in (5.42) die vollen Spinoren statt der linkshändigen verwenden, so daß man dann die Relation

$$\theta_{L,a}\theta_{L,b}\theta_{R,c} = \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}(1-\gamma^5)\right]_{ab}(\theta^T\mathrm{e}\theta)\theta_{R,c} \tag{5.43}$$

hat. In genau der gleichen Weise erhält man die Gleichung

$$\theta_{R,a}\theta_{R,b}\theta_{L,c} = \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}(1+\gamma^5)\right]_{ab}(\theta^T\mathrm{e}\theta)\theta_{L,c} \tag{5.44}$$

Addiert man die Terme mit den geeigneten Indexstellungen in (5.41) auf, dann gelangt man zu

$$\boxed{\begin{aligned}\theta_a\theta_b\theta_c = \frac{1}{4}\left(\theta^T\mathrm{e}\theta\right)\Big[& \mathrm{e}_{ab}\theta_c - (\mathrm{e}\gamma^5)_{ab}(\gamma^5\theta)_c - \mathrm{e}_{ac}\theta_b \\ & + (\mathrm{e}\gamma^5)_{ac}(\gamma^5\theta)_b + \mathrm{e}_{bc}\theta_a - (\mathrm{e}\gamma^5)_{bc}(\gamma^5\theta)_a\Big].\end{aligned}} \tag{5.45}$$

Um schließlich zum Produkt von vier Majorana-Spinorkomponenten zu gelangen, multiplizieren wir (5.45) mit θ_d, was in

$$\begin{aligned}\theta_a\theta_b\theta_c\theta_d = \frac{1}{4}\left(\theta^T \mathrm{e}\theta\right)\Big[&\mathrm{e}_{ab}\theta_c\theta_d - (\mathrm{e}\gamma^5)_{ab}(\gamma^5\theta)_c\theta_d - \mathrm{e}_{ac}\theta_b\theta_d \\ &+ (\mathrm{e}\gamma^5)_{ac}(\gamma^5\theta)_b\theta_d + \mathrm{e}_{bc}\theta_a\theta_d - (\mathrm{e}\gamma^5)_{bc}(\gamma^5\theta)_a\theta_d\Big]\end{aligned} \tag{5.46}$$

resultiert. Zur Auswertung beachte man, daß $\left(\theta^T \mathrm{e}\theta\right)$ Beiträge enthält, die nur zwei rechts- oder nur zwei linkshändige Spinorkomponenten enthalten:

$$\left(\theta^T \mathrm{e}\theta\right)\theta_c\theta_d = \left(\theta^T \mathrm{e}\theta\right)\left(\theta_{L,c}\theta_{L,d} + \theta_{R,c}\theta_{R,d}\right) \tag{5.47}$$

Man kann nun wieder Formel (5.38) für das Produkt zweier Spinoren verwenden, um die rechte Klammer weiter auszuwerten. Dabei fällt der Term mit γ^μ (bei Multiplikation mit $\left(\theta^T \mathrm{e}\theta\right)$) heraus, da dieser je eine rechts- und linkshändige Komponente enthält. Zudem gilt

$$\left(\theta^T \mathrm{e}\theta\right)\left(\theta^T \mathrm{e}\gamma^5\theta\right) = \left(\theta_L^T \mathrm{e}\theta_L\right)\left(\theta_R^T \mathrm{e}\theta_R\right) - \left(\theta_R^T \mathrm{e}\theta_R\right)\left(\theta_L^T \mathrm{e}\theta_L\right) = 0, \tag{5.48}$$

so daß nur bleibt:

$$\left(\theta^T \mathrm{e}\theta\right)\theta_c\theta_d = \frac{1}{4}\mathrm{e}_{cd}\left(\theta^T \mathrm{e}\theta\right)^2 \tag{5.49}$$

Damit haben wir den vollständigen Ausdruck für das Produkt von vier Spinorkomponenten,

$$\boxed{\begin{aligned}\theta_a\theta_b\theta_c\theta_d = \frac{1}{16}\left(\theta^T \mathrm{e}\theta\right)^2\Big[&\mathrm{e}_{ab}\mathrm{e}_{cd} - (\mathrm{e}\gamma^5)_{ab}(\mathrm{e}\gamma^5)_{cd} - \mathrm{e}_{ac}\mathrm{e}_{bd} \\ &+ (\mathrm{e}\gamma^5)_{ac}(\mathrm{e}\gamma^5)_{bd} + \mathrm{e}_{bc}\mathrm{e}_{ad} - (\mathrm{e}\gamma^5)_{bc}(\mathrm{e}\gamma^5)_{ad}\Big]\end{aligned}} \tag{5.50}$$

Produkte von fünf (antikommutierenden) Komponenten eines Majorana-Spinors verschwinden natürlich.

Weitere nützliche Identitäten gewinnt man, wenn man (5.45) mit $(\mathrm{e}\gamma^5)_{bc}$ bzw. $(\mathrm{e}\gamma^\mu)_{bc}$ kontrahiert. Daraus folgt:

$$\boxed{\theta_a\left(\overline{\theta}\theta\right) = -(\gamma^5\theta)_a\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)} \tag{5.51}$$

sowie

$$\boxed{\theta_a\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right) = -(\gamma^\mu\theta)_a\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)} \tag{5.52}$$

Aus den Gleichungen (5.51) und (5.52) lassen sich Fierz-Identitäten herleiten:

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\overline{\theta}\theta\right)^2 &= -\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)^2 \\ \left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\nu\theta\right) &= -\eta^{\mu\nu}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)^2 \end{aligned}} \tag{5.53}$$

Schließlich kann man noch Gleichung (5.49) in eine vernünftige Form bringen:

$$\boxed{\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\theta\overline{\theta} = -\frac{1}{4}\gamma^5\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)^2} \tag{5.54}$$

Für die Untersuchung rechts- und links-chiraler Superfelder benötigt man das Verhalten von Bilinearen, die mit Majorana-Spinoren gebildet sind, unter der Operation des komplex Konjugierens. Man bedenke, daß bei der komplexen Konjugation eines Produktes von Grassmann-Zahlen die Reihenfolge geändert werden muß! Es ergibt sich unter Verwendung der Reellitätseigenschaften von Majorana-Spinoren

$$\left(\overline{\theta}_1\Gamma\theta_2\right)^* = -\left(\theta_1^\dagger \mathrm{e}\gamma^5\Gamma^*\theta_2^*\right) = \left(\overline{\theta}_1\gamma^0 C\Gamma^*\gamma^0 C\theta_2\right).$$

Verwendet man an dieser Stelle die Resultate aus dem Anhang über die Eigenschaften der Gamma-Matrizen,

$$\gamma^0 C\Gamma^*\gamma^0 C = -\gamma^2\Gamma^*\gamma^2 = \begin{cases} +\Gamma & \Gamma = 1, \gamma^\mu\gamma^5, [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\ -\Gamma & \Gamma = \gamma^\mu, \gamma^5 \end{cases}, \tag{5.55}$$

erhält man

$$\left(\overline{\theta}_1\Gamma\theta_2\right)^* = \begin{cases} +\left(\overline{\theta}_1\Gamma\theta_2\right) & \Gamma = 1, \gamma^\mu\gamma^5, [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\ -\left(\overline{\theta}_1\Gamma\theta_2\right) & \Gamma = \gamma^\mu, \gamma^5 \end{cases}. \tag{5.56}$$

5.3.5 Wirkung der Poincaré-Supergruppe

Kehren wir nun zu den Poincaré-Supertransformationen zurück, um die explizite Darstellung der Superladungen auf dem Superraum zu finden. Dazu betrachten wir Elemente der Poincaré-Supergruppe, für die die infinitesimalen Rotations- und Boostparameter Null sind, $\omega_{\mu\nu} \equiv 0$. In diesem Fall können wir ohne große Rechnungen einen Ausdruck für das Multiplikationsgesetz der Poincaré-Supergruppe angeben. Wir betrachten also:

$$S(b_1, 0, \alpha_1, \bar{\alpha}_1) \cdot S(b_2, 0, \alpha_2, \bar{\alpha}_2) \tag{5.57}$$

Die Superladungen kommutieren mit den Impulsoperatoren, die Superladungen (wegen der Multiplikation mit den Grassmann-wertigen Spinoren α_i und $\bar{\alpha}_i$) kommutieren untereinander:

$$[\alpha_1 Q, \alpha_2 Q] = [\bar{\alpha}_1\bar{Q}, \bar{\alpha}_2\bar{Q}] = 0, \tag{5.58}$$

die einzig nichtverschwindenden Kommutatoren sind:

$$-[\alpha_1 Q, \bar{\alpha}_2 \bar{Q}] - [\bar{\alpha}_1 \bar{Q}, \alpha_2 Q] = 2(\alpha_2 \sigma^\mu \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 \sigma^\mu \bar{\alpha}_2) P_\mu \tag{5.59}$$

Damit sind alle zweiten Kommutatoren Null. Mittels der bekannten Operatoridentität

$$e^A + e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \tag{5.60}$$

ergibt das folgende Multiplikationsgesetz:

$$\begin{aligned} S(b_1^\mu, 0, \alpha_1, \bar{\alpha}_1) \cdot S(b_2^\mu, 0, \alpha_2, \bar{\alpha}_2) &= \\ & S\big(b_1^\mu + b_2^\mu - \mathrm{i}(\alpha_1 \sigma^\mu \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 \sigma^\mu \bar{\alpha}_1), 0, \alpha_1 + \alpha_2, \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2\big). \end{aligned} \tag{5.61}$$

Eine Translation der fermionischen Superraum-Koordinaten bewirkt also zusätzlich eine Translation im gewöhnlichen Minkowski-Raum.

Wir wollen nun eine Transformation einer Superfunktion, d.h. einer auf dem Superraum definierten Funktion durchführen in der Gestalt:

$$\Phi(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow \Phi(x^\mu + \xi^\mu, \theta + \alpha, \bar{\theta} + \bar{\alpha}) \tag{5.62}$$

Dabei haben wir zu berücksichtigen, daß gemäß (5.61) sich die Koordinaten der Superfunktion in der gleichen Weise transformieren wie bei einer Hintereinanderausführung zweier Transformationen. Mit der Definition

$$\xi^\mu \equiv b^\mu - \mathrm{i}\alpha\sigma^\mu\bar{\theta} + \mathrm{i}\theta\sigma^\mu\bar{\alpha} = b^\mu - \mathrm{i}\alpha\sigma^\mu\bar{\theta} - \mathrm{i}\bar{\alpha}\bar{\sigma}^\mu\theta \tag{5.63}$$

Entwickelt man nun die Transformation (5.62) nach Taylor und berücksichtigt die Definition von ξ (5.63), dann kann man schreiben:

$$\begin{aligned} &\Phi(x'^\mu, \theta', \bar{\theta}') \\ &\quad = \Phi + \xi^\mu \partial_\mu \Phi + \alpha^\beta \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\Phi + \bar{\alpha}^{\dot{\beta}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}}\Phi \bigg|_{(x^\mu,\theta,\bar{\theta})} + \text{ höhere Ordnungen} \\ &\quad = \left(1 + b^\mu\partial_\mu + \alpha^\beta\Big(\frac{\partial}{\partial\theta^\beta} - \mathrm{i}(\sigma^\mu\bar{\theta})_\beta\partial_\mu\Big) + \bar{\alpha}^{\dot{\beta}}\Big(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}} - \mathrm{i}(\theta\sigma^\mu)_{\dot{\beta}}\partial_\mu\Big) + \ldots\right)\Phi \\ &\quad = \exp\Big[\mathrm{i}\left(b^\mu P_\mu + (\alpha Q) + (\bar{\alpha}\bar{Q})\right)\Big]\,\Phi \end{aligned} \tag{5.64}$$

Hieraus kann man jetzt unter Berücksichtigung der Indexstellungen in den Summationskonventionen die Darstellung der Superladungen auf dem Superraum ablesen:

$$\boxed{Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - \mathrm{i}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \qquad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + \mathrm{i}\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu} \tag{5.65}$$

Man prüft leicht nach, daß diese die jeweiligen Relationen der Super-Poincaré-Algebra erfüllen. Daß die Antikommutatoren der Superladungen mit sich selber verschwinden, ist direkt ersichtlich, der gemischte Antikommutator ist:

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha}\} &= \left\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - \mathrm{i}\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\partial_\mu, -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + \mathrm{i}\theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu\right\} \\ &= \mathrm{i}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu\right\} + \mathrm{i}\left\{\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\partial_\mu, \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}\right\} \\ &= \mathrm{i}\delta^\beta_\alpha\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu + \mathrm{i}\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha} \\ &= 2\mathrm{i}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}P_\mu \end{aligned} \tag{5.66}$$

Es ist möglich, die Superladungen in einem Bispinor zusammenzufassen, der dann so aussieht:

$$Q \equiv \begin{pmatrix} Q_\alpha \\ \bar{Q}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \tag{5.67}$$

Er wird auch mit Q bezeichnet, Verwechslungen sind aber nicht zu befürchten. Der adjungierte Bispinor ist dann:

$$\overline{Q} = Q^\dagger\gamma^0 = (Q^\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha}) \tag{5.68}$$

Man erkennt, daß der Bispinor Q ein Majorana-Spinor ist, unter Ladungskonjugation also in sich übergeht. Für die Bispinoren ergibt der Antikommutator (hier wird die Schreibweise so gewählt, wie sie die Bildung des Antikommutators komponentenweise verlangt und nicht gemäß der Tatsache, daß ein Bispinor ein Spaltenspinor, der adjungierte Spinor aber ein Zeilenspinor ist):

$$\begin{aligned}\{Q, \overline{Q}\} &= \begin{pmatrix} Q_\alpha \\ \bar{Q}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}(Q^\beta, \bar{Q}_{\dot\beta}) + \begin{pmatrix} Q^\beta \\ \bar{Q}_{\dot\beta} \end{pmatrix}(Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot\alpha}) \\ &= \begin{pmatrix} \{Q_\alpha, Q^\beta\} & \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} \\ \{\bar{Q}^{\dot\alpha}, Q^\beta\} & \{\bar{Q}^{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}P_\mu \\ 2\bar\sigma^{\mu,\dot\alpha\beta}P_\mu & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2\gamma^\mu P_\mu \end{aligned} \tag{5.69}$$

Schreibt man den Bispinor der Superladungen aus, muß man berücksichtigen, daß das Heben und Senken der Ableitungen nach den fermionischen Koordinaten ein zusätzliches Vorzeichen bringt, (5.14):

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - \mathrm{i}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}} - \mathrm{i}\bar\sigma^{\mu,\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\partial_\mu \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}} - (\mathrm{i}\gamma^\mu\theta)\partial_\mu} \tag{5.70}$$

5.4 Die Superableitungen

Die *Superableitungen* sind definiert durch

$$\boxed{\mathrm{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \mathrm{i}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\,\partial_\mu, \qquad \bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - \mathrm{i}\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu} \tag{5.71}$$

Der besseren Analogie wegen kann man auch folgendermaßen definieren:

$$\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - \mathrm{i}\bar\sigma^\mu_{\dot\alpha\alpha}\theta^\alpha\,\partial_\mu \tag{5.72}$$

Diese Superableitungen antikommutieren miteinander, da sie keinerlei Abhängigkeit von den Raumzeit-Koordinaten besitzen sowie die Superraum-Koordinaten, nach denen im ersten Term abgeleitet wird verschieden von denen im zweiten Term vorkommenden sind.

$$\boxed{\{\mathrm{D}_\alpha, \mathrm{D}_\beta\} = 0, \qquad \{\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}, \bar{\mathrm{D}}_{\dot\beta}\} = 0} \tag{5.73}$$

Die gemischten Antikommutatoren verschwinden nicht:

$$\begin{aligned}
\{\mathrm{D}_\alpha, \bar{\mathrm{D}}_{\dot\beta}\} = &-\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}\right\} + \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\sigma^\nu_{\beta\dot\beta}\partial_\mu\partial_\nu\{\bar\theta^{\dot\alpha}, \theta^\beta\} \\
&+ \mathrm{i}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu\left(-\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}\right) - \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\beta}}\right)\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu \\
&- \mathrm{i}\theta^\beta\sigma^\nu_{\beta\dot\beta}\partial_\nu\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta\sigma^\nu_{\beta\dot\beta}\partial_\nu \\
&= 0 + 0 - \mathrm{i}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu - \mathrm{i}\delta^\beta_\alpha\sigma^\nu_{\beta\dot\beta}\partial_\nu \qquad \Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{\{\mathrm{D}_\alpha, \bar{\mathrm{D}}_{\dot\beta}\} = -2\mathrm{i}\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu} \tag{5.74}$$

Zieht man den Index den komplex konjugierten Superableitung (unter Beachtung von (5.13b)) nach oben und ersetzt σ^μ durch $\bar\sigma^\mu$, versteht man die Vorzeichenkonvention:

$$\bar{\mathrm{D}}^{\dot\alpha} = \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar{\mathrm{D}}_{\dot\beta} = \frac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}} + \mathrm{i}(\bar\sigma^\mu\theta)^{\dot\alpha}\partial_\mu$$

Die Superableitungen haben allesamt verschwindende Antikommutatoren mit den Superladungen:

$$\{\mathrm{D}, Q\} = \{\bar{\mathrm{D}}, \bar Q\} = \{\mathrm{D}, \bar Q\} = \{\bar{\mathrm{D}}, Q\} = 0 \tag{5.75}$$

Die ersten beiden Gleichungen sind klar, da dort nur Ableitungen nach gequerten und ungequerte Superraumkoordinaten auftreten, oder umgekehrt. Für die letzten beiden Relationen rechnet man einfach nach:

$$\begin{aligned}\left\{\mathrm{D}_\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha}\right\} &= \left\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \mathrm{i}\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\,\partial_\mu, -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + \mathrm{i}\theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu\right\} \\ &= \left\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \theta^\beta\right\}\cdot \mathrm{i}\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu - \mathrm{i}\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\left\{\bar\theta^{\dot\beta}, \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}\right\} \\ &= \mathrm{i}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu - \mathrm{i}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu = 0. \end{aligned} \tag{5.76}$$

Analog verläuft die zweite Rechnung.

Auch die Superableitungen lassen sich als Bispinor schreiben:

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix}\mathrm{D}_\alpha \\ \bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}\end{pmatrix}, \qquad \overline{\mathrm{D}} = \mathrm{D}^\dagger\gamma^0 = (\mathrm{D}^\alpha, \bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}) \tag{5.77}$$

Man hat dann analog zu (5.70)

$$\boxed{\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \mathrm{i}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}} + \mathrm{i}\bar\sigma^{\mu,\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\partial_\mu \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}} + (\mathrm{i}\gamma^\mu\theta)\partial_\mu} \tag{5.78}$$

Diese Schreibweise eignet sich zur Einführung der rechts- und linkshändigen Komponenten des Operators der Superableitung:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{D}_L &= \frac{1}{2}\left(1-\gamma^5\right)\mathrm{D} = \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_L} - (\mathrm{i}\gamma^\mu\theta_R)\partial_\mu \\ \mathrm{D}_R &= \frac{1}{2}\left(1+\gamma^5\right)\mathrm{D} = \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_R} - (\mathrm{i}\gamma^\mu\theta_L)\partial_\mu\end{aligned}} \tag{5.79}$$

5.5 Darstellungen der Supersymmetrie-Algebra

Als irreduzible Darstellungen der Super-Poincaré-Algebra treten sogenannte Supermultipletts auf, die die Darstellungen der Poincaré-Algebra verallgemeinern. Das Besondere an diesen Darstellungen ist, daß diese jetzt Teilchen verschiedenen Spins enthalten. Allerdings ist die Zahl der bosonischen und fermionischen Zustände in einem Supermultiplett stets gleich, wie sich durch Einführung des sogenannten Witten-Index

$$I_W = (-1)^{N_F} \tag{5.80}$$

mit Hilfe desFermionzahl-Operators N_F leicht zeigen läßt: Sind $|B\rangle$ und $|F\rangle$ beliebige bosonische bzw. fermionische Zustände, dann gilt

$$I_W\,|B\rangle = +\,|B\rangle\,, \qquad I_W\,|F\rangle = -\,|F\rangle\,. \tag{5.81}$$

Da die Superladungen die Statistik eines Zustandes ändern, hat man die Identität:

$$I_W Q^i_\alpha = -Q^i_\alpha I_W \tag{5.82}$$

Nun kann man aber leicht folgende Rechnung durchführen:

$$\mathrm{Tr}\,\left[I_W\{Q^i_\alpha, \bar{Q}^j_{\dot\beta}\}\right] = \mathrm{Tr}\,\left[-Q^i_\alpha I_W \bar{Q}^j_{\dot\beta} + Q^i_\alpha I_W \bar{Q}^j_{\dot\beta}\right] = 0. \tag{5.83}$$

Hierbei wurde die zyklische Invarianz der Spur sowie (5.82) benutzt; man darf nur endliche Darstellungen der Super-Poincaré-Algebra verwenden, so daß die Spur wohldefiniert ist. Verwendet man jetzt die SUSY-Algebra (5.3), gelangt man zu

$$2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\delta_{ij}\mathrm{Tr}[I_W P_\mu] = 0. \tag{5.84}$$

Da diese Gleichung für beliebige Impulse gelten muß, darf man einen Impuls fest wählen und erhält dann die gewünschte Beziehung der gleichen Zahl fermionischer und bosonischer Zustände in einem Supermultiplett:

$$\mathrm{Tr} I_W = \mathrm{Tr}(-1)^{N_F} = 0. \tag{5.85}$$

5.5.1 Der Superspin

5.6 Allgemeine Superfelder

Die Erweiterung der Quantenfeldtheorie auf supersymmetrische Theorien erfordert einen Apparat, mit dem Supersymmetrie-Transformationen so übersichtlich wie möglich beschrieben werden können, und entschieden werden kann, wie man aus Superfeldern durch Multiplikation, Addition usw. Terme gewinnen kann, die invariant unter Supersymmetrie-Transformationen sind. Die Superladungen sind die Generatoren der Supersymmetrie-Transformationen. Wir führen als infinitesimalen Transformationsparameter wie bereits im Abschnitt über den Superraum diskutiert, α als Bispinor der Gestalt

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_\beta \\ \bar\alpha^{\dot\beta} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_L \\ \alpha_R \end{pmatrix} \tag{5.86}$$

ein, wiederum mit den links- und rechtshändigen Anteilen des Bispinors wie gewohnt. Ist dieser Parameter eine reine Konstante, nicht abhängig von den

Superraumkoordinaten (wie dann in der Supergravitation), antikommutieren diese spinoriellen Parameter mit allen Superladungen. Die infinitesimale Supersymmetrie-Transformation um den Parameter α wird nun wie folgt definiert:

$$\delta_\alpha \Psi \equiv (\overline{\alpha} Q)\Psi = (\alpha Q + \bar{\alpha}\bar{Q})\Psi = (\alpha^\beta Q_\beta + \bar{\alpha}_{\dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}})\Psi \tag{5.87}$$

Dies induziert eine Operation, die mit der Leibniz-Regel ausgestattet ist, d.h.:

$$\begin{aligned} \delta_\alpha (\Psi_1 \Psi_2) = &\ (\delta_\alpha \Psi_1)\Psi_2 + \Psi_1 (\delta_\alpha \Psi_2) \\ = &\ [(\overline{\alpha} Q)\Psi_1]\Psi_2 + \Psi_1 [(\overline{\alpha} Q)\Psi_2] = (\overline{\alpha} Q)\Psi_1 \Psi_2. \end{aligned} \tag{5.88}$$

Diese Eigenschaft rührt daher, daß der Operator $(\overline{\alpha} Q)$ selber bosonisch ist, d.h. für die „gewöhnlichen“ Ableitung ∂_μ nach den Raumzeit-Koordinaten gilt die Leibniz-Regel, es wird sonst nur mit der c-Zahl $(\overline{\alpha}\gamma^\mu\theta)$ kontrahiert; für die Ableitung nach den fermionischen Koordinaten wird die Anti-Leibniz-Regel durch die Kontraktion mit dem antikommutierenden Spinor α ebenfalls zu einer Leibniz-Regel. Die Leibniz-Regel hat nun die Konsequenz, daß sich das Produkt zweier Superfelder in identischer Weise transformiert wie ein einzelnes Superfeld. Da Superfelder definiert sind über ihre Eigenschaften unter Supersymmetrie-Transformationen, ist damit das Produkt zweier Superfelder wieder ein Superfeld. Ebenso sind Linearkombinationen von Superfeldern, reine Raumzeit-Ableitungen von Superfeldern und komplex konjugierte Superfelder wieder Superfelder. Was aber ist bei Änderung des Gehaltes der fermionischen Superraum-Koordinaten eines Superfeldes durch Differentiation nach diesen oder Multiplikation mit θ (bzw. allgemeiner Funktionen von diesem)? Dieses Problem wird unten diskutiert.

Das allgemeinste Superfeld als eine Funktion der Superraum-Koordinaten (x^μ, θ) kann eine Potenzreihe höchstens vierter Ordnung in den fermionischen Superraum-Koordinaten sein. Welche Terme können vorkommen? In dem Abschnitt (5.3.4) über die Eigenschaften von Majorana-Spinoren hatten wir gezeigt, daß ein beliebiges Produkt zweier fermionischer Superraum-Koordinaten sich stets darstellen läßt mittels der Bildungen $(\overline{\theta}\theta)$, $(\overline{\theta}\gamma^\mu\gamma^5\theta)$ und $(\overline{\theta}\gamma^5\theta)$, ein Produkt von drei Koordinaten als $(\overline{\theta}\gamma^5\theta)\theta$ sowie eines von vieren als $(\overline{\theta}\gamma^5\theta)^2$. Wir schreiben hier das allgemeine Superfeld in seiner Komponentenentwicklung nach fermionischen Superraum-Koordinaten in zweikomponentiger wie auch in vierkomponentiger Form auf. Die zweikomponentige Schreibweise mag für explizite Rechnungen angenehmer sein, die vierkomponentige ist kompakter und übersichtlicher und mit einer gewiissen Übung ebenfalls für Umformungen zu verwenden. Das allgemeine Superfeld nimmt damit die folgende Gestalt an:

$$\boxed{\begin{aligned}\Psi(x,\theta) = {} & C(x) - \mathrm{i}\left(\overline{\theta}\gamma^5\omega(x)\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)M(x) - \frac{1}{2}\left(\overline{\theta}\theta\right)N(x) \\ & - \frac{1}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)V_\mu(x) - \mathrm{i}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(\overline{\theta}\left[\lambda(x) + \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\!\!\!/\omega(x)\right]\right) \\ & - \frac{1}{4}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)^2\left(D(x) - \frac{1}{2}\Box C(x)\right) \\ = {} & C(x) + \mathrm{i}\theta\omega_L(x) - \mathrm{i}\bar{\theta}\bar{\omega}_R(x) + \mathrm{i}(\theta\theta)A(x) - \mathrm{i}(\bar{\theta}\bar{\theta})B(x) \\ & + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(x) + \mathrm{i}(\theta\theta)\left(\bar{\theta}\left[\bar{\lambda}_R(x) + \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\omega_L(x)\right]\right) \\ & - \mathrm{i}(\bar{\theta}\bar{\theta})\left(\theta\left[\lambda_L(x) + \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\omega}_R(x)\right]\right) + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\left(D(x) - \frac{1}{2}\Box C(x)\right)\end{aligned}} \tag{5.89}$$

In dem zweiten Ausdruck sind folgende Umdefinitionen der Felder vorgenommen worden:

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \begin{pmatrix}\omega_{L,\alpha}(x)\\ \bar{\omega}_R^{\dot{\alpha}}(x)\end{pmatrix}, \\ A(x) &= \frac{1}{2}\left(M(x) + \mathrm{i}N(x)\right), \\ B(x) &= \frac{1}{2}\left(M(x) - \mathrm{i}N(x)\right) \\ \lambda(x) &= \begin{pmatrix}\lambda_{L,\alpha}(x)\\ \bar{\lambda}_R^{\dot{\alpha}}(x)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

Natürlich muß das allgemeine Superfeld (5.89) nicht reell, sondern kann komplex sein. Ist es aber reell, so sind die Felder $C(x), M(x), N(x)$ und $D(x)$ skalare oder pseudoskalare Felder, und die beiden Spinorfelder $\omega(x)$ und $\lambda(x)$ vom Majorana-Typ, $V^\mu(x)$ ein reelles Vektorfeld. Da wir später die Invarianz dieses Superfeldes unter Supersymmetrie-Transformationen nachweisen wollen, wurden zur Vereinfachung einer solchen Rechnung die Terme $1/2\partial\!\!\!/\omega(x)$ und $\Box C(x)$ eingefügt.

Eine für die Herleitung der Supersymmetrie-Transformation der Superfeld-Komponenten wichtige Relation erhält man, wenn man bedenkt, daß $\overline{\theta'}\Gamma\theta'' = \overline{\theta''}\Gamma\theta'$ für die Matrizen $\Gamma = 1, \gamma^5, \gamma^5\gamma^\mu$, nämlich die gewohnte Ableitungsregel:

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}\left(\overline{\theta}\Gamma\theta\right) = 2\Gamma\theta. \tag{5.90}$$

Benutzt man für die Supersymmetrie-Transformation (5.87) die Darstellung der Superladungen auf dem Superraum, (**??**), schreibt sich die Transformation

$$\delta_\alpha \Psi = \left(\overline{\alpha} \frac{\partial}{\partial \overline{\theta}} \Psi \right) - \mathrm{i} \left(\overline{\alpha} \gamma^\mu \theta \right) \partial_\mu \Psi. \tag{5.91}$$

Man kann sofort einen geschlossenen Ausdruck für die SUSY-Transformation hinschreiben,

$$\begin{aligned}
\delta_\alpha \Psi = & - \mathrm{i} \left(\overline{\alpha} \gamma^\mu \theta \right) \partial_\mu C - \mathrm{i} \left(\overline{\alpha} \gamma^5 \omega \right) - \left(\overline{\alpha} \gamma^\mu \theta \right) \left(\overline{\theta} \gamma^5 \partial_\mu \omega \right) - \mathrm{i} \left(\overline{\alpha} \gamma^5 \theta \right) M \\
& - \frac{1}{2} \left(\overline{\theta} \gamma^5 \theta \right) \left(\overline{\alpha} \gamma^\mu \theta \right) \partial_\mu M - \left(\overline{\alpha} \theta \right) N + \frac{\mathrm{i}}{2} \left(\overline{\theta} \theta \right) \left(\overline{\alpha} \gamma^\mu \theta \right) \partial_\mu N \\
& - \left(\overline{\alpha} \gamma^5 \gamma^\mu \theta \right) V_\mu + \frac{\mathrm{i}}{2} \left(\overline{\theta} \gamma^5 \gamma^\mu \theta \right) \left(\overline{\alpha} \gamma^\nu \theta \right) \partial_\nu V_\mu - 2\mathrm{i} \left(\overline{\alpha} \gamma^5 \theta \right) \left(\overline{\theta} \left[\lambda + \frac{\mathrm{i}}{2} \partial\!\!\!/ \omega \right] \right) \\
& - \mathrm{i} \left(\overline{\theta} \gamma^5 \theta \right) \left(\overline{\alpha} \left[\lambda + \frac{\mathrm{i}}{2} \partial\!\!\!/ \omega \right] \right) - \left(\overline{\theta} \gamma^5 \theta \right) \left(\overline{\alpha} \gamma^\mu \theta \right) \left(\overline{\theta} \partial_\mu \left[\lambda + \frac{\mathrm{i}}{2} \partial\!\!\!/ \omega \right] \right) \\
& - \left(\overline{\theta} \gamma^5 \theta \right) \left(\overline{\alpha} \gamma^5 \theta \right) \left[D - \frac{1}{2} \Box C \right]
\end{aligned} \tag{5.92}$$

Um jetzt die SUSY-Transformationen der einzelnen Komponentenfelder extrahieren zu können, muß man den Ausdruck (5.92) so umbauen, daß er wieder dieselbe Struktur aufweist wie das ursprüngliche Superfeld, (5.89). Dazu benutzen wir die Formeln aus Abschnitt 5.3.4. Hier die Rechnungen im einzelnen:

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\alpha} \gamma^\mu \theta \right) \left(\overline{\theta} \gamma^5 \partial_\mu \omega \right) = & -\frac{1}{4} \left(\overline{\theta} \theta \right) \left(\overline{\alpha} \partial\!\!\!/ \gamma^5 \omega \right) - \frac{1}{4} \left(\overline{\theta} \gamma^5 \gamma^\nu \theta \right) \left(\overline{\alpha} \partial\!\!\!/ \gamma_\nu \omega \right) \\
& - \frac{1}{4} \left(\overline{\theta} \gamma^5 \theta \right) \left(\overline{\alpha} \partial\!\!\!/ \omega \right)
\end{aligned} \tag{5.93}$$

$$\left(\overline{\alpha} \gamma^\mu \theta \right) \left(\overline{\theta} \theta \right) = - \left(\overline{\alpha} \gamma^\mu \gamma^5 \theta \right) \left(\overline{\theta} \gamma^5 \theta \right) \tag{5.94}$$

$$\left(\overline{\alpha} \gamma^\mu \theta \right) \left(\overline{\theta} \gamma^5 \gamma^\nu \theta \right) = - \left(\overline{\alpha} \gamma^\mu \gamma^\nu \theta \right) \left(\overline{\theta} \gamma^5 \theta \right) \tag{5.95}$$

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\alpha} \gamma^5 \theta \right) \left(\overline{\theta} \left[\lambda + \frac{\mathrm{i}}{2} \partial\!\!\!/ \omega \right] \right) = & -\frac{1}{4} \left(\overline{\theta} \theta \right) \left(\overline{\alpha} \gamma^5 \left[\lambda + \frac{\mathrm{i}}{2} \partial\!\!\!/ \omega \right] \right) \\
& + \frac{1}{4} \left(\overline{\theta} \gamma^5 \gamma^\mu \theta \right) \left(\overline{\alpha} \gamma_\mu \left[\lambda + \frac{\mathrm{i}}{2} \partial\!\!\!/ \omega \right] \right) \\
& - \frac{1}{4} \left(\overline{\theta} \gamma^5 \theta \right) \left(\overline{\alpha} \left[\lambda + \frac{\mathrm{i}}{2} \partial\!\!\!/ \omega \right] \right)
\end{aligned} \tag{5.96}$$

$$\left(\overline{\theta} \gamma^5 \theta \right) \left(\overline{\alpha} \gamma^\mu \theta \right) \left(\overline{\theta} \partial_\mu \left[\lambda + \frac{\mathrm{i}}{2} \partial\!\!\!/ \omega \right] \right) = -\frac{1}{4} \left(\overline{\theta} \gamma^5 \theta \right)^2 \left(\overline{\alpha} \partial\!\!\!/ \gamma^5 \left[\lambda + \frac{\mathrm{i}}{2} \partial\!\!\!/ \omega \right] \right) \tag{5.97}$$

Setzt man all diese Umformungen in (5.92) ein und benutzt (5.32), hat man

$$\delta_\alpha \Psi = - \mathrm{i} \left(\overline{\alpha} \gamma^5 \omega \right) + \left(\overline{\theta} \left[\mathrm{i} \partial\!\!\!/ C - \mathrm{i} \gamma^5 M - N - \gamma^5 V\!\!\!/ \right] \alpha \right) + \frac{\mathrm{i}}{2} \left(\overline{\theta} \theta \right) \left(\overline{\alpha} \gamma^5 \left[\lambda + \mathrm{i} \partial\!\!\!/ \omega \right] \right)$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{\mathrm{i}}{2} \left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right) \left(\overline{\alpha}\left[\lambda + \mathrm{i}\partial\!\!\!/\omega\right]\right) - \frac{\mathrm{i}}{2} \left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right) \left(\overline{\alpha}\gamma_\mu\lambda\right) + \frac{1}{2} \left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\nu\theta\right) \left(\overline{\alpha}\partial_\nu\omega\right) \\
&- \frac{\mathrm{i}}{2} \left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right) \left(\overline{\theta}\left[\mathrm{i}\partial\!\!\!/ M - \gamma^5\partial\!\!\!/ N + \partial_\mu V\!\!\!/\gamma^\mu - 2\mathrm{i}\gamma^5\left(D - \frac{1}{2}\Box C\right)\right]\alpha\right) \\
&- \frac{1}{4} \left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)^2 \left(\overline{\alpha}\gamma^5\left[\partial\!\!\!/\lambda + \frac{\mathrm{i}}{2}\Box\,\omega\right]\right) \qquad (5.98)
\end{aligned}
$$

In dem Term mit V_μ in der vorletzten Zeile ist dabei der Vorzeichenwechsel beim Herumdrehen des Spinorausdruckes gemäß (5.32) für den antisymmetrischen Tensor durch Vertauschen der beiden Gamma-Matrizen $\gamma^\mu\gamma^\nu \to \gamma^\nu\gamma^\mu$ aufgefangen worden. Ein Vergleich Ordnung für Ordnung in θ führt zu folgenden Transformationsgesetzen für die Komponentenfelder:

$$\delta_\alpha C = -\mathrm{i}\left(\overline{\alpha}\gamma^5\omega\right) \qquad (5.99)$$

$$\delta_\alpha\omega = \left(-\gamma^5\partial\!\!\!/ C + M - \mathrm{i}\gamma^5 N - \mathrm{i}V\!\!\!/\right)\alpha \qquad (5.100)$$

$$\delta_\alpha M = \left(\overline{\alpha}\left[\lambda + \mathrm{i}\partial\!\!\!/\omega\right]\right) \qquad (5.101)$$

$$\delta_\alpha N = \mathrm{i}\left(\overline{\alpha}\gamma^5\left[\lambda + \mathrm{i}\partial\!\!\!/\omega\right]\right) \qquad (5.102)$$

$$\delta_\alpha V^\mu = -\left(\overline{\alpha}\partial^\mu\omega\right) + \mathrm{i}\left(\overline{\alpha}\gamma^\mu\lambda\right) \qquad (5.103)$$

$$\delta_\alpha\left(\lambda + \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\!\!\!/\omega\right) = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\partial\!\!\!/ M + \mathrm{i}\gamma^5\partial\!\!\!/ N - \mathrm{i}\partial_\mu V\!\!\!/\gamma^\mu - 2\gamma^5\left(D - \frac{1}{2}\Box C\right)\right]\alpha \qquad (5.104)$$

$$\delta_\alpha\left(D - \frac{1}{2}\Box C\right) = \left(\overline{\alpha}\gamma^5\left[\partial\!\!\!/\lambda + \frac{\mathrm{i}}{2}\Box\omega\right]\right) \qquad (5.105)$$

Setzt man die Transformationsgesetze ineinander ein erhält man die folgenden Vereinfachungen, die im nachhinein das Einfügen der beiden Ableitungsterme in die dritte und vierte Ordnung in θ rechtfertigen:

$$
\begin{aligned}
\delta_\alpha\lambda &= \delta_\alpha\left(\lambda + \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\!\!\!/\omega\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\!\!\!/\delta_\alpha\omega \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\partial\!\!\!/ M + \mathrm{i}\gamma^5\partial\!\!\!/ N - \mathrm{i}\partial_\mu V\!\!\!/\gamma^\mu - 2\gamma^5\left(D - \frac{1}{2}\Box C\right)\right]\alpha \\
&\qquad - \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\!\!\!/\left[-\gamma^5\partial\!\!\!/ C + M - \mathrm{i}\gamma^5 N - \mathrm{i}V\!\!\!/\right]\alpha \\
&= \left(\frac{1}{2}\left[\partial_\mu V\!\!\!/, \gamma^\mu\right] - \mathrm{i}\gamma^5 D\right)\alpha, \qquad (5.106)
\end{aligned}
$$

$$\delta_\alpha D = \delta_\alpha\left(D - \frac{1}{2}\Box C\right) + \frac{1}{2}\Box\delta_\alpha C$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\overline{\alpha}\gamma^5\left[\partial\!\!\!/\lambda + \frac{\mathrm{i}}{2}\Box\,\omega\right]\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\alpha}\gamma^5\Box\,\omega\right)\\
&= \left(\overline{\alpha}\gamma^5\partial\!\!\!/\lambda\right) \qquad (5.107)
\end{aligned}
$$

Nach den obigen Bemerkungen ist auch das Produkt zweier Superfelder wieder ein ein Superfeld: Wir berechnen hier explizit die Komponentenentwicklung des Produktes unter Verwendung der Formeln aus Abschnitt 5.3.4:

$$
\begin{aligned}
\Psi_1\Psi_2 =\ & C_1C_2 - \mathrm{i}\left(\overline{\theta}\gamma^5\omega_1\right)C_2 - \mathrm{i}\left(\overline{\theta}\gamma^5\omega_2\right)C_1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(M_1C_2 + M_2C_1\right)\\
& - \frac{1}{2}\left(\overline{\theta}\theta\right)\left(N_1C_2 + N_2C_1\right) - \frac{1}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)V_{1\,\mu}C_2 - \frac{1}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)V_{2\,\mu}C_1\\
& - \mathrm{i}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(\overline{\theta}\left[\lambda_1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\!\!\!/\omega_1\right]\right)C_2 - \mathrm{i}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(\overline{\theta}\left[\lambda_1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\!\!\!/\omega_2\right]\right)C_1\\
& - \frac{1}{4}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)^2\left(D_1C_2 + D_2C_1 - \frac{1}{2}\left[C_2\Box C_1 + C_1\Box C_2\right]\right)\\
& - \left(\overline{\theta}\gamma^5\omega_1\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\omega_2\right) - \frac{1}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\omega_1\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)M_2 - \frac{1}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\omega_2\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)M_1\\
& + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\omega_1\right)\left(\overline{\theta}\theta\right)N_2 + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\omega_2\right)\left(\overline{\theta}\theta\right)N_1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\omega_1\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)V_{2\,\mu}\\
& + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\omega_2\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)V_{1\,\mu} - \left(\overline{\theta}\gamma^5\omega_1\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(\overline{\theta}\left[\lambda_2 + \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\!\!\!/\omega_2\right]\right)\\
& - \left(\overline{\theta}\gamma^5\omega_2\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(\overline{\theta}\left[\lambda_2 + \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\!\!\!/\omega_1\right]\right) - \frac{1}{4}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)^2 M_1M_2\\
& + \frac{\mathrm{i}}{4}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(\overline{\theta}\theta\right)\left(M_1N_2 + M_2N_1\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)\left(M_1V_{2\,\mu} + M_2V_{1\,\mu}\right)\\
& + \frac{1}{4}\left(\overline{\theta}\theta\right)^2 N_1N_2 + \frac{1}{4}\left(\overline{\theta}\theta\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)\left(N_1V_{2\,\mu} + N_2V_{1\,\mu}\right)\\
& + \frac{1}{4}\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\nu\theta\right)V_{1\,\mu}V_{2,\nu}\\
=\ & C_1C_2 - \mathrm{i}\left(\overline{\theta}\gamma^5\left(C_2\omega_1 + C_1\omega_2\right)\right)\\
& - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(M_1C_2 + M_2C_1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\omega_1}\gamma^5\omega_2\right)\right)\\
& - \frac{1}{2}\left(\overline{\theta}\theta\right)\left(N_1C_2 + N_2C_1 - \frac{1}{2}\overline{\omega_1}\omega_2\right)\\
& - \frac{1}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)\left(V_{1\,\mu}C_2 + V_{2\,\mu}C_1 - \frac{1}{2}\left(\overline{\omega_1}\gamma^5\gamma_\mu\omega_2\right)\right)\\
& - \mathrm{i}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(\overline{\theta}\Big[\lambda_1C_2 + \lambda_2C_1 + \frac{1}{2}\left(\omega_1N_2 + \omega_2N_1\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^5\left(\omega_1M_2 + \omega_2M_1\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{2}\gamma^5 \left(\not{V}_2\omega_1 + \not{V}_1\omega_2\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(C_2\not{\partial}\omega_1 + C_1\not{\partial}\omega_2\right)\Big]\Big) \\
-\frac{1}{4}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)^2 &\Big[D_1C_2 + D_2C_1 - \frac{1}{2}\left(C_2\Box C_1 + C_1\Box C_2\right) + M_1M_2 \\
&- \overline{\omega_1}\left(\lambda_2 + \frac{\mathrm{i}}{2}\not{\partial}\omega_2\right) - \overline{\omega_2}\left(\lambda_1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\not{\partial}\omega_1\right) + N_1N_2 + V_{1\,\mu}V_2^{\mu}\Big]
\end{aligned}
\tag{5.108}
$$

Weiterhin wurde ausgenutzt, daß

$$
\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(\overline{\theta}\theta\right) = -\left[-(\theta\theta) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\right]\left[(\theta\theta) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\right] = 0,
$$

sowie

$$
\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right) = 0, \tag{5.109}
$$

$$
\left(\overline{\theta}\theta\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right) = 0. \tag{5.110}
$$

Hieraus kann man nun ablesen, wie sich die Komponentenfelder von $\Psi \equiv \Psi_1\Psi_2$ aus denjenigen von Ψ_1 und Ψ_2 zusammensetzen:

$$C = C_1C_2 \tag{5.111}$$

$$\omega = C_2\omega_1 + C_1\omega_2 \tag{5.112}$$

$$M = M_1C_2 + M_2C_1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\omega_1}\gamma^5\omega_2\right) \tag{5.113}$$

$$N = N_1C_2 + N_2C_1 - \frac{1}{2}\left(\overline{\omega_1}\omega_2\right) \tag{5.114}$$

$$V^\mu = V_1^\mu C_2 + V_2^\mu C_1 - \frac{1}{2}\left(\overline{\omega_1}\gamma^5\gamma^\mu\omega_2\right) \tag{5.115}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda = &\ \lambda_1C_2 + \lambda_2C_1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^\mu\omega_1\partial_\mu C_2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^\mu\omega_2\partial_\mu C_1 + \frac{1}{2}\gamma^5\left(\not{V}_2\omega_1 + \not{V}_1\omega_1\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(N_2 - \mathrm{i}\gamma^5M_2\right)\omega_1 + \frac{1}{2}\left(N_1 - \mathrm{i}\gamma^5M_1\right)\omega_2
\end{aligned}
\tag{5.116}
$$

$$
\begin{aligned}
D = &\ D_1C_2 + D_2C_1 + \partial_\mu C_1\partial^\mu C_2 + M_1M_2 + N_1N_2 \\
&- \left(\overline{\omega_1}\left[\lambda_2 + \frac{\mathrm{i}}{2}\not{\partial}\omega_2\right]\right) - \left(\overline{\omega_2}\left[\lambda_1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\not{\partial}\omega_1\right]\right) + V_{1\,\mu}V_2^\mu
\end{aligned}
\tag{5.117}
$$

Bereits oben wurde die Frage aufgeworfen, wie man durch Ändern der funktionellen Abhängigkeit eines Superfeldes von den fermionischen Superraum-Koordinaten θ ein weiteres Superfeld erzeugen kann. Die Antwort liegt in den Superableitungen: Da diese mit den Superladungen antikommutieren (5.75), sind die durch Anwenden der Superableitungen auf Superfelder erzeugten Gebilde wieder Superfelder. Die Superableitung erhöht oder erniedrigt den Grad der θ-Potenzen jeweils um eins. Die SUSY-Transformierte der Superableitung eines Superfeldes ist die Superableitung der SUSY-Transformierten des Feldes.

$$\delta_\alpha\left(\mathrm{D}\Psi\right)\left(\overline{\alpha}Q\right)\mathrm{D}\Psi = \mathrm{D}\left(\overline{\alpha}Q\right)\Psi = \mathrm{D}\delta_\alpha\Psi \tag{5.118}$$

5.7 Das chirale Superfeld

Ein Superfeld, welches die Bedingung

$$\mathrm{D}_R\Phi = 0 \tag{5.119}$$

erfüllt, wird *links-chirales Superfeld* genannt, entsprechend, wenn

$$\mathrm{D}_L\widehat{\Phi} = 0 \tag{5.120}$$

gilt, *rechts-chirales Superfeld*. Die einfachste Herleitung der Gestalt der chiralen Superfelder verwendet spezielle Superraum-Koordinaten (s. [5], [10]) der Form:

$$x_\pm^\mu \equiv x^\mu \pm \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right) = x^\mu \pm \mathrm{i}\left(\overline{\theta}_R\gamma^5\gamma^\mu\theta_L\right) = x^\mu \mp \mathrm{i}\left(\overline{\theta}_L\gamma^5\gamma^\mu\theta_R\right) \tag{5.121}$$

Nach Verwendung von (5.56) sieht man, daß die beiden Variablen durch komplexe Konjugation ineinander überführt werden. Man sieht direkt die Gültigkeit der Relationen

$$\boxed{\mathrm{D}_R x_+^\mu = 0}\,, \qquad \boxed{\mathrm{D}_L x_-^\mu = 0}\,. \tag{5.122}$$

Damit werden also bereits beliebige Funktionen von x_+^μ (x_-^μ) durch D_R (D_L) annihiliert, so daß man die Funktionen mit der Abhängigkeit von dieser Variablen, multipliziert mit bis zu zweiten Potenzen der Superraum-Koordinaten $\theta_{L/R}$ (diese besitzen ja nur zwei unabhängige Komponenten!) benutzen darf, um chirale Superfelder zu bilden. Es bleibt:

$$\boxed{\Phi(x,\theta) = \phi(x_+) + \sqrt{2}\left(\overline{\theta}_L\psi_L(x_+)\right) + F(x_+)\left(\overline{\theta}_L\theta_L\right)} \tag{5.123}$$

$$\boxed{\widehat{\Phi}(x,\theta) = \widehat{\phi}(x_-) + \sqrt{2}\left(\overline{\theta}_R\psi_R(x_-)\right) + \widehat{F}(x_-)\left(\overline{\theta}_R\theta_R\right)} \tag{5.124}$$

Entwickelt man nun die funktionelle Abhängigkeit von x_+^μ um x^μ, hat man zu bedenken, daß man maximal bis zur zweiten Ordnung entwickeln braucht, da bei höheren Ordnungen mehr als drei Potenzen von θ_L und θ_R aufträten.

Daraus folgt, daß man $\phi, \widehat{\phi}$ bis zur zweiten Ordnung, ψ_L, ψ_R bis zum linearen Term entwickeln muß, während zu F nur der Term nullter Ordnung beiträgt. Die Entwicklung unter Verwendung der Formeln aus Abschnitt 5.3.4 lautet dann für die Komponentenfelder:

$$\begin{aligned}
\phi(x_+^\lambda) &= \phi(x^\lambda) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)\partial_\mu\phi(x^\lambda) - \frac{1}{8}\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\nu\theta\right)\partial_\mu\partial_\nu\phi(x^\lambda) \\
&= \phi(x^\lambda) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)\partial_\mu\phi(x^\lambda) + \frac{1}{8}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)^2\Box\,\phi(x^\lambda) \qquad (5.125) \\
\widehat{\phi}(x_-^\lambda) &= \widehat{\phi}(x^\lambda) - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)\partial_\mu\widehat{\phi}(x^\lambda) + \frac{1}{8}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)^2\Box\,\widehat{\phi}(x^\lambda) \qquad (5.126) \\
\overline{\theta}\psi_L(x_+^\lambda) &= \overline{\theta}\psi_L(x^\lambda) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\partial_\mu\overline{\psi}_L(x^\lambda)\theta\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right) \\
&= \overline{\theta}\psi_L(x^\lambda) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\partial\!\!\!/\psi_L(x^\lambda)\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right) \qquad (5.127) \\
\overline{\theta}\psi_R(x_-^\lambda) &= \overline{\theta}\psi_R(x^\lambda) - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\partial\!\!\!/\psi_R(x^\lambda)\right)\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right) \qquad (5.128) \\
F(x_+^\lambda) &= F(x^\lambda) \qquad (5.129) \\
\widehat{F}(x_+^\lambda) &= \widehat{F}(x^\lambda) \qquad (5.130)
\end{aligned}$$

Die chiralen Superfelder besitzen die Gestalt

$$\boxed{\begin{aligned}
\Phi(x,\theta) &= \phi(x) + \sqrt{2}\left(\overline{\theta}\psi_L(x)\right) + \left(\overline{\theta}\left[\frac{1-\gamma^5}{2}\right]\theta\right)F(x) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)\partial_\mu\phi(x) \\
&\quad + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(\overline{\theta}\partial\!\!\!/\psi_L(x)\right) + \frac{1}{8}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)^2\Box\,\phi(x) \\[1em]
\widehat{\Phi}(x,\theta) &= \widehat{\phi}(x) + \sqrt{2}\left(\overline{\theta}\psi_R(x)\right) + \left(\overline{\theta}\left[\frac{1+\gamma^5}{2}\right]\theta\right)\widehat{F}(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)\partial_\mu\widehat{\phi}(x) \\
&\quad - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(\overline{\theta}\partial\!\!\!/\psi_R(x)\right) + \frac{1}{8}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)^2\Box\,\widehat{\phi}(x)
\end{aligned}} \qquad (5.131)$$

Zur Umrechnung in den zweikomponentigen Formalismus benutzt man:

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\theta}\psi_L(x)\right) &= \left(\theta\psi_L(x)\right) \qquad (5.132) \\
\left(\overline{\theta}_L\theta_L\right) &= (\theta\theta) \qquad (5.133) \\
\left(\overline{\theta}_R\theta_R\right) &= (\bar{\theta}\bar{\theta}) \qquad (5.134) \\
\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right) &= -\,2(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) \qquad (5.135) \\
\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)^2 &= -\,2(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) \qquad (5.136)
\end{aligned}$$

$$\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)(\not{\partial}\psi_L(x)) = -(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L(x)) \tag{5.137}$$

Damit ergibt sich in zweikomponentiger Schreibweise für die chiralen Superfelder:

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) &= \phi(x) + \sqrt{2}(\theta\psi_L(x)) + (\theta\theta)F(x) - \mathrm{i}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\phi(x)\\ &\quad - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L(x)) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\Box\,\phi(x)\\[2ex] \widehat{\Phi}(x,\theta,\bar{\theta}) &= \widehat{\phi}(x) + \sqrt{2}(\theta\psi_R(x)) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\widehat{F}(x) + \mathrm{i}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\widehat{\phi}(x)\\ &\quad + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_R(x)) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\Box\,\widehat{\phi}(x)\end{aligned}} \tag{5.138}$$

Bildet man jetzt die Linearkombination

$$\Psi(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi(x,\theta) + \widehat{\Phi}(x,\theta)\right), \tag{5.139}$$

dann liegt ein allgemeines Superfeld wie im vorhergehenden Abschnitt vor mit den Einschränkungen und Umbenennungen:

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi(x) + \widehat{\phi}(x)\right)\\ \omega(x) &= \mathrm{i}\gamma^5\psi(x)\\ M(x) &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(F(x) - \widehat{F}(x)\right)\\ N(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(F(x) + \widehat{F}(x)\right)\\ V_\mu(x) \equiv \partial_\mu Z(x) &= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\partial_\mu\left(\phi(x) - \widehat{\phi}(x)\right)\\ \lambda(x) &= D(x) = 0 \end{aligned} \tag{5.140}$$

Wir stimmen hier der Bemerkung Weinbergs ([5], S. 69) zu, daß ein chirales Feld generell als ein spezielles Superfeld anzusehen ist, welches die Bedingungen erfüllt, daß λ und D verschwinden sowie sich das Vektorfeld V_μ als totale Ableitung eines skalaren Feldes schreiben läßt. Nur diese Superfelder lassen sich als die Summe eines rechts- und eines links-chiralen Superfeldes ausdrücken. Kehren wir nun die Relationen zwischen den Komponentenfeldern der chiralen und allgemeinen Superfelder um:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(C(x) + \mathrm{i}Z(x)\right),$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(C(x) - \mathrm{i}Z(x)\right), \\
\psi_L(x) &= \mathrm{i}\omega_L(x), \\
\psi_R(x) &= -\mathrm{i}\omega_R(x), \\
F(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(N(x) + \mathrm{i}M(x)\right), \\
\widehat{F}(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(N(x) - \mathrm{i}M(x)\right)
\end{aligned} \tag{5.141}$$

Unter Benutzung der Relation aus Abschnitt 5.3.4

$$\left(\overline{\theta}\psi_{L,1}\right)\left(\overline{\theta}\psi_{L,2}\right) = \left(\overline{\psi}_{L,1}\theta_L\right)\left(\overline{\theta}_L\psi_{L,2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\overline{\theta}_L\gamma^5\theta_L\right)\left(\overline{\psi}_{L,1}\psi_{L,2}\right) \tag{5.142}$$

kann man leicht das Produkt von zwei oder drei links-chiralen Superfeldern bestimmen:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(x_+)\Phi_2(x_+) \\
&\quad = \phi_1(x_+)\phi_2(x_+) + \sqrt{2}\,\overline{\theta}_L\left[\psi_{L,1}(x_+)\phi_2(x_+) + \psi_{L,2}(x_+)\phi_1(x_+)\right] \\
&\qquad + \left(\overline{\theta}_L\gamma^5\theta_L\right)\left[F_1(x_+)\phi_2(x_+) + F_2(x_+)\phi_1(x_+) - \left(\overline{\psi}_{L,1}(x_+)\psi_{L,2}(x_+)\right)\right]
\end{aligned} \tag{5.143}$$

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(x_+)\Phi_2(x_+)\Phi_3(x_+) \\
&\quad = \phi_1(x_+)\phi_2(x_+)\phi_3(x_+) + \sqrt{2}\,\overline{\theta}_L\Big[\psi_{L,1}(x_+)\phi_2(x_+)\phi_3(x_+) \\
&\qquad\quad + \psi_{L,2}(x_+)\phi_3(x_+)\phi_1(x_+) + \psi_{L,3}(x_+)\phi_1(x_+)\phi_2(x_+)\Big] \\
&\qquad + \left(\overline{\theta}_L\gamma^5\theta\right)\Big[F_1(x_+)\phi_2(x_+)\phi_3(x_+) + F_2(x_+)\phi_3(x_+)\phi_1(x_+) \\
&\qquad\quad + F_3(x_+)\phi_1(x_+)\phi_2(x_+) - \left(\overline{\psi}_{L,1}(x_+)\psi_{L,2}(x_+)\right)\phi_3(x_+) \\
&\qquad\quad - \left(\overline{\psi}_{L,2}(x_+)\psi_{L,3}(x_+)\right)\phi_1(x_+) - \left(\overline{\psi}_{L,3}(x_+)\psi_{L,1}(x_+)\right)\phi_2(x_+)\Big]
\end{aligned} \tag{5.144}$$

Eine Funktion $\mathcal{W}$, die nur aus elementaren links-chiralen Superfeldern aufgebaut ist, weder deren adjungierte (rechts-chirale Superfelder) noch Superableitungen oder Raumzeit-Ableitungen der links-chiralen Superfelder enthält, wird *Superpotential* genannt.

5.8 Supersymmetrische Lagrangedichten

Dieser Titel ist ein Widerspruch, denn supersymmetrische Lagrangedichten existieren nicht. Der Diskussion in [5] folgend, kann man zunächst feststellen, daß aufgrund der Supersymmetrie-Algebra ein zweifaches Anwenden der SUSY-Transformation auf eine Raum-Zeit-Ableitung zurückgeführt werden kann, so daß die Invarianz der Lagrangedichte deren Konstanz nach sich ziehen würde. Der Ausweg ist, daß die Lagrangedichte nur bis auf totale Ableitungen konstant sein muß, damit die Wirkung

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L} \tag{5.145}$$

invariant bleiben (und damit natürlich die Euler-Lagrange-Gleichungen als Feldgleichungen). Inspiziert man die SUSY-Transformationen (5.99) - (5.107), sieht man, daß nur die D-Komponente als Term höchster Ordnung bei einer SUSY-Transformation in eine totale Ableitung übergeht. Soll die Wirkung ein Skalar sein, muß auch das Superfeld ein Skalar sein, und damit dessen D-Komponente. Eine Wirkung, die Lorentz- und SUSY-invariant ist, ohne Einschränkungen an die allgemeine Gestalt des Superfeldes zu stellen, besitzt deshalb die Form:

$$S = \int d^4x \Big[\Psi(x,\theta)\Big]_D = \int d^4x d^4\theta \Psi(x,\theta) \tag{5.146}$$

In der zweiten Identität erinnert man sich, daß eine Integration über die fermionischen Superraum-Variablen nur den Term mit der höchsten Potenz in θ übrigläßt. Da der C-Term als totale Ableitung keine Rolle spielt, bleibt so ebenfalls nur der D-Term übrig.

In dem D-Term eines allgemeinen Superfeldes entdeckt man aber keinerlei Terme, die den Bestandteilen feldtheoretischer Lagrnagedichter ähneln. Will man kinetische Terme konstruieren, benötigt man Terme bilinear in den Superfeldern, z.B. sieht man mit Hilfe von (5.117), daß

$$\begin{aligned}\Big[\Psi^*\Psi\Big]_D &= \partial_\mu C^* \partial^\mu C + \mathrm{i}\left(\overline{\omega}\partial\!\!\!/\omega\right) + C^*D + CD^* - (\overline{\omega}\lambda) - \left(\overline{\lambda}\omega\right) \\ &\quad + M^*M + N^*N + V_\mu^* V^{\mu *}\end{aligned} \tag{5.147}$$

Hier hat man bereits erwünschte kinetische Terme für skalare und Spinorfelder vorliegen. Die Terme, die jedoch D oder λ enthalten, sorgen bei der Prozedur der Quantisierung mittels Pfadintegralen durch die funktionale Integration über diese Felder dafür, daß die Felder C und ω aufgrund von

Delta-Funktionen verschwinden müssen gemäß der Relation

$$\int D\,[\phi]\exp\left(\mathrm{i}\int d^4x\,\phi\,\psi\right) = \delta(\psi). \tag{5.148}$$

5.9 Das Vektor-Superfeld

Das Vektorfeld ist zunächst nichts anderes als ein reelles Superfeld, dessen Komponenten Indizes der Darstellung einer Symmetrie (realisiert durch eine Lie-Algebra) tragen können. Wir übernehmen daher die Komponentenzerlegung des allgemeinen Superfeldes (**??**), mit der Bedingung, daß $C^A(x)$, $M^A(x)$, $N^A(x)$ und $V^A_\mu(x)$ reelle Felder sind, sowie $\omega^A(x)$ und $\lambda^A(x)$ Majorana-Spinorfelder. Man hat dann die Entwicklung

$$\begin{aligned} V^A(x,\theta) = {} & C^A(x) - \mathrm{i}\left(\overline{\theta}\gamma^5\omega^A(x)\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)M^A(x) - \frac{1}{2}\left(\overline{\theta}\theta\right)N^A(x) \\ & - \frac{1}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)V^A_\mu(x) - \mathrm{i}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(\overline{\theta}\left[\lambda^A(x) + \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\!\!\!/\omega^A(x)\right]\right) \\ & - \frac{1}{4}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)^2\left(D^A(x) - \frac{1}{2}\Box C^A(x)\right) \end{aligned} \tag{5.149}$$

5.10 Supersymmetrische Eichtheorien

In der Wess-Zumino-Eichung

$$C^A(x) = \omega^a(x) = M^A(x) = N^A(x) = 0 \tag{5.150}$$

nimmt das Vektor-Superfeld eine wesentlich einfachere Gestalt an:

$$\boxed{V^A(x,\theta) = \; -\frac{1}{2}\left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right)V^A_\mu(x) - \mathrm{i}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)\left(\overline{\theta}\lambda^A(x)\right) - \frac{1}{4}\left(\overline{\theta}\gamma^5\theta\right)^2 D^A(x)} \tag{5.151}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma(x,\theta) &= e^{-\sum_A T^A V^A(x,\theta)} \\ &= 1 + \left(\overline{\theta}\gamma^5\gamma^\mu\theta\right) \end{aligned}} \tag{5.152}$$

Kapitel 6

Minimales supersymmetrisches Standardmodell (MSSM)

6.1 Die Lagrangedichte

Was sind die Ingredienzen des minimalen (!) supersymmetrischen Standardmodells? Man benötigt chirale skalare Superfelder für alle Materiefelder, die es bereits im Standardmodell gibt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q_i} &= \begin{pmatrix} \mathbf{U_i} \\ \mathbf{D_i} \end{pmatrix}, && SU(2) - \text{Dublett der linkshändigen Quarks} \\
\mathbf{L_i} &= \begin{pmatrix} \mathbf{N_i} \\ \mathbf{E_i} \end{pmatrix}, && SU(2) - \text{Dublett der linkshändigen Leptonen} \\
&\bar{\mathbf{U}}_\mathbf{i} \quad , && SU(2) - \text{Singlett der linkshändigen Anti-up-Quarks} \\
&\bar{\mathbf{D}}_\mathbf{i} \quad , && SU(2) - \text{Singlett der linkshändigen Anti-down-Quarks} \\
&\bar{\mathbf{E}}_\mathbf{i} \quad , && SU(2) - \text{Singlett der linkshändigen Anti-Leptonen} \\
\mathbf{H_1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{H_1^0} \\ \mathbf{H_1^-} \end{pmatrix}, && SU(2) - \text{Dublett der Higgs mit } Y = -1 \\
\mathbf{H_2} &= \begin{pmatrix} \mathbf{H_2^+} \\ \mathbf{H_2^0} \end{pmatrix}, && SU(2) - \text{Dublett der Higgs mit } Y = +1
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Der Generationenindex i nimmt je nach Superfeld die aus dem Standardmodell bekannten Werte an. Ein wichtiger Punkt ist, daß man die linkshändigen Komponenten der Anti-Quarks und Anti-Leptonen als Singlett-Zustände der $SU(2)_L$ nimmt. Das hat seinen Grund darin, daß nur links-chirale Superfelder zur Bildung des Superpotentials zugelassen sind, man also linkshändige fermionische Felder benötigt. Nun ist die Ladungskonjugation eines links-chiralen Feldes ein rechts-chirales Feld, so daß also die fermionischen Supermultiplett-Zustände als links-chirale Felder die ladungskonjugierten Zustände der *Anti*-Quarks und *Anti*-Leptonen sein müssen. Vom Transformationsverhalten sind diese Spinoren allerdings links-chiral. Dieser Punkt wird weiter unten beim Teilchengehalt des MSSM noch einmal zur Sprache kommen. Beschreibt man das Elektronenfeld durch den Bispinor

$$\Psi_{\text{Elektron}} = \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

dann hat der Bispinor des Positronenfeldes die Gestalt

$$\Psi_{\text{Positron}} = \mathcal{C}\Psi_{\text{Elektron}}\mathcal{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \eta \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Im Vektor-Superfeld hat man die jeweiligen Anteile der gesamten Eichgruppe $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ zusammenzufassen, d.h.

$$\mathcal{V} = \mathbf{V_{U(1)_Y}} \cdot \frac{Y}{2} + \sum_{a=1}^{3} \mathbf{V_{SU(2)_L}}_a T^a + \sum_{a=1}^{8} \mathbf{V_{SU(3)_C}}_a T^a \tag{6.4}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{MSSM}} = &\sum_{i=1}^{3}\Big(\mathbf{Q_i}^\dagger \exp[\mathcal{V}]\,\mathbf{Q_i}\Big)_D + \sum_{i=1}^{3}\Big(\mathbf{L_i}^\dagger \exp[\mathcal{V}]\,\mathbf{L_i}\Big)_D \\ &+ \sum_{i=1}^{3}\Big(\mathbf{\bar{U}_i}^\dagger \exp[\mathcal{V}]\,\mathbf{\bar{U}_i}\Big)_D + \sum_{i=1}^{3}\Big(\mathbf{\bar{D}_i}^\dagger \exp[\mathcal{V}]\,\mathbf{\bar{D}_i}\Big)_D + \sum_{i=1}^{3}\Big(\mathbf{\bar{E}_i}^\dagger \exp[\mathcal{V}]\,\mathbf{\bar{E}_i}\Big)_D \\ &+ \Big(\mathbf{H_1}^\dagger \exp[\mathcal{V}]\,\mathbf{H_1}\Big)_D + \Big(\mathbf{H_2}^\dagger \exp[\mathcal{V}]\,\mathbf{H_2}\Big)_D \\ &+ \frac{1}{2}\Re\Big[\sum_{a=1}^{8}\overline{W_{R_a}}^{SU(3)_C}\,W_{L,a}^{SU(3)_C}\Big]_F + \frac{1}{2}\Re\Big[\sum_{a=1}^{3}\overline{W_{R_a}}^{SU(2)_L}\,W_{L,a}^{SU(2)_L}\Big]_F \\ &+ \frac{1}{2}\Re\Big[\overline{W_R}^{U(1)_Y}\,W_L^{U(1)_Y}\Big]_F - \frac{g_s^2\theta_{\text{Sol.}}}{16\pi^2}\Im\Big[\sum_{a=1}^{8}\overline{W_{R_a}}^{SU(3)_C}\,W_{L,a}^{SU(3)_C}\Big]_F \\ &- \frac{g^2\theta_{\text{Sol.}}}{16\pi^2}\Im\Big[\sum_{a=1}^{3}\overline{W_{R_a}}^{SU(2)_L}\,W_{L,a}^{SU(2)_L}\Big]_F + [\mathcal{W}]_F + \mathcal{L}_{SR}\end{aligned}} \tag{6.5}$$

Dabei ist $\mathcal{W}$ das im nächsten Abschnitt zu diskutierende Superpotential, während der Term $\mathcal{L}_{SR}$ superrenormierbare Terme enthält, die die Supersymmetrie brechen und als effektive Niederenergie-Terme angesehen werden können.

6.2 Das Superpotential

Das allgemeinste, mit den Forderungen der Supersymmetrie-Invarianz und Renormierbarkeit vereinbare Superpotential ist ein kubisches Polynom in den links-chiralen Superfeldern. Somit ist das minimale supersymmetrische Standardmodell (MSSM) definiert über sein Superpotential

$$\begin{aligned}\mathcal{W} = \Big[& h^E_{kl} \mathbf{L_k}^i \epsilon_{ij} \mathbf{H_1}^j \bar{\mathbf{E}}_\mathbf{l} + h^D_{mn} \mathbf{Q_m}^i \epsilon_{ij} \mathbf{H_1}^j \bar{\mathbf{D}}_\mathbf{n} \\ & + h^U_{pq} \mathbf{Q_p}^i \epsilon_{ij} \mathbf{H_2}^j \bar{\mathbf{U}}_\mathbf{q} \Big] + \mathcal{W}_\mu, \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\mathcal{W}_\mu = \mu \mathbf{H_1}^i \epsilon_{ij} \mathbf{H_2}^j. \tag{6.7}$$

Durch ϵ_{ij} wird der invariante Tensor der $SU(2)$ bezeichnet. Die Bezeichnungen $m, \ldots q$ sind in allen Fällen als Generationenindizes aufzufassen, die stets drei unterschiedliche Werte annehmen können:

$$k, l = \{e, \mu, \tau\} \tag{6.8}$$

$$m, n = \{d, s, b\} \tag{6.9}$$

$$p, q = \{u, c, t\} \tag{6.10}$$

Farbindizes wurden unterdrückt.

Die beiden Higgs-Dubletts sind hierbei gegeben durch:

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

Wie schon im Standardmodell erlangen die Fermionen durch die Kopplung an das Higgs-Feld (die Higgs-Felder) Massenterme, falls letztere nichtverschwindende Vakuumerwartungswerte (VEW) besitzen. Diese VEW's müssen natürlich nicht übereinstimmen:

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \langle H_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

In der Gleichung (6.12) ist natürlich nur von den skalaren Komponenten, nicht vom gesamten Superfeld die Rede. Das Verhältnis der beiden VEW's stellt einen der wichtigen Parameter des MSSM dar:

$$\tan \beta = \frac{v_2}{v_1}. \tag{6.13}$$

6.3 Der superrenormierbare Anteil

Der allgemeinste superrenormierbare Term, der die R-Parität wie auch die $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$-Eichsymmetrie respektiert, ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{SR} = &- \sum_{ij} (\tilde{M}^2_{\mathbf{Q}})_{ij} (Q_i^\dagger Q_j) - \sum_{ij} (\tilde{M}^2_{\bar{\mathbf{U}}})_{ij} (\bar{U}_i^\dagger \bar{U}_j) - \sum_{ij} (\tilde{M}^2_{\bar{\mathbf{D}}})_{ij} (\bar{D}_i^\dagger \bar{D}_j) \\
&- \sum_{ij} (\tilde{M}^2_{\mathbf{L}})_{ij} (L_i^\dagger L_j) - \sum_{ij} (\tilde{M}^2_{\bar{\mathbf{E}}})_{ij} (\bar{E}_i^\dagger \bar{E}_j) \\
&- \Bigg(\frac{1}{2} m_{\text{Gluino}} (\lambda_s \lambda_s) + \frac{1}{2} m_{\text{Wino}} (\lambda\lambda) + \frac{1}{2} m_{\text{Bino}} (\lambda' \lambda') \\
&- \sum_{ij} A^D_{ij} h^D_{ij} (Q_i^T \epsilon H_1) \bar{D}_j - \sum_{ij} A^E_{ij} h^E_{ij} (L_i^T \epsilon H_1) \bar{E}_j \\
&- \sum_{ij} A^U_{ij} h^U_{ij} (Q_i^T \epsilon H_2) \bar{U}_j + \sum_{ij} C^D_{ij} h^D_{ij} (Q_i^T H_2^*) \bar{D}_j \\
&+ \sum_{ij} C^E_{ij} h^E_{ij} (L_i^T H_2^*) \bar{E}_j + \sum_{ij} C^U_{ij} h^U_{ij} (Q_i^T H_1^*) \bar{U}_j \\
&+ \frac{1}{2} B\, \mu (H_1^T \epsilon H_2) + \text{h.c.} \Bigg) + \tilde{m}_1^2 |H_1^0|^2 + \tilde{m}_2^2 |H_2^0|^2
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Hierin sind die λ die „physikalischen“ Gaugino-Weylspinoren (s. die Diskussion unterhalb Gleichung (6.18) sowie im Abschnitt über die Charginos und Neutralinos. Die nicht fett gedruckten Buchstaben kennzeichnen die skalaren Komponenten der linkschiralen Superfelder. Unterdrückt wurden die $SU(2)$-Indizes der Superfeld-Dubletts. Unter der Bildung $(Q^T H)$ verstehen wir hier $\sum_{i=1}^2 Q_i H_i$. Die letzten sieben Terme sind von der Struktur identisch zu den skalaren Komponenten der entsprechenden Terme im Superpotential (6.6) mit zusätzlichen Parametern.

6.4 Die Parameter des MSSM

Wir folgen hier der Diskussion in [27]. Der Eichsektor enthält zunächst die schon im Standardmodell enthaltenen vier reellen Parameter g, g', g_s und θ_{QCD}, also die drei Kopplungskonstanten der $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$-Eichgruppe sowie den QCD-Vakuumwinkel. Hinzu kommen die drei komplexen Gaugino-Massenparameter $m_{\text{Gluino}}, m_{\text{Wino}}, m_{\text{Bino}}$ aus dem superrenormierbaren Anteil. Durch den Higgs-Sektor gelangt man zu zwei weiteren reellen Massenquadrat-Parametern, $\tilde{m}_1^2$ und $\tilde{m}_2^2$, sowie die beiden komplexen Massenparameter μ und $B\mu$. Es können jedoch zwei der imaginären Freiheitsgrade eliminiert werden: In einem Grenzfall, in welchem $\mu = B\mu = 0$, alle Gaugino-Massenparameter und die gesamten A-Matrizen im superrenormierbaren Anteil verschwinden, besitzt das MSSM zwei globale, flavourerhaltende $U(1)$-Symmetrien: Dies sind eine kontinuierliche R-Symmetrie $U(1)_R$ sowie eine Peccei-Quinn-Symmetrie $U(1)_{PQ}$. Man kann also globale $U(1)_R \otimes U(1)_{PQ}$-Transformationen nutzen, zwei der Freiheitsgrade aus den oben zu Null gesetzten Parametern zu eliminieren. Eine bequeme Wahl ist, mittels einer $U(1)_R$-Transformation die Gluino-Masse reell und positiv zu wählen, sowie durch eine $U(1)_{PQ}$-Transformation den Massenparameter $B\mu$ reell anzusetzen. Zur Beschreibung des Higgs-Sektors reichen drei reelle Parameter, die (reellen) Vakuumerwartungswerte v_1 und v_2 und eine Higgs-Masse, für die man gewöhnlich die des CP-ungeraden Skalars A^0 wählt (alternativ kann man auch statt v_1 und v_2 $v^2 \equiv v_1^2 + v_2^2 = (246 \text{ GeV})^2$ und $\tan\beta \equiv v_2/v_1$ als Parameter wählen). Die Massen der anderen physikalischen Higgs-Teilchen können durch diese ausgedrückt werden. Damit hat man also im Sektor der Gaugino- und Higgs/Higgsino-Parameter sieben reelle Freiheitsgrade $(v^2, m_A, \tan\beta, m_{\text{Gluino}}, |m_{\text{Wino}}|, |m_{\text{Bino}}|, |\mu|)$ und drei Phasen $(\arg(m_{\text{Wino}}), \arg(m_{\text{Bino}}), \arg(\mu))$.

Im Flavour-Sektor hat man die neun beliebigen komplexen 3×3-Matrizen $h^E, h^D, h^U, A^E, A^D, A^U, C^E, C^D, C^U$. Die ersten drei enthalten die auch im Standardmodell mit minimalem Higgs-Sektor vorhandenen Yukawa-Kopplungen, die A- und C-Matrizen treten als Koeffizienten der weichen Supersymmetrie brechenden Terme auf.

6.5 Kovariante Ableitung und Vorzeichen

Die eichkovariante Ableitung der $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$-Eichgruppe ist in (fast) allen Lehrbüchern über Quantenfeldtheorie in der Form

$$D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i} g W_\mu^a T^a - \mathrm{i} g' B_\mu \frac{Y}{2} - \mathrm{i} g_s G_\mu^c T^c, \tag{6.15}$$

definiert, [1], [3], [4], [7], [20], [31], [32], [33], [34], [35]. Die Konvention mit den jeweils anderen Vorzeichen,

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i} g W_\mu^a T^a + \mathrm{i} g' B_\mu \frac{Y}{2} + \mathrm{i} g_s G_\mu^c T^c, \tag{6.16}$$

findet sich nur wenig in der Liteatur, [29], [36], [37], [38]. Aus historischen Gründen findet sich in den Veröffentlichungen der Particle Data Group (PDG) eine gemischte Variante, mit den negativen Vorzeichen für die $SU(3)_C$-Eichgruppe und positiven Vorzeichen im elektroschwachen Sektor. Da dies aus unserer Sicht inkonsistent ist, wählen wir die Form (6.15) für die kovariante Ableitung. Was hat das für Konsequenzen?

- Im Standardmodell sind von der Wahl des Vorzeichens der kovarianten Ableitung nur die Vertizes betroffen, die ein oder mehrere Eichbosonen enthalten. Sie erhalten gegenüber der PDG-Konvention das relative Vorzeichen
$$(-1)^{A+Z+W},$$
wobei A, Z und W die Anzahl der Photonen, Z- und W-Bosonen ist. Diese Vorzeichen treten bei den Kopplungen der elektroschwachen Eichbosonen an die Quarks und Leptonen sowie an die Higgs-Bosonen (und damit auch der Goldstone-Bosonen) auf (unabhängig von der Komplexität des Higgs-Sektors). Weiterhin erhält man relative Vorzeichen bei den Selbstkopplungen von drei Eichbsonen.

- Im MSSM macht sich die Konvention bezüglich des Vorzeichens der kovarianten Ableitung noch an vielen anderen Stellen bemerkbar. Die Kopplungen der elektroschwachen Eichbosonen an die Squarks und Sleptonen sind das trivialste Beispiel.

- Die Neutralinos und Charginos sind Mischungen der Higgsinos sowie der Gauginos. Das Erscheinen eines relativen Vorzeichens in der kovarianten Ableitung sorgt für ein relatives Vorzeichen in den aus den Vektorsuperfeldern stammenden Termen der Kopplung zweier Fermionen an ein Boson. Ist das Boson ein Higgs-Feld, werden daraus Massenterme. Die Mischung der Gauginos und Neutralinos hängt also vermeintlich von unserer Konvention ab!

  Das ist natürlich Unsinn. Die Wahl des Vorzeichens der kovarianten Ableitung entspricht der Definition des Eich-Zusammenhangs, also des Vorzeichens der Eichpotentiale und damit in der quantisierten Version der Eichboson-Felder. Das bedeutet, daß man - ändert man das Vorzeichen der Eichbosonen - die Basis, von welcher man auf die Neutralino- und Chargino-Felder transformiert, (in den Außerdiagonal-Elementen der Mischungsmatrix) mit einem Vorzeichen versieht, so daß dann ganz selbstverständlich andere Transformationsmatrizen auftreten.

- Manche Neutralino- oder Chargino-Vertizes erhalten Beiträge sowohl von den Higgsinos wie von den Gauginos, so daß die Kopplungskonstanten dieser Vertizes vermeintlich in der einen Hälfte ein relatives Vorzeichen bekommen, in der anderen jedoch nicht. Da die Koeffizienten der einzelnen Summanden dieser Kopplungskonstanten aber aus Linearkombinationen von Transformationsmatrizen bestehen, die ebenfalls über eine relative Phase verfügen, ergibt sich lediglich im Höchstfall ein relatives Vorzeichen der gesamten Kopplung. Die Massen der (physikalischen!) Masseneigenzustände der Charginos und Neutralinos bleiben unverändert, ebenso wie die Gestalt der Vertizes (bis auf das relative Vorzeichen).

- Letzten Endes gilt auch für alle Vertizes des MSSM, daß man ein relatives Vorzeichen
$$(-1)^{A+W+Z}$$
zwischen den beiden Konventionen (6.15) und (6.16) erhält.

6.6 Sammeln der Terme

Nach dem im vorangegangenen Abschnitt (beachte, daß hier im Gegensatz zu dem Abschnitt über das Standardmodell für die eichkovariante Ableitung ein kursives D verwendet wird, um Verwechslungen mit den Superableitungen auszuschließen), so kann man die gesamte Lagrangedichte des MSSM schreiben als (die Hilfsfelder sind bereits ausintegriert worden):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{MSSM}} = & \sum_{i=1}^{3} (D_\mu Q)_i^\dagger (D^\mu Q)_i + \sum_{i=1}^{3} (D_\mu L)_i^\dagger (D^\mu L)_i + \sum_{i=1}^{3} (D_\mu \bar{U})_i^\dagger (D^\mu \bar{U})_i \\
& + \sum_{i=1}^{3} (D_\mu \bar{D})_i^\dagger (D^\mu \bar{D})_i + \sum_{i=1}^{3} (D_\mu \bar{E})_i^\dagger (D^\mu \bar{E})_i \\
& + (D_\mu H_1)^\dagger (D^\mu H_1) + (D_\mu H_2)^\dagger (D^\mu H_2) \\
& + \mathrm{i} \sum_{i=1}^{3} \overline{q_{L,i}} \not{D}\, q_{L,i} + \mathrm{i} \sum_{i=1}^{3} \overline{\ell_{L,i}} \not{D}\, \ell_{L,i} + \mathrm{i} \sum_{i=1}^{3} \overline{u_{R,i}} \not{D}\, u_{R,i} \\
& + \mathrm{i} \sum_{i=1}^{3} \overline{d_{R,i}} \not{D}\, d_{R,i} + \mathrm{i} \sum_{i=1}^{3} \overline{e_{R,i}} \not{D}\, e_{R,i} + \mathrm{i}\overline{h_{1,L}} \not{D}\, h_{1,L} + \mathrm{i}\overline{h_{2,L}} \not{D}\, h_{2,L} \\
& + 2\sqrt{2} g' \sum_{i=1}^{3} \Re\Big[(\overline{q_{L,i}} \, \frac{Y}{2} \, \tilde{B})\, Q_i \Big] \\
& + 2\sqrt{2} g \sum_{i=1}^{3} \sum_{a=1}^{3} \sum_{kl} \Re\Big[(\overline{q_{L,i,k}} \, T^a_{kl} \, \tilde{W}^a)\, Q_{i,l} \Big] \\
& + 2\sqrt{2} g_s \sum_{i=1}^{3} \sum_{a=1}^{8} \sum_{kl} \Re\Big[(\overline{q_{L,i,k}} \, T^a_{kl} \, \tilde{G}^a)\, Q_{i,l} \Big] \\
& + 2\sqrt{2} g' \sum_{i=1}^{3} \Re\Big[(\overline{\ell_{L,i}} \, \frac{Y}{2} \, \tilde{B})\, L_i \Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2\sqrt{2}g \sum_{i=1}^{3} \sum_{a=1}^{3} \sum_{kl} \Re\Big[(\overline{\ell_{L,i,k}}\, T^a_{kl}\, \tilde{W}^a)\, L_{i,l} \Big] \\
&+ \left(2\sqrt{2}g_s \sum_{i=1}^{3} \sum_{a=1}^{8} \sum_{kl} \Re\Big[(\overline{\ell_{L,i,k}}\, T^a_{kl}\, \tilde{G}^a)\, L_{i,l} \Big] \; = 0 \right) \\
&+ 2\sqrt{2}g' \sum_{i=1}^{3} \Re\Big[(\overline{u^c_{L,i}}\, \frac{Y}{2}\, \tilde{B})\, \bar{U}_i \Big] \\
&+ \left(2\sqrt{2}g \sum_{i=1}^{3} \sum_{a=1}^{3} \sum_{kl} \Re\Big[(\overline{u^c_{L,i,k}}\, T^a_{kl}\, \tilde{W}^a)\, \bar{U}_{i,l} \Big] \; = 0 \right) \\
&+ 2\sqrt{2}g_s \sum_{i=1}^{3} \sum_{a=1}^{8} \sum_{kl} \Re\Big[(\overline{u^c_{L,i,k}}\, (-T^a_{kl})^*\, \tilde{G}^a)\, \bar{U}_{i,l} \Big] \\
&+ 2\sqrt{2}g' \sum_{i=1}^{3} \Re\Big[(\overline{d^c_{L,i}}\, \frac{Y}{2}\, \tilde{B})\, \bar{D}_i \Big] \\
&+ \left(2\sqrt{2}g \sum_{i=1}^{3} \sum_{a=1}^{3} \sum_{kl} \Re\Big[(\overline{d^c_{L,i,k}}\, T^a_{kl}\, \tilde{W}^a)\, \bar{D}_{i,l} \Big] \; = 0 \right) \\
&+ 2\sqrt{2}g_s \sum_{i=1}^{3} \sum_{a=1}^{8} \sum_{kl} \Re\Big[(\overline{d^c_{L,i,k}}\, (-T^a_{kl})^*\, \tilde{G}^a)\, \bar{D}_{i,l} \Big] \\
&+ 2\sqrt{2}g' \sum_{i=1}^{3} \Re\Big[(\overline{e^c_{L,i}}\, \frac{Y}{2}\, \tilde{B})\, \bar{E}_i \Big] \\
&+ \left(2\sqrt{2}g \sum_{i=1}^{3} \sum_{a=1}^{3} \sum_{kl} \Re\Big[(\overline{e^c_{L,i,k}}\, T^a_{kl}\, \tilde{W}^a)\, \bar{E}_{i,l} \Big] \; = 0 \right) \\
&+ \left(2\sqrt{2}g_s \sum_{i=1}^{3} \sum_{a=1}^{8} \sum_{kl} \Re\Big[(\overline{e^c_{L,i,k}}\, T^a_{kl}\, \tilde{G}^a)\, \bar{E}_{i,l} \Big] \; = 0 \right) \\
&+ 2\sqrt{2}\, g' \Re\Big[(\overline{h_{L,1}}\, \frac{Y}{2}\, \tilde{B})\, H_1 \Big] + 2\sqrt{2}\, g \sum_{a=1}^{3} \sum_{kl} \Re\Big[(\overline{h_{L,k,1}}\, T^a_{kl}\, \tilde{W}^a)\, H_{1,l} \Big] \\
&+ \left(2\sqrt{2}\, g_s \sum_{a=1}^{8} \sum_{kl} \Re\Big[(\overline{h_{L,k,1}}\, T^a_{kl}\, \tilde{G}^a)\, H_{1,l} \Big] = 0 \right) \\
&+ 2\sqrt{2}g' \Re\Big[(\overline{h_{L,2}}\, \frac{Y}{2}\, \tilde{B})\, H_2 \Big] + 2\sqrt{2}\, g \Re \sum_{kl} \Big[(\overline{h_{L,k,2}}\, \sum_{a=1}^{3} T^a_{kl}\, \tilde{W}^a)\, H_{2,l} \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(2\sqrt{2}\, g_s \Re \sum_{a=1}^{8} \sum_{kl} \Big[(\overline{h_{L,k,2}}\, T^a_{kl}\, \tilde{G}^a)\, H_{2,l} \Big] = 0 \right) \\
&- \frac{1}{4}\mathcal{B}_{\mu\nu}\mathcal{B}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3} \mathcal{F}^a_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}_a - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} \mathcal{G}^a_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\mu\nu}_a \\
&+ \frac{g^2 \theta_{\text{Sol.}}}{64\pi^2} \sum_{a=1}^{3} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{F}^{\mu\nu}_a \mathcal{F}^{a,\rho\sigma} + \frac{g_s^2 \theta_{\text{Sol.}}}{64\pi^2} \sum_{a=8}^{3} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{G}^{\mu\nu}_a \mathcal{G}^{a,\rho\sigma} \\
&+ \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\tilde{B}}\, \not{D}\, \tilde{B}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{a=1}^{3}\left(\overline{\tilde{W}}\, (\not{D}\, \tilde{W})_a\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{a=1}^{8}\left(\overline{\tilde{G}}\, (\not{D}\, \tilde{G})_a\right) \\
&+ \Re\Big[\sum_{kl} \frac{\partial^2 \mathcal{W}(\phi)}{\partial\phi_k \partial\phi_l}\, (\overline{\psi_k}_L \psi_{l,L})\Big] - \sum_k \left| \frac{\partial \mathcal{W}(\phi)}{\partial \phi_k} \right|^2 \\
&- \frac{1}{2} g'^2 \Bigg(\frac{\xi_{U(1)_Y}}{g'} + \sum_i \Big(Q_i^\dagger \frac{Y}{2} Q_i + L_i^\dagger \frac{Y}{2} L_i + \bar{U}_i^\dagger \frac{Y}{2} \bar{U}_i + \bar{D}_i^\dagger \frac{Y}{2} \bar{D}_i \\
&\qquad\qquad + \bar{E}_i^\dagger \frac{Y}{2} \bar{E}_i \Big) + H_1^\dagger \frac{Y}{2} H_1 + H_2^\dagger \frac{Y}{2} H_2 \Bigg)^2 \\
&- \frac{1}{2} g^2 \sum_{a=1}^{3} \sum_{kl} \Bigg(\sum_i \Big(Q^\dagger_{i,k}\, T^a_{kl}\, Q_{i,l} + L^\dagger_{i,k}\, T^a_{kl}\, L_{i,l} \Big) \\
&\qquad\qquad + H^\dagger_{1,k}\, T^a_{kl}\, H_{1,l} + H^\dagger_{2,k}\, T^a_{kl}\, H_{2,l} \Bigg)^2 \\
&- \frac{1}{2} g_s^2 \sum_{a=1}^{8} \sum_{kl} \Bigg(\sum_i Q^\dagger_{i,k}\, T^a_{kl}\, Q_{i,l} - \bar{U}_{i,k}\, T^a_{kl}\, \bar{U}^*_{i,l} - \bar{D}_{i,k}\, T^a_{kl}\, \bar{D}^*_{i,l} \Bigg)^2 \\
&+ \mathcal{L}_{SR}
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

Nun zur Erklärung der einzelnen Terme:

- Die Terme in den ersten beiden Zeilen stammen aus dem eichinvarianten kinetischen Teil der chiralen Superfelder und stellen die kinetischen Terme der Higgs-Bosonen, der Sleptonen und Squarks dar sowie die Kopplung dieser Teilchen an die Eichfelder.
- Die nächsten beiden Zeilen kommen ebenso aus den ersten drei Zeilen von (6.5); sie bilden die kinetischen Terme der Leptonen, Quarks und Higgsinos, und wiederum deren Kopplungen an die Eichfelder.
- Ebenfalls aus den Termen der Form $\Phi^\dagger \exp[\mathcal{V}]\Phi$ kann man die nächsten 21 Terme extrahieren, die allesamt Kopplungen vom Yukawa-Typ

sind, und zwar in den Kombinationen (Quark/Squark/Gaugino) , (Lepton/Slepton/Gaugino) , (Higgs/Higgsino/Gaugino). Wie angedeutet, verwschwinden einige dieser Terme, wenn die entsprechenden Teilchen nicht stark wechselwirken.

- Sodann folgen die kinetischen Terme der Eichboson-Felder in völliger Analogie zum (nicht-supersymmetrischen) Standardmodell. Sie stammen aus den Realteilen der kinetischen Terme der Super-Eichfelder in (6.5).

- Die nächsten beiden Terme stammen aus den entsprechenden Imaginärteilen, und tragen der Möglichkeit existierender Soliton-Lösungen der nichtabelschen Eichgruppen-Anteile Rechnung, s. [4], [5].

- Weiter haben wir die kinetischen Terme der Gauginos.

- Nun kommen die Superpotential-Terme; glücklicherweise hat die Forderung, nur die F-Terme des Superpotentials (6.6) zu nehmen, die Konsequenz, daß man die in der funktionale Abhängigkeit von $\mathcal{W}()$ nur die skalaren Komponenten der Superfelder einzusetzen hat. Dies schränkt die Zahl der Terme auf ein erträgliches Maß ein.

- Jetzt kommen noch ϕ^4-Terme der skalaren Feldkomponenten. Dabei ist die Besonderheit zu beachten, daß im Falle der $U(1)_Y$-Hyperladungs-Eichgruppe noch der sogenannte Fayet-Iliopoulos-Term ξ hinzukommen kann, der nur für $U(1)$-Eichfaktoren auftritt, aber in den meisten Fällen als identisch Null angenommen wird. Hier wurden bereits die Terme weggelassen, die trivialen Darstellungen der Eichgruppen entsprechen, d.h. der Generator der Eichgruppe diese Zustände vernichtet. Für die starke Wechselwirkung ist zu beachten, daß die komplex konjugierte Darstellung die Generatoren $-T^*$ besitzt, so daß gilt:

$$\bar{U}_k^*(-T_{kl}^{a\,*})\bar{U}_l = -\bar{U}_k^* T_{lk}^{a\,\dagger}\bar{U}_l = -\bar{U}_l T_{lk}^a \bar{U}_k^* \tag{6.18}$$

- Zu guter letzt noch der superrenormierbare Anteil, der die Supersymmetrie bricht.

Zu beachten hat man, daß die Bispinoren der Gauginos, das Bino, Wino und Gluino ein relatives i in der Definition der linkshändigen Komponente (bzw. $(-i)$ in der rechtshändigen Komponente) enthalten, die auf die Nomenklatur in [10] zurückgeht (s. auch die Diskussion in [9], S. 205/217. Weiter wird dies im Abschnitt über die Terme der Charginos und Neutralinos behandelt.

Tabelle über die Teilchen des MSSM und deren Quantenzahlen

	Boson-Felder	Fermion-Felder	Y	$SU(2)_L$	$SU(3)_C$
B(-ino)	B	$\tilde{B}$	0	Singlett	1
W(-ino)	W^i	$\tilde{W}^i$	0	Triplett	1
Gluon(-ino)	G^i	$\tilde{G}^i$	0	Singlett	8
(S)leptonen,	$L_1 = (\tilde{\nu}_e, \tilde{e}_L^-)$	$(\nu_e, e^-)_L$	-1	Dublett	1
(S)neutrinos	$L_2 = (\tilde{\nu}_\mu, \tilde{\mu}_L^-)$	$(\nu_\mu, \mu^-)_L$	-1	Dublett	1
	$L_3 = (\tilde{\nu}_\tau, \tilde{\tau}_L^-)$	$(\nu_\tau, \tau^-)_L$	-1	Dublett	1
	$\bar{E}_1 = \tilde{e}_R^+$	e_L^+	2	Singlett	1
	$\bar{E}_2 = \tilde{\mu}_R^+$	μ_L^+	2	Singlett	1
	$\bar{E}_3 = \tilde{\tau}_R^+$	τ_L^+	2	Singlett	1
(S)quarks	$Q_1 = (\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$	$(u, d)_L$	$\frac{1}{3}$	Dublett	3
	$Q_2 = (\tilde{c}_L, \tilde{s}_L)$	$(c, s)_L$	$\frac{1}{3}$	Dublett	3
	$Q_3 = (\tilde{t}_L, \tilde{b}_L)$	$(t, b)_L$	$\frac{1}{3}$	Dublett	3
	$\bar{U}_1 = \tilde{u}_R^*$	u_L^c	$-\frac{4}{3}$	Singlett	$\bar{3}$
	$\bar{U}_2 = \tilde{c}_R^*$	c_L^c	$-\frac{4}{3}$	Singlett	$\bar{3}$
	$\bar{U}_3 = \tilde{t}_R^*$	t_L^c	$-\frac{4}{3}$	Singlett	$\bar{3}$
	$\bar{D}_1 = \tilde{d}_R^*$	d_L^c	$\frac{2}{3}$	Singlett	$\bar{3}$
	$\bar{D}_1 = \tilde{s}_R^*$	s_L^c	$\frac{2}{3}$	Singlett	$\bar{3}$
	$\bar{D}_1 = \tilde{b}_R^*$	b_L^c	$\frac{2}{3}$	Singlett	$\bar{3}$
Higgs(-ino)	$H_1 = (H_1^0, H_1^-)$	$(\tilde{H}_1^0, \tilde{H}_1^-)_L$	-1	Dublett	1
	$H_2 = (H_2^+, H_2^0)$	$(\tilde{H}_2^+, \tilde{H}_2^0)_L$	1	Dublett	1

Hier erkennt man wieder die bereits angesprochene Zuordnung der Superfelder zu den Teilchen des Standardmodells. Als Elemente der $SU(2)_L$-Singlett-Superfelder werden die linkshändigen Anteile der ladungskonjugierten Zustände der Anti-Leptonen und Anti-Quarks genommen; dann sind deren Antiteilchen rechts-chirale Felder, so daß es gerechtfertigt ist, die skalaren Superpartner als *rechtshändig* zu indizieren.

In den Fällen, wo keine Mischung zwischen den Generationen auftritt, werden wir in Zukunft nur noch die erste Generation aufführen und statt dessen $\underline{+\text{ ü. G.}}$ schreiben als Abkürzung für den Zusatz: und die übrigen Generationen.

6.6.1 Terme aus dem Superpotential

Das Superpotential, nur von den skalaren Komponenten der Superfelder abhängig, nimmt zunächst diese Gestalt an, worin ϕ die gesamte Abhängigkeit von den skalaren Feldern bedeuten soll:

$$\mathcal{W}(\phi) = \Big[h^E_{kl}(L^i_k\epsilon_{ij}H^j_1)\bar{E}_l + h^D_{mn}(Q^i_m\epsilon_{ij}H^j_1)\bar{D}_n + h^U_{pq}(Q^i_p\epsilon_{ij}H^j_2)\bar{U}_q\Big] + \mu(H^i_1\epsilon_{ij}H^j_2). \tag{6.19}$$

Setzt man hier die $SU(2)_L$-Dubletts explizit ein, bekommt man:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\phi) = {}& h^E_{kl}(\tilde{\nu}_k H^-_1 - \tilde{\ell}^-_{L,k}H^0_1)\tilde{\ell}^+_{R,l} + h^D_{kl}(\tilde{u}_{L,k}H^-_1 - \tilde{d}_{L,k}H^0_1)\tilde{d}^*_{R,l} \\ &+ h^U_{kl}(\tilde{u}_{L,k}H^0_2 - \tilde{d}_{L,k}H^+_2)\tilde{u}^*_{R,l} + \mu(H^0_1H^0_2 - H^-_1H^+_2)\end{aligned} \tag{6.20}$$

Wir wollen zunächst den Ausdruck

$$-\sum_k \left|\frac{\partial\mathcal{W}(\phi)}{\partial\phi_k}\right|^2$$

ausrechnen, wobei die Summe über k hier alle in (6.19) vorkommenden skalaren Felder einschließt. Dies sind hier für die drei Generationen je ein Sneutrino, zwei Sleptonen, zwei up-type- und zwei down-type-Squarks (beachte, daß die rechtshändigen Felder immer nur als komplex konjugierte auftreten!) sowie vier verschiedene Higgs-Zustände. Wir nehmen hier das Ergebnis aus Abschnitt 6.8 vorweg, daß die Yukawa-Kopplungsterme diagonal gewählt werden können, mit der kleinen Komplikation des Auftretens der CKM-Matrix für Terme, in denen up- und down-(S-)quarks gemischt vorkommen. Wir setzen also:

$$h^E_{kl} = \frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}\delta_{kl}, \quad h^D_{kl} = \frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}\delta_{kl}, \quad h^U_{kl} = -\frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}V^{CKM}_{kl}. \tag{6.21}$$

Damit wird das Superpotential:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\phi) = {}& \frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}(\tilde{\nu}_k H^-_1 - \tilde{\ell}^-_{L,k}H^0_1)\tilde{\ell}^+_{R,k} + \frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}(\tilde{u}_{L,l}V^{CKM\,*}_{lk}H^-_1 - \tilde{d}_{L,k}H^0_1)\tilde{d}^*_{R,k} \\ &+ \frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}(V^{CKM}_{kl}\tilde{d}_{L,l}H^+_2 - \tilde{u}_{L,k}H^0_2)\tilde{u}^*_{R,k} + \mu(H^0_1H^0_2 - H^-_1H^+_2)\end{aligned} \tag{6.22}$$

An dieser Stelle werden erst einmal alle benötigten Ableitungen des Superpotentials zusammengetragen, worin wie oben bereits die gewohnten Bezeichnungen für die Teilchen des Standardmodells und ihre supersymmetrischen

Partner eingesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial H_1^0} &= -\frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}(\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}) - \frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}(\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{R,k}) + \mu H_2^0 \\
\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial H_1^-} &= \frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}(\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{R,k}) + \frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}(\tilde{u}_{L,l}V^{CKM\,*}_{lk}\tilde{d}^*_{R,k}) - \mu H_2^+ \\
\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial H_2^0} &= -\frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}(\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{R,k}) + \mu H_1^0 \\
\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial H_2^+} &= \frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\tilde{d}_{L,l}V^{CKM}_{kl}\tilde{u}^*_{R,k} - \mu H_1^- \\
\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{\nu}_k} &= \frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}\tilde{\ell}^+_{R,k}H_1^- \\
\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{\ell}^-_{L,k}} &= -\frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}\tilde{\ell}^+_{R,k}H_1^0 \\
\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{\ell}^+_{R,k}} &= \frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}(\tilde{\nu}_k H_1^- - \tilde{\ell}^-_{L,k}H_1^0) \\
\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{u}_{L,k}} &= \frac{\sqrt{2}m_{d_l}}{v_1}\tilde{d}^*_{R,l}V^{CKM\,*}_{kl}H_1^- - \frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\tilde{u}^*_{R,k}H_2^0 \\
\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{u}^*_{R,k}} &= \frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}(V^{CKM}_{kl}\tilde{d}_{L,l}H_2^+ - \tilde{u}_{L,k}H_2^0) \\
\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{d}_{L,k}} &= -\frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}\tilde{d}^*_{R,k}H_1^0 + \frac{\sqrt{2}m_{u_l}}{v_2}V^{CKM}_{lk}\tilde{u}^*_{R,l}H_2^+ \\
\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{d}^*_{R,k}} &= \frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}(V^{CKM\,*}_{lk}\tilde{u}_{L,l}H_1^- - \tilde{d}_{L,k}H_1^0)
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

Vernachlässigt man den Generationenindex, hat man hier also 11 verschiedene Ableitungen nach den skalaren Komponenten der Superfelder. Daraus resultierten $11^2 = 121$ mögliche 2. Ableitungen des Superpotentials. Da letzteres ein Polynom 3. Grades in den Superfeldern und damit eine hochgradig gutartige Funktion ist, ist die Vertauschbarkeit der 2. Ableitungen gewährleistet:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \phi_i \partial \phi_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \phi_j \partial \phi_i} \tag{6.24}$$

Da weiterhin jedes der skalaren Felder nur in 1. Ordnung im Superpotential vorkommt, gilt

$$\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \phi_i^2} = 0 \quad \forall\, \phi_i. \tag{6.25}$$

Insgesamt reduziert sich die Zahl der zu berechnenden Ableitungen damit auf $\frac{121-11}{2} = 55$. Glücklicherweise sind von diesen weitere 35 Ableitungen identisch Null, und zwar:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^0 \partial H_1^-} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^0 \partial H_2^+} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^0 \partial \tilde{\nu}_k} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^0 \partial \tilde{u}_{L,k}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^0 \partial \tilde{u}^*_{R,k}} = \\
&\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^- \partial H_2^0} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^- \partial \tilde{\ell}^-_{L,k}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^- \partial \tilde{u}^*_{R,k}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^- \partial \tilde{d}_{L,k}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_2^0 \partial H_2^+} = \\
&\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_2^0 \partial \tilde{\nu}_k} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_2^0 \partial \tilde{\ell}^-_{L,k}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_2^0 \partial \tilde{\ell}^+_{R,k}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_2^0 \partial \tilde{d}_{L,k}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_2^0 \partial \tilde{d}^*_{R,k}} = \\
&\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_2^+ \partial \tilde{\nu}_k} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_2^+ \partial \tilde{\ell}^-_{L,k}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_2^+ \partial \tilde{\ell}^+_{R,k}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_2^+ \partial \tilde{u}_{L,k}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_2^+ \partial \tilde{d}^*_{R,k}} = \\
&\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \tilde{\nu}_k \partial \tilde{\ell}^-_{L,l}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \tilde{\nu}_k \partial \tilde{u}_{L,l}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \tilde{\nu}_k \partial \tilde{u}^*_{R,l}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \tilde{\nu}_k \partial \tilde{d}_{L,l}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \tilde{\nu}_k \partial \tilde{d}^*_{R,l}} = \\
&\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \tilde{\ell}^-_{L,k} \partial \tilde{u}_{L,l}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \tilde{\ell}^-_{L,k} \partial \tilde{u}^*_{R,l}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \tilde{\ell}^-_{L,k} \partial \tilde{d}_{L,l}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \tilde{\ell}^-_{L,k} \partial \tilde{d}^*_{R,l}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \tilde{\ell}^+_{R,k} \partial \tilde{u}_{L,l}} = \\
&\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \tilde{\ell}^+_{R,k} \partial \tilde{u}^*_{R,l}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \tilde{\ell}^+_{R,k} \partial \tilde{d}_{L,l}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \tilde{\ell}^+_{R,k} \partial \tilde{d}^*_{R,l}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \tilde{u}_{L,k} \partial \tilde{d}_{L,l}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \tilde{u}^*_{R,k} \partial \tilde{d}^*_{R,l}} = 0
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Die nichtverschwindenden 2. Ableitungen nach Higgsfeldern sind:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^0 \partial H_2^0} = -\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^- \partial H_2^+} = \mu \tag{6.27}$$

Sodann hat man 12 Ableitungen nach jeweils einem Higgs-Feld sowie einem der Sneutrinos, Sleptonen oder Squarks, wobei je zwei dieser Ableitungen als zueineander konjugiert auffassen kann:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^0 \partial \tilde{\ell}^-_{L,k}} &= -\frac{\sqrt{2} m_{\ell_k}}{v_1} \tilde{\ell}^+_{R,k}, & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^0 \partial \tilde{\ell}^+_{R,k}} &= -\frac{\sqrt{2} m_{\ell_k}}{v_1} \tilde{\ell}^-_{L,k}, \\
\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^0 \partial \tilde{d}_{L,k}} &= -\frac{\sqrt{2} m_{d_k}}{v_1} \tilde{d}^*_{R,k}, & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^0 \partial \tilde{d}^*_{R,k}} &= -\frac{\sqrt{2} m_{d_k}}{v_1} \tilde{d}_{L,k}, \\
\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^- \partial \tilde{\nu}_k} &= \frac{\sqrt{2} m_{\ell_k}}{v_1} \tilde{\ell}^+_{R,k}, & \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial H_1^- \partial \tilde{\ell}^+_{R,k}} &= \frac{\sqrt{2} m_{\ell_k}}{v_1} \tilde{\nu}_k,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial H_1^-\partial\tilde{u}_{L,k}} = \frac{\sqrt{2}m_{d_l}}{v_1}V_{kl}^{CKM\,*}\tilde{d}_{R,l}^*, \qquad \frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial H_1^-\partial\tilde{d}_{R,k}^*} = \frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}V_{lk}^{CKM\,*}\tilde{u}_{L,l},$$
$$\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial H_2^0\partial\tilde{u}_{L,k}} = -\frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\tilde{u}_{R,k}^*, \qquad \frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial H_2^0\partial\tilde{u}_{R,k}^*} = -\frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\tilde{u}_{L,k},$$
$$\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial H_2^+\partial\tilde{u}_{R,k}^*} = \frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}V_{kl}^{CKM}\tilde{d}_{L,l}, \qquad \frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial H_2^+\partial\tilde{d}_{L,k}} = \frac{\sqrt{2}m_{u_l}}{v_2}V_{lk}^{CKM}\tilde{u}_{R,l}^* \tag{6.28}$$

Weiter gibt es zwei Ableitungen, die nur nach Sleptonen und Sneutrinos zu bilden sind:

$$\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\tilde{\nu}_k\partial\tilde{\ell}_{R,l}^+} = \frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}H_1^-, \qquad \frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\tilde{\ell}_{L,k}^-\partial\tilde{\ell}_{R,l}^+} = -\frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}H_1^0 \tag{6.29}$$

Schließlich kommen noch vier Terme mit reinen Squark-Ableitungen hinzu:

$$\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\tilde{u}_{L,k}\partial\tilde{u}_{R,l}^*} = -\frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}H_2^0, \qquad \frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\tilde{u}_{L,k}\partial\tilde{d}_{R,l}^*} = \frac{\sqrt{2}m_{d_l}}{v_1}V_{kl}^{CKM\,*}H_1^-,$$
$$\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\tilde{u}_{R,k}^*\partial\tilde{d}_{L,l}} = \frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}V_{kl}^{CKM}H_2^+, \qquad \frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\tilde{d}_{L,k}\partial\tilde{d}_{R,l}^*} = -\frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}H_1^0 \tag{6.30}$$

Nun steht uns die mühselige Aufgabe bevor, die ersten Ableitungen nach den skalaren Feldern zu quadrieren. Man erhält (obwohl dies in solcher Ausführlichkeit erst bei der Herleitung der Feynmanregeln benötigt wird, wird das Superpotential hier bereits ausgeschrieben):

$$\sum_a \left|\frac{\partial\mathcal{W}(\phi)}{\partial\phi_k}\right|^2 =$$

$$\sum_k \frac{2m_{\ell_k}^2}{v_1^2}|\tilde{\ell}_{L,k}|^2|\tilde{\ell}_{R,k}|^2 + \sum_{k\neq l}\frac{2m_{\ell_k}m_{\ell_l}}{v_1^2}\left(\tilde{\ell}_{L,k}^-\tilde{\ell}_{R,k}^+\tilde{\ell}_{L,l}^+\tilde{\ell}_{R,l}^- + \tilde{\ell}_{L,k}^+\tilde{\ell}_{R,k}^-\tilde{\ell}_{L,l}^-\tilde{\ell}_{R,l}^+\right)$$
$$+\sum_k \frac{2m_{d_k}^2}{v_1^2}|\tilde{d}_{L,k}|^2|\tilde{d}_{R,k}|^2 + \sum_{k\neq l}\frac{2m_{d_k}m_{d_l}}{v_1^2}\left(\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}_{R,k}^*\tilde{d}_{L,l}^*\tilde{d}_{R,l} + \tilde{d}_{L,k}^*\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}_{L,l}\tilde{d}_{R,l}^*\right)$$
$$+\sum_{k,l}\frac{2m_{\ell_k}m_{d_l}}{v_1^2}\left(\tilde{\ell}_{L,k}^-\tilde{\ell}_{R,k}^+\tilde{d}_{L,l}^*\tilde{d}_{R,l} + \tilde{\ell}_{L,k}^+\tilde{\ell}_{R,k}^-\tilde{d}_{L,l}\tilde{d}_{R,l}^*\right)$$
$$-\sum_k \frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}\left(\mu\,\tilde{\ell}_{L,k}^+\tilde{\ell}_{R,k}^-H_2^0 + \mu^*\,\tilde{\ell}_{L,k}^-\tilde{\ell}_{R,k}^+H_2^{0\,*}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_k \frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}\Big(\mu\, \tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{R,k}H_2^0 + \mu^*\, \tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{R,k}H_2^{0\,*}\Big) + |\mu|^2|H_2^0|^2 \\
&+ \sum_k \frac{2m^2_{\ell_k}}{v_1^2}|\tilde{\nu}_k|^2|\tilde{\ell}_{R,k}|^2 + \sum_{k\neq l}\frac{2m_{\ell_k}m_{\ell_l}}{v_1^2}\Big(\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{R,k}\tilde{\nu}^*_l\tilde{\ell}^-_{R,l} + \tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\nu}_l\tilde{\ell}^+_{R,l}\Big) \\
&+ \sum_{k,l,m,n}\frac{2m_{d_k}m_{d_m}}{v_1^2}\Big(V^{CKM\,*}_{lk}V^{CKM}_{nm}\tilde{u}_{L,l}\tilde{u}^*_{L,n}\tilde{d}^*_{R,k}\tilde{d}_{R,m}\Big) \\
&+ \sum_{k,l,m}\frac{2m_{\ell_k}m_{d_l}}{v_1^2}\Big(V^{CKM}_{ml}\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{R,k}\tilde{u}^*_{L,m}\tilde{d}_{R,l} + V^{CKM\,*}_{ml}\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{u}_{L,m}\tilde{d}^*_{R,l}\Big) \\
&- \sum_k \frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}\Big(\mu\,\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{R,k}H_2^+ + \mu^*\,\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{R,k}(H_2^+)^*\Big) \\
&- \sum_{k,l}\frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}\Big(\mu\, V^{CKM}_{lk}\tilde{u}^*_{L,l}\tilde{d}_{R,k}H_2^+ + \mu^*\, V^{CKM\,*}_{lk}\tilde{u}_{L,l}\tilde{d}^*_{R,k}(H_2^+)^*\Big) + |\mu|^2|H_2^+|^2 \\
&+ \sum_k \frac{2m^2_{u_k}}{v_2^2}|\tilde{u}_{L,k}|^2|\tilde{u}_{R,k}|^2 + \sum_{k\neq l}\frac{2m_{u_k}m_{u_l}}{v_2^2}\Big(\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{u}^*_{L,l}\tilde{u}_{R,l} + \tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}_{L,l}\tilde{u}^*_{R,l}\Big) \\
&- \sum_k \frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\Big(\mu\,\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{R,k}H_1^0 + \mu^*\,\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{R,k}(H_1^0)^*\Big) + |\mu|^2|H_1^0|^2 \\
&+ \sum_{k,l,m,n}\frac{2m_{u_k}m_{u_m}}{v_2^2}\Big(V^{CKM}_{kl}V^{CKM\,*}_{mn}\tilde{d}_{L,l}\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{d}^*_{L,n}\tilde{u}_{R,m}\Big) \\
&- \sum_{k,l}\frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\Big(\mu\, V^{CKM\,*}_{kl}\tilde{d}^*_{L,l}\tilde{u}_{R,k}H_1^- + \mu^*\, V^{CKM}_{kl}\tilde{d}_{L,l}\tilde{u}^*_{R,k}(H_1^-)^*\Big) + |\mu|^2|H_1^-|^2 \\
&+ \sum_k \frac{2m^2_{\ell_k}}{v_1^2}|\tilde{\ell}_{R,k}|^2\left(|H_1^-|^2 + |H_1^0|^2\right) + \sum_k \frac{2m^2_{\ell_k}}{v_1^2}|\tilde{\nu}_k|^2|H_1^-|^2 \\
&+ \sum_k \frac{2m^2_{\ell_k}}{v_1^2}|\tilde{\ell}_{L,k}|^2|H_1^0|^2 - \sum_k \frac{2m^2_{\ell_k}}{v_1^2}\Big(\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{L,k}H_1^-(H_1^0)^* + \tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{L,k}(H_1^-)^*H_1^0\Big) \\
&+ \sum_k \frac{2m^2_{d_k}}{v_1^2}|\tilde{d}_{R,k}|^2|H_1^-|^2 + \sum_k \frac{2m^2_{u_k}}{v_2^2}|\tilde{u}_{R,k}|^2|H_2^0|^2 \\
&- \sum_{k,l}\frac{2m_{d_l}m_{u_k}}{v_1v_2}\Big(V^{CKM}_{kl}\tilde{d}_{R,l}\tilde{u}^*_{R,k}H_2^0(H_1^-)^* + V^{CKM\,*}_{kl}\tilde{d}^*_{R,l}\tilde{u}_{R,k}(H_2^0)^*H_1^-\Big) \\
&+ \sum_k \frac{2m^2_{u_k}}{v_2^2}|\tilde{d}_{L,k}|^2|H_2^+|^2 + \sum_k \frac{2m^2_{u_k}}{v_2^2}|\tilde{u}_{L,k}|^2|H_2^0|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{k,l}\frac{2m_{u_k}^2}{v_2^2}\Big(V_{kl}^{CKM}\tilde{d}_{L,l}\tilde{u}_{L,k}^*H_2^+(H_2^0)^*+V_{kl}^{CKM\,*}\tilde{d}_{L,l}^*\tilde{u}_{L,k}(H_2^+)^*H_2^0\Big)\\
&+\sum_k\frac{2m_{d_k}^2}{v_1^2}|\tilde{d}_{R,k}|^2|H_1^0|^2+\sum_k\frac{2m_{u_k}^2}{v_2^2}|\tilde{u}_{R,k}|^2|H_2^+|^2\\
&-\sum_{k,l}\frac{2m_{d_k}m_{u_l}}{v_1v_2}\Big(V_{lk}^{CKM}\tilde{d}_{R,k}\tilde{u}_{R,l}^*H_2^+(H_1^0)^*+V_{lk}^{CKM\,*}\tilde{d}_{R,k}^*\tilde{u}_{R,l}(H_2^+)^*H_1^0\Big)\\
&+\sum_k\frac{2m_{d_k}^2}{v_1^2}|\tilde{u}_{L,k}|^2|H_1^-|^2+\sum_k\frac{2m_{d_k}^2}{v_1^2}|\tilde{d}_{L,k}|^2|H_1^0|^2\\
&-\sum_{k,l}\frac{2m_{d_k}^2}{v_1^2}\Big(V_{lk}^{CKM}\tilde{d}_{L,k}\tilde{u}_{L,l}^*H_1^0(H_1^-)^*+V_{lk}^{CKM\,*}\tilde{d}_{L,k}^*\tilde{u}_{L,l}(H_1^0)^*H_1^-\Big) \qquad (6.31)
\end{aligned}
$$

Kommen wir nun zu den Termen, die die zweiten Ableitungen des Superpotentials enthalten, von der Form Fermion-Fermion-Skalar. Berücksichtigt man die Tatsache der Symmetrie der gemischten zweiten Ableitungen,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{k,l}\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\phi_k\partial\phi_l}\overline{\psi_{k,R}}\psi_{l,L}+\text{h.c.}\\
&\qquad=\frac{1}{2}\sum_{k<l}\left(\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\phi_k\partial\phi_l}\overline{\psi_{k,R}}\psi_{l,L}+\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\phi_l\partial\phi_k}\overline{\psi_{l,R}}\psi_{k,L}\right)+\text{h.c.}\\
&\qquad=\frac{1}{2}\sum_{k<l}\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\phi_k\partial\phi_l}\left(\overline{\psi_{k,R}}\psi_{l,L}+\overline{\psi_{l,R}}\psi_{k,L}\right)+\text{h.c.}\\
&\qquad=\sum_{k<l}\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\phi_k\partial\phi_l}\overline{\psi_{k,R}}\psi_{l,L}+\text{h.c.}, \qquad (6.32)
\end{aligned}
$$

verschwindet der Vorfaktor zwei und man bekommt:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{k,l}\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\phi_k\partial\phi_l}\overline{\psi_{k,R}}\psi_{l,L}+\text{h.c.}=\\
&\quad\mu\left(\overline{h_{1,R}^0}h_{2,L}^0\right)-\mu\left(\overline{h_{1,R}^-}h_{2,L}^+\right)-\sum_k\frac{\sqrt{2}m_{l_k}}{v_1}\left(\overline{h_{1,R}^0}\psi_L[\ell_k^-]\right)\tilde{\ell}_{R,k}^+\\
&\quad-\sum_k\frac{\sqrt{2}m_{l_k}}{v_1}\left(\overline{h_{1,R}^0}\psi_L[\ell_k^+]\right)\tilde{\ell}_{L,k}^--\sum_k\frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}\left(\overline{h_{1,R}^0}\psi_L[d_k]\right)\tilde{d}_{R,k}^*\\
&\quad-\sum_k\frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}\left(\overline{h_{1,R}^0}\psi_L[d_k^c]\right)\tilde{d}_{L,k}+\sum_k\frac{\sqrt{2}m_{l_k}}{v_1}\left(\overline{h_{1,R}^-}\psi_L[\nu_k]\right)\tilde{\ell}_{R,k}^+\\
&\quad+\sum_k\frac{\sqrt{2}m_{l_k}}{v_1}\left(\overline{h_{1,R}^-}\psi_L[\ell_k^+]\right)\tilde{\nu}_k+\sum_{k,l}\frac{\sqrt{2}m_{d_l}}{v_1}\left(\overline{h_{1,R}^-}\psi_L[u_k]\right)V_{kl}^{CKM\,*}\tilde{d}_{R,l}^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k,l}\frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}\left(\overline{h_{1,R}^{-}}\psi_L[d_k^c]\right)V_{lk}^{CKM\,*}\tilde{u}_{L,l}-\sum_{k}\frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\left(\overline{h_{2,R}^{0}}\psi_L[u_k]\right)\tilde{u}_{R,k}^{*}\\
&-\sum_{k}\frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\left(\overline{h_{2,R}^{0}}\psi_L[u_k^c]\right)\tilde{u}_{L,k}+\sum_{k,l}\frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\left(\overline{h_{2,R}^{+}}\psi_L[u_k^c]\right)V_{kl}^{CKM}\tilde{d}_{L,l}\\
&+\sum_{k,l}\frac{\sqrt{2}m_{u_l}}{v_2}\left(\overline{h_{2,R}^{+}}\psi_L[d_k]\right)V_{lk}^{CKM}\tilde{u}_{R,l}^{*}\\
&+\sum_{k,l}\frac{\sqrt{2}m_{d_l}}{v_1}\left(\overline{\psi_R[u_k]}\psi_L[d_l^c]\right)V_{kl}^{CKM\,*}H_1^{-}\\
&+\sum_{k,l}\frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\left(\overline{\psi_R[u_k^c]}\psi_L[d_l]\right)V_{kl}^{CKM}H_2^{+}\\
&+\sum_{k}\frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}\left(\overline{\psi_R[\nu_k]}\psi_L[\ell_l^{+}]\right)H_1^{-}\ +\text{h.c.}\\
&-\sum_{k}\frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\left(\overline{u_k}u_k\right)\Re[H_2^0]+\mathrm{i}\sum_{k}\frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\left(\overline{u_k}\gamma^5u_k\right)\Im[H_2^0]\\
&-\sum_{k}\frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}\left(\overline{d_k}d_k\right)\Re[H_1^0]+\mathrm{i}\sum_{k}\frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_2}\left(\overline{d_k}\gamma^5d_k\right)\Im[H_1^0]\\
&-\sum_{k}\frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}\left(\overline{\ell_k}\ell_k\right)\Re[H_1^0]+\mathrm{i}\sum_{k}\frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_2}\left(\overline{\ell_k}\gamma^5\ell_k\right)\Im[H_1^0]
\end{aligned}\tag{6.33}
$$

In dieser Auflistung bedeutet der Ausdruck $\psi[\ldots]$ den Majorana-Spinor, der aus dem Spin-1/2-Feld des jeweiligen chiralen Superfeldes zu bilden ist. Die Terme oben enthalten Massenterme der Higgsinos sowie - dies wurde bereits angesprochen - die Yukawa-Wechselwirkungen vom Typ $(\ell,q,\nu)-\tilde{H}-(\tilde{\ell},\tilde{q},\tilde{\nu})$ sowie von der Art $(q,\ell)-H-(q,\ell)$.

6.6.2 Weitere Potentialterme

Der D-Term der $U(1)_Y$-Eichgruppe nimmt die folgende Gestalt an, wenn man einen Faktor $\frac{1}{4}$ herauszieht sowie die Hyperladungen der jeweiligen Teilchen berücksichtigt:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{8}g'^2\Bigg(&\frac{1}{3}|\tilde{u}_L|^2+\frac{1}{3}|\tilde{d}_L|^2-|\tilde{\nu}|^2-|\tilde{e_L}|^2-\frac{4}{3}|\tilde{u}_R|^2+\frac{2}{3}|\tilde{d}_R|^2+2|\tilde{e}_R|^2+\text{ü.G.}\\
&-|H_1^0|^2-|H_1^-|^2+|H_2^+|^2+|H_2^0|^2+2\frac{\xi_{U(1)_Y}}{g'}\Bigg)^2
\end{aligned}\tag{6.34}
$$

Zur Berechnung des entsprechenden D-Termes der $SU(2)_L$-Eichgruppe benötigen wir die folgende Relation für die Darstellungsmatrizen der Fundamentaldarstellung, die Pauli-Matrizen:

$$(\vec{\tau})_{il} \cdot (\vec{\tau})_{kj} = 2\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{kj} \tag{6.35}$$

Man kann dies unmittelbar nachprüfen, oder überlege sich folgendes: $\delta_{ij}\delta_{kl}$ als ein rotationsinvarianter Tensor kann durch eine Linearkombination der Basiselemente rotationsinvarianter Tensoren $(\vec{\tau})_{il} \cdot (\vec{\tau})_{kj}$ und $\delta_{il}\delta_{kj}$ ausgedrückt werden. Die Koeffizienten erhält man durch Spurbildung bezüglich der Indizes i, j und i, l.

Damit kann man die quadratischen Terme wie folgt umformen, z.B.:

$$(Q_i^\dagger \vec{\tau}_{il} Q_l)(Q_k^\dagger \vec{\tau}_{kj} Q_j) = Q_i^\dagger Q_k^\dagger Q_j Q_k (2\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{kj}) = (Q^\dagger Q)^2,$$

wo die Abkürzung

$$(A^\dagger B) = \sum_{i=1}^{2} A_i^\dagger B_i \tag{6.36}$$

eingeführt wurde. Für die gemischten Terme erhält man ebenso leicht:

$$(Q_i^\dagger \vec{\tau}_{il} Q_l)(L_k^\dagger \vec{\tau}_{kj} L_j) = 2(Q^\dagger L)(L^\dagger Q) - (Q^\dagger Q)(L^\dagger L)$$

Zieht man die Faktoren von den $SU(2)_L$-Generatoren $T^a = \frac{1}{2}\tau^a$ heraus, so erhält man:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8}g^2 \Bigg(& \sum_{b=1}^{3} (Q_b^\dagger Q_b)^2 + 4\sum_{a<b} (Q_a^\dagger Q_b)(Q_b^\dagger Q_a) - 2\sum_{a<b} (Q_a^\dagger Q_a)(Q_b^\dagger Q_b) \\
& + \sum_{b=1}^{3} (L_b^\dagger L_b)^2 + 4\sum_{a<b} (L_a^\dagger L_b)(L_b^\dagger L_a) - 2\sum_{a<b} (L_a^\dagger L_a)(L_b^\dagger L_b) \\
& + (H_1^\dagger H_1)^2 + (H_2^\dagger H_2)^2 + 4\sum_{a,b} |Q_a^\dagger L_b|^2 - 2\sum_{a,b} (Q_a^\dagger Q_a)(L_b^\dagger L_b) \\
& + 4\sum_{b=1}^{3} |Q_b^\dagger H_1|^2 - 2\sum_{b=1}^{3} (Q_b^\dagger Q_b)(H_1^\dagger H_1) + 4\sum_{b=1}^{3} |Q_b^\dagger H_2|^2 \\
& - 2\sum_{b=1}^{3} (Q_b^\dagger Q_b)(H_2^\dagger H_2) + 4\sum_{b=1}^{3} |L_b^\dagger H_1|^2 - 2\sum_{b=1}^{3} (L_b^\dagger L_b)(H_1^\dagger H_1) \\
& + 4\sum_{b=1}^{3} |L_b^\dagger H_2|^2 - 2\sum_{b=1}^{3} (L_b^\dagger L_b)(H_2^\dagger H_2)
\end{aligned}$$

$$+ 4|H_1^\dagger H_2|^2 - 2(H_1^\dagger H_1)(H_2^\dagger H_2)\Bigg) \tag{6.37}$$

Schließlich wenden wir uns der $SU(3)_C$-Eichgruppe zu; hier gilt eine analoge Relation wie im Falle der $SU(2)_L$, die sich genauso beweisen läßt. Wir lassen allerdings die Eichgruppe insofern offen, als daß wir einen $SU(N)$-Ansatz machen, und für die dabei entstehenden Konstanten jederzeit auf $N = 3$ spezialisieren können.

$$(\vec{\lambda})_{il} \cdot (\vec{\lambda})_{kj} = 4T_F\left(\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{1}{N}\delta_{il}\delta_{kj}\right) \tag{6.38}$$

Der Faktor 4 relativ zu üblichen Gleichungen dieser Art rührt von der Tatsache her, daß wir die Gell-Mann-Matrizen und nicht die eigentlichen Generatoren, also die durch zwei dividierten Gell-Mann-Matrizen verwendet haben. T_F ist die Normierung der Spur zweier Generatoren, die per Konvention $1/2$ ist. Daraus lassen sich sofort die quadratischen Terme, z.B.

$$(Q_{u,i}^*\vec{\lambda}_{il}Q_{u,l})(Q_{u,k}^\dagger\vec{\lambda}_{kj}Q_{u,j}) = 4T_F\left(1 - \frac{1}{N}\right)(Q_u^*Q_u)^2 \tag{6.39}$$

sowie die gemischten Terme

$$\begin{aligned}(Q_{d,i}^*\vec{\lambda}_{il}Q_{d,l})(\bar{U}_k\vec{\lambda}_{kj}\bar{U}_j^*) &= 4T_F|Q_d^*\bar{U}^*|^2 - \frac{4}{N}T_F(Q_d^*Q_d)(\bar{U}^*\bar{U}) \\ &= 4T_F\left(1 - \frac{1}{N}\right)(Q_d^*Q_d)(\bar{U}^*\bar{U}) \end{aligned} \tag{6.40}$$

berechnen. In diesen Ausdrücken bedeutet Q_u bzw. Q_d die obere bzw. untere Komponente der $SU(2)_L$-Dubletts. Weiterhin ist die bereits oben stillschweigend verwendete Summation über die Farben auszuführen, in denen die Zustände in den Produkten hier wie auch im Falle der beiden anderen Eichgruppen diagonal sind. Die Diagonalität der Farbzustände der Quarks bezüglich der Dublettstruktur $SU(2)_L$ sorgt dafür, daß keinerlei CKM-Matrizen in den Wechselwirkungstermen der starken Wechselwirkung der Squarks auftreten. Es ergeben sich eine weitere Zahl hübscher Terme (wiederum wird der Faktor $\frac{1}{2}$ der Generatoren herausgezogen):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}T_F\left(1 - \frac{1}{N}\right)g_s^2\Bigg(&\sum_{k,l}(u_{L,k}^*u_{L,k})(u_{L,l}^*u_{L,l}) + \sum_{k,l}(d_{L,k}^*d_{L,k})(d_{L,l}^*d_{L,l}) \\ &+ \sum_{k,l}(\tilde{u}_{R,k}^*\tilde{u}_{R,k})(\tilde{u}_{R,l}^*\tilde{u}_{R,l}) + \sum_{k,l}(\tilde{d}_{R,k}^*\tilde{d}_{R,k})(\tilde{d}_{R,l}^*\tilde{d}_{R,l}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{k,l} (\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,k})(\tilde{u}^*_{R,l}\tilde{u}_{R,l}) - \sum_{k,l} (\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,k})(\tilde{u}^*_{R,l}\tilde{u}_{R,l}) \\
&- \sum_{k,l} (\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,k})(\tilde{d}^*_{R,l}\tilde{d}_{R,l}) + \sum_{k,l} (\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{u}_{R,k})(\tilde{d}^*_{R,l}\tilde{d}_{R,l}) \Bigg)
\end{aligned}
\tag{6.41}
$$

6.7 Der Higgs-Sektor

Aus der Gestalt des die Higgs-Felder (und nur diese) enthaltenden Anteils des Potentials der MSSM-Lagrangedichte kann man die Vakuumerwartungswerte (VEWs) extrahieren. Das Higgs-Potential setzt sich aus drei Teilen zusammen: Den D-Termen der chiralen Superfelder, den Anteilen aus dem Superpotential sowie den superrenormierbaren Termen, die auch als *soft supersymmetry breaking*-Terme bezeichnet werden. Insgesamt hat man:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{Higgs}} = {} & |\mu|^2 \Big[(H_1^\dagger H_1) + (H_2^\dagger H_2) \Big] + \frac{1}{8} g'^2 \Big[(H_2^\dagger H_2) - (H_1^\dagger H_1) + \frac{2\xi_{U(1)_Y}}{g'} \Big]^2 \\
& + \frac{1}{8} g^2 \Big[4|(H_1^\dagger H_2)|^2 - 2(H_1^\dagger H_1)(H_2^\dagger H_2) + (H_1^\dagger H_1)^2 + (H_2^\dagger H_2)^2 \Big] \\
& + \tilde{m}_1^2 (H_1^\dagger H_1) + \tilde{m}_2^2 (H_2^\dagger H_2) + \frac{1}{2} \Big[B\mu H_1^i \epsilon_{ij} H_2^j + \text{h.c.} \Big]
\end{aligned}
\tag{6.42}
$$

Hierin bedeutet wiederum

$$
(H_1^\dagger H_1) = \sum_{i=1}^{2} H_1^{i\,*} H_1^i \tag{6.43}
$$

und entsprechend in den anderen Fällen. Ähnlich wie im (nicht-supersymmetrischen) Standardmodell (3.4) muß man die Entwicklung der Higgs-Felder um deren VEWs parametrisieren. Dazu rufe man sich die auftretenden Freiheitsgrade in Erinnerung: Zwei Dubletts mit insgesamt vier *komplexen* skalaren Feldern besitzen acht Freiheitsgrade; drei davon werden für die elektroschwache Symmetriebrechung benötigt, um den W- und Z-Bosonen Massen zu verleihen. Es bleiben fünf physikalische Higgs-Teilchen übrig, die sich als zwei reelle Skalare h und H (per Konvention mit $m_h < m_H$), ein Pseudoskalar A sowie zwei geladene Higgs-Teilchen $H^\pm$ (Vorsicht, nicht mit den geladenen komplexen Komponenten der Higgs-Dubletts verwechseln!!!) entpuppen. In der jetzt beginnenden Diskussion der möglichen Vakua und der Higgs-Felder folgen wir im wesentlichen [5], s. auch [17], [18]. Das Problem ist, die (nicht-trivialen) Minima des Potentials (6.42) zu finden. Dominierend sind die quartischen Anteile, die aber bei der speziellen Wahl der Higgs-Felder

$$H_1 = \begin{pmatrix} \Phi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi \end{pmatrix} \tag{6.44}$$

zum Verschwinden gebracht werden können. Bringt man das Higgs-Potential noch auf eine günstige Form, wobei man noch mittels einer Umdefinition der Superfelder dafür Sorge tragen kann, daß $B\mu$ reell und positiv wird,

$$\begin{aligned} V_{\text{Higgs}} = \frac{g^2}{2} \left|(H_1^\dagger H_2)\right|^2 + \frac{g^2 + g'^2}{8} \left[(H_1^\dagger H_1) - (H_2^\dagger H_2)\right]^2 \\ + (m_1^2 + |\mu|^2)(H_1^\dagger H_1) + (m_2^2 + |\mu|^2)(H_2^\dagger H_2) \\ - (B\mu)\Re\left[H_1^0 H_2^0 - H_1^- H_2^+\right] + \frac{1}{2}\xi_{U(1)_Y}^2. \end{aligned} \tag{6.45}$$

Hierin wurden die Parameter aus dem superrenormierbaren Anteil umdefiniert:

$$m_1^2 \equiv \tilde{m}_1^2 - \frac{1}{2} g' \xi_{U(1)_Y}, \qquad m_2^2 \equiv \tilde{m}_2^2 + \frac{1}{2} g' \xi_{U(1)_Y} \tag{6.46}$$

Da die Fayet-Iliopoulos-Konstante noch klein ist (s. [25]), ist diese Abänderung nahezu vernachlässigbar.

Setzt man dann (6.44) in das Potential (6.45) ein, sieht man, daß

$$V_\Phi = (2|\mu|^2 + m_1^2 + m_2^2)|\Phi|^2 - (B\mu)|\Phi|^2 + \frac{1}{2}\xi_{U(1)_Y}^2. \tag{6.47}$$

Die Stabilität des physikalischen Systems gebietet die Beschränktheit des Potentials nach unten, und deswegen hat man eine Einschränkung an die soft breaking-Parameter m_i^2 (der Term quadratisch in der Fayet-Iliopoulos-Konstanten spielt wegen seiner Kleinheit in dieser Abschätzung keine Rolle):

$$2|\mu|^2 + m_1^2 + m_2^2 \geq (B\mu) \tag{6.48}$$

Da wir uns für den Fall einer ungebrochenen elektromagnetischen Eichsymmetrie interessieren, dürfen nur die neutralen Higgs-Felder nichtverschwindende VEWs erhalten, weshalb wir nun den neutralen Anteil aus (6.45) extrahieren.

$$\begin{aligned} V_{\text{Higgs}}^{\text{neutral}} = \frac{g^2 + g'^2}{8} \left[|H_1^0|^2 - |H_2^0|^2\right]^2 + (m_1^2 + |\mu|^2)|H_1^0|^2 \\ + (m_2^2 + |\mu|^2)|H_2^0|^2 - (B\mu)\Re[H_1^0 H_2^0] + \text{konst.} \end{aligned} \tag{6.49}$$

Wie im Falle des Standardmodells mit nur einem Higgs-Dublett spalten wir die VEWs ab (die wiederum als $v_i/\sqrt{2}$ definiert werden) und entwickeln die neutralen Higgs-Felder um diese,

$$H_1^0 = \frac{v_1}{\sqrt{2}} + \phi_1, \qquad H_2^0 = \frac{v_2}{\sqrt{2}} + \phi_2 \tag{6.50}$$

Die Terme dritter und vierter Ordnung in den Feldern ϕ_i werden hier nicht benötigt, deshalb wird das Potential nur bis zur quadratischen Ordnung in den ϕ_i betrachtet (der Rest wird natürlich später nachgetragen, wenn die vollständige Parametrisierung vorliegt):

$$\begin{aligned} V_{\phi^2}^{\text{neutral}} &= \frac{g^2+g'^2}{8}(|v_1|^2-|v_2|^2)\left[\sqrt{2}\,\Re[v_1^*\phi_1 - v_2^*\phi_2] + |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2\right] \\ &+ \frac{g^2+g'^2}{4}\left[\Re[v_1^*\phi_1 - v_2^*\phi_2]\right]^2 + (m_1^2+|\mu|^2)\left(\sqrt{2}\Re[v_1^*\phi_1] + |\phi_1|^2\right) \\ &+ (m_2^2+|\mu|^2)\left(\sqrt{2}\Re[v_2^*\phi_2] + |\phi_2|^2\right) \\ &- (B\mu)\Re\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1\phi_2 + v_2\phi_1) + \phi_1\phi_2\right] + \text{konst.} \end{aligned} \tag{6.51}$$

Die Extremalitätsbedingungen des Potentials lauten nun:

$$\left.\frac{\partial V_{\phi^2}^{\text{neutral}}}{\partial \phi_1}\right|_{\phi_1=0} = \left.\frac{\partial V_{\phi^2}^{\text{neutral}}}{\partial \phi_2}\right|_{\phi_2=0} \tag{6.52}$$

Beachte, daß die ϕ_i ja bereits Entwicklungen um den Vakuumzustand darstellen, so daß man tatsächlich die Stelle $\phi_1, \phi_2 = 0$ betrachten muß. Die in den ϕ_i linearen Terme verschwinden also, was uns zwei Bedingungen beschert:

$$(m_1^2+|\mu|^2)v_1^* + \frac{g^2+g'^2}{8}\left(|v_1|^2-|v_2|^2\right)v_1^* - \frac{1}{2}(B\mu)v_2 = 0, \tag{6.53}$$

$$(m_2^2+|\mu|^2)v_2^* + \frac{g^2+g'^2}{8}\left(|v_2|^2-|v_1|^2\right)v_2^* - \frac{1}{2}(B\mu)v_1 = 0. \tag{6.54}$$

Man kann nun wiederum eine Phasenkonvention treffen, nämlich die relative Phase der beiden Felder ϕ_i so einzurichten, daß v_1 reell wird. Damit folgt aus (6.53),(6.53) sofort, daß auch der VEW v_2 reell sein muß, und wir können (6.53), (6.54) in modifizierter Form aufschreiben:

$$(m_1^2+|\mu|^2)v_1 + \frac{g^2+g'^2}{8}\left(v_1^2-v_2^2\right)v_1 - \frac{1}{2}(B\mu)v_2 = 0, \tag{6.55}$$

$$(m_2^2+|\mu|^2)v_2 + \frac{g^2+g'^2}{8}\left(v_2^2-v_1^2\right)v_2 - \frac{1}{2}(B\mu)v_1 = 0. \tag{6.56}$$

An dieser Stelle führen wir einige Definitionen ein, von denen die erste (6.13) schon bekannt ist:

$$\begin{aligned} \tan\beta &= \frac{v_2}{v_1}, && (6.57)\\ m_Z^2 &= \frac{1}{4}(g^2+g'^2)(v_1^2+v_2^2), && (6.58)\\ m_A^2 &= 2|\mu|^2+m_1^2+m_2^2. && (6.59) \end{aligned}$$

Die erste Definition betrifft das Verhältnis der VEWs, die zweite das Massenquadrat der Z-Masse (vgl. hierzu die Definition im Standardmodell in (2.3)), die dritte gibt das Massenquadrat des pseudoskalaren neutralen Higgs-Bosons an, wie wir unten sehen werden.

Aus diesen Definitionen und den Bedingungen (6.55), (6.56) kann man viele nützliche Relationen ziehen. Multipliziert man (6.55) mit v_2 und (6.56) mit v_1 und addiert bzw. subtrahiert man die beiden so erhaltenen Gleichungen, ergibt sich:

$$B\mu = \frac{2v_1v_2m_A^2}{v_1^2+v_2^2} = m_A^2\sin(2\beta) \tag{6.60}$$

und mit dieser Beziehung dann:

$$m_1^2-m_2^2 = \frac{1}{2}(B\mu)\frac{v_2^2-v_1^2}{v_1v_2}-\frac{g^2+g'^2}{4}(v_1^2-v_2^2) = -(m_A^2+m_Z^2)\cos(2\beta). \tag{6.61}$$

Dadurch kann man die in (6.51) auftretenden Größen mithilfe der Massen und Parameter der Higgs-Felder ausdrücken:

$$\begin{aligned} \underline{m_1^2+|\mu|^2} &= m_1^2-m_2^2+m_2^2+|\mu|^2 = \frac{1}{2}(m_1^2-m_2^2)+\frac{1}{2}\left(m_1^2+m_2^2+2|\mu|^2\right)\\ &= \underline{\frac{1}{2}m_A^2-\frac{1}{2}(m_A^2+m_Z^2)\cos(2\beta)} \end{aligned} \tag{6.62}$$

$$\underline{m_2^2+|\mu|^2} = 2|\mu|^2+m_1^2+m_2^2-(m_1^2+|\mu|^2) = \underline{\frac{1}{2}m_A^2+\frac{1}{2}(m_A^2+m_Z^2)\cos(2\beta)} \tag{6.63}$$

Jetzt ist man in der Lage, die gewonnenen Ergebnisse in das Potential (6.51) einzusetzen, wobei man natürlich die Terme linearer Ordnung, die ja herausfallen, wegläßt:

$$\begin{aligned} V_{\phi^2}^{\text{neutral}} &= \frac{g^2+g'^2}{8}(v_1^2-v_2^2)\left[|\phi_1|^2-|\phi_2|^2\right]+\frac{g^2+g'^2}{4}\Big[\Re[v_1\phi_1-v_2\phi_2]\Big]^2\\ &\quad+(m_1^2+|\mu|^2)|\phi_1|^2+(m_2^2+|\mu|^2)|\phi_2|^2-(B\mu)\Re[\phi_1\phi_2]+\text{konst.} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= m_Z^2 \Big[\Re[\cos\beta\ \phi_1 - \sin\beta\ \phi_2] \Big]^2 + \frac{1}{2} m_A^2 (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) \\
&\quad - \frac{1}{2} m_A^2 \cos(2\beta) \left[|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2 \right] - m_A^2 \sin(2\beta) \Re[\phi_1 \phi_2] + \text{konst.}
\end{aligned}
\tag{6.64}
$$

Hierin hat sich ein Term $\frac{1}{2} m_Z^2 \cos(2\beta) \left[|\phi_1|^2 - |\phi_1|^2\right]$ aus dem ersten Term der 1. Zeile sowie aus den ersten beiden Termen der 2. Zeile weggehoben.

Die Real- und Imaginärteile der Felder ϕ_1 und ϕ_2 entkoppeln, es treten nur Terme der Gestalt $\Re[\phi_1]\Re[\phi_2]$ bzw. $\Im[\phi_1]\Im[\phi_2]$ auf. Dies erlaubt es also, Real- und Imaginärteile der neutralen Higgs-Felder getrennt zu betrachten, sowie auch deren Massenquadrats-Matrizen separat zu diagonalisieren. Die Matrix der Massenquadrate der Imaginärteile besitzt die Gestalt:

$$
(M^2)_{\Im[\phi]} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} m_A^2 (1 - \cos(2\beta)) & \frac{1}{2} m_A^2 \sin(2\beta) \\ \frac{1}{2} m_A^2 \sin(2\beta) & \frac{1}{2} m_A^2 (1 + \cos(2\beta)) \end{pmatrix}
\tag{6.65}
$$

Die Eigenwerte sind leicht zu erkennen, nämlich

$$
\boxed{m_{\mathrm{Im}_1} = 0, \qquad m_{\mathrm{Im}_2} = m_A^2}
\tag{6.66}
$$

Das erste der beiden Masseneigenzustände ist ein Goldstone-Boson, das die Position des longitudinalen Eichboson-Zustandes im BRST-Quartett einnimmt (s. [7],[19]), während das zweite als rein imaginäres Feld ein unter der Ladungskonjugation und Parität ungerader Zustand ist, das oben angekündigte pseudoskalare physikalische Higgs A. Da m_A^2 nun als Massenquadrat eines physikalischen Teilchens entlarvt ist, steht fest, daß es auch positiv sein muß. Die Gleichungen (6.48), (6.59) und (6.60) zeigen, daß dies möglich ist, wenn der Winkel β die Bedingung

$$
0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}
\tag{6.67}
$$

erfüllt. Phänomenologisch darf man $B\mu = 0$ ausschließen, s. [5]. Untersucht man die orthogonale Transformation der Imaginärteile, so stellt man fest, daß der Mischungswinkel gegeben ist durch den Winkel β, man erhält die Relation $\tan(2\theta_{\Im[\phi]}) = \tan(2\beta)$. Damit haben wir uns bereits folgende Parametrisierung erarbeitet, wobei ein Faktor $\sqrt{2}$ der Normierung aus dem Feld A herausgezogen wird:

$$
H_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 + \Re[\phi_1] + \mathrm{i} A \sin\beta) \\ H_1^- \end{pmatrix}, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (v_2 + \Re[\phi_2] + \mathrm{i} A \cos\beta) \end{pmatrix}.
\tag{6.68}
$$

Als nächstes wenden wir uns der Matrix der Massenquadrate der Realteile der Felder ϕ_i zu, deren Gestalt man wieder aus (6.64) abliest:

$$(M^2)_{\Re[\phi]} = \begin{pmatrix} \frac{m_A^2}{2}(1-\cos(2\beta)) + \frac{m_Z^2}{2}(1+\cos(2\beta)) & -\frac{1}{2}(m_A^2+m_Z^2)\sin(2\beta) \\ -\frac{1}{2}(m_A^2+m_Z^2)\sin(2\beta) & \frac{m_A^2}{2}(1+\cos(2\beta)) + \frac{m_Z^2}{2}(1-\cos(2\beta)) \end{pmatrix} \tag{6.69}$$

Aus der Eigenwertgleichung

$$\lambda^2 - \lambda \cdot (m_A^2 + m_Z^2) - m_A^2 m_Z^2 \cos^2(2\beta) \stackrel{!}{=} 0$$

ergeben sich sofort die Massen-Eigenwerte:

$$m_H^2 = \frac{1}{2}\left[m_A^2 + m_Z^2 + \sqrt{(m_A^2+m_Z^2)^2 - 4m_A^2 m_Z^2 \cos^2(2\beta)}\right] \tag{6.70}$$

$$m_h^2 = \frac{1}{2}\left[m_A^2 + m_Z^2 - \sqrt{(m_A^2+m_Z^2)^2 - 4m_A^2 m_Z^2 \cos^2(2\beta)}\right] \tag{6.71}$$

Führt man jetzt die orthogonale Transformation der Realteile der Felder ϕ_i durch, kann man die Matrix der Massenquadrate von rechts und links mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

bzw. ihrem Inversen multiplizieren. Aus der Forderung, daß die Nebendiagonalelemente verschwinden müssen, bekommt man eine Verknüpfung zwischen den Mischungswinkeln α und β sowie den Massen des Z- und der Higgs-Bosonen:

$$\tan(2\alpha) = \tan(2\beta) \cdot \frac{m_A^2 + m_Z^2}{m_A^2 - m_Z^2} = \tan(2\beta) \cdot \frac{m_h^2 + m_H^2}{m_A^2 - m_Z^2} \tag{6.72}$$

Benutzt man noch die Relationen aus Anhang D, so sieht man, daß

$$\cos(2\alpha) = -\cos(2\beta) \cdot \frac{m_A^2 - m_Z^2}{m_H^2 - m_h^2} \tag{6.73}$$

$$\sin(2\alpha) = -\sin(2\beta) \cdot \frac{m_A^2 + m_Z^2}{m_H^2 - m_h^2} \tag{6.74}$$

Man sieht, daß hier die Massen zweier physikalischer skalarer neutraler Bosonen vorliegen, mit der Ungleichung

$$m_h < m_H. \tag{6.75}$$

Es bleibt nur noch übrig, eine etwaige Mischung der geladenen Higgs-Bosonen zu untersuchen; dazu brauchen wir für das Potential der geladenen Higgs-Bosonen nur die VEWs der neutralen mitzunehmen. Für diese Diskussion definieren wir die Masse der W-Bosonen:

$$m_W^2 = \frac{1}{4} g^2 (v_1^2 + v_2^2) \tag{6.76}$$

Beachte, daß sich daraus das gleiche Verhältnis der Quadrate von W- und Z-Masse ergibt wie im (nicht-supersymmetrischen) Standardmodell, nämlich

$$\frac{m_W^2}{m_Z^2} = \frac{g^2}{g^2 + g'^2} = \cos^2 \theta_W, \tag{6.77}$$

mit dem Weinberg-Winkel θ_W.

Man betrachtet wiederum das Potential nur bis zur quadratischen Ordnung, setzt darin (6.60), (6.62), (6.60) und (6.76) ein, so erhält man aus (6.45):

$$\begin{aligned}
V_{\phi^2}^{\text{geladen}} &= \frac{g^2}{4} \left| v_2 H_1^{-\,*} + v_1 H_2^+ \right|^2 + \frac{g^2 + g'^2}{8} (v_1^2 - v_2^2) \left(|H_1^-|^2 - |H_2^+|^2 \right) \\
&\quad + (m_1^2 + |\mu|^2) |H_1^-|^2 + (m_2^2 + |\mu|^2) |H_2^+|^2 + (B\mu) \Re[H_1^- H_2^+] + \text{konst.} \\
&= \left(\frac{g^2}{4} v_2^2 + \frac{g^2 + g'^2}{8} (v_1^2 - v_2^2) + m_1^2 + |\mu|^2 \right) |H_1^-|^2 \\
&\quad + \left(\frac{g^2}{4} v_1^2 - \frac{g^2 + g'^2}{8} (v_1^2 - v_2^2) + m_2^2 + |\mu|^2 \right) |H_2^+|^2 \\
&\quad + \left(\frac{g^2}{2} v_1 v_2 + (B\mu) \right) \Re[H_1^- H_2^+] + \text{konst.} \\
&= \frac{1}{2} (m_W^2 + m_A^2) \Big[|H_1^-|^2 (1 - \cos(2\beta)) + |H_2^+|^2 (1 + \cos(2\beta)) \\
&\quad + 2 \sin(2\beta) \Re[H_1^- H_2^+] \Big] + \text{konst.}
\end{aligned} \tag{6.78}$$

Wie im Falle der neutralen Higgs-Bosonen entkoppeln die Real- und Imaginärteile voneinander; die Matrix der Massenquadrate ist jetzt leicht abzulesen:

$$\frac{1}{2} (m_W^2 + m_A^2) \begin{pmatrix} 1 - \cos(2\beta) & \pm \sin(2\beta) \\ \pm \sin(2\beta) & 1 + \cos(2\beta) \end{pmatrix} \tag{6.79}$$

Das obere Vorzeichen gilt für die Realteile, das untere für die Imaginärteile. Man sieht sofort, daß die Determinante der obigen Matrizen verschwindet.

Sowohl für die Real- wie die Imaginärteile ist also einer der Eigenwerte Null, der andere Eigenwert ist gleich der Spur der Matrizen und damit gleich

$$m_{H^\pm} = m_W^2 + m_A^2 \tag{6.80}$$

Die beiden masselosen Masseneigenzustände sind natürlich wieder Goldstone-Bosonen, die als BRST-Quartett-Mitglieder für die spontane Brechung der $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$-Eichinvarianz gebraucht werden. Dagegen sind die beiden Zustände mit der gleichen Masse (6.80) physikalische Teilchen, die geladene Higgs-Bosonen darstellen. Eine Betrachtung der orthogonalen Transformation zeigt, daß Real- und Imaginärteile mit dem entgegensetzten Winkel $\pm\beta$ verdreht werden. Damit hat die Mischung folgende Konsequenz:

$$\begin{aligned} H_1^- = \; & \Re[H_1^-] + \mathrm{i}\Im[H_1^-] \\ & \longrightarrow \sin\beta\Re[H_1^-] + \cos\beta\Re[H_2^+] - \mathrm{i}\sin\beta\Im[H_1^-] + \mathrm{i}\cos\beta\Im[H_2^+] \\ & \equiv \sin\beta H^- + \cos\beta\phi^+ \qquad (6.81) \\ H_2^+ = \; & \Re[H_2^+] + \mathrm{i}\Im[H_2^+] \\ & \longrightarrow -\sin\beta\Re[H_2^+] + \cos\beta\Re[H_1^-] + \mathrm{i}\sin\beta\Im[H_2^+] + \mathrm{i}\cos\beta\Im[H_1^-] \\ & \equiv \cos\beta(H^-)^* - \sin\beta(\phi^+)^*. \qquad (6.82) \end{aligned}$$

Hierin sind $H^- \equiv \Re[H_1^-] - \mathrm{i}\Im[H_1^-]$, $(H^-)^* = H^+$ die geladenen physikalischen Higgs-Bosonen und $\phi^+ \equiv \Re[H_2^+] + \mathrm{i}\Im[H_2^+]$, $(\phi^+)^* = \phi^-$ die geladenen Goldstone-Bosonen.

Damit sind wir endgültig bei der finalen Parametrisierung der Higgs-Dubletts (ohne Goldstone-Bosonen) angelangt:

$$H_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\big(v_1 + H^0\cos\alpha - h^0\sin\alpha + \mathrm{i}A^0\sin\beta\big) \\ H^-\sin\beta \end{pmatrix}, \tag{6.83}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} H^+\cos\beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\big(v_2 + H^0\sin\alpha + h^0\cos\alpha + \mathrm{i}A^0\cos\beta\big) \end{pmatrix} \tag{6.84}$$

Mit den Goldstone-Bosonen $\phi^0, \phi^\pm$ lauten die beiden Higgs-Dubletts:

$$H_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\big(v_1 + H^0\cos\alpha - h^0\sin\alpha + \mathrm{i}A^0\sin\beta + \mathrm{i}\phi^0\cos\beta\big) \\ H^-\sin\beta + \phi^-\cos\beta \end{pmatrix}, \tag{6.85}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} H^+\cos\beta - \phi^+\sin\beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\big(v_2 + H^0\sin\alpha + h^0\cos\alpha + \mathrm{i}A^0\cos\beta - \mathrm{i}\phi^0\sin\beta\big) \end{pmatrix} \tag{6.86}$$

Die Diskussion des Higgs-Potentials ist abgeschlossen, von eminenter Bedeutung sind jedoch Strahlungskorrekturen, die erst realistische Abschätzungen der Massen der physikalischen Higgs-Bosonen möglich machen, s. [?], [17].

6.8 Fermionmassen und Higgskopplungen

6.8.1 Massenterme der Leptonen und Quarks

Aufgrund der komplizierteren Struktur der *beiden* Higgs-Dubletts sehen die Erzeugung der Fermionmassen und die Higgs-Kopplungen etwas anders aus als im (nicht-supersymmetrischen) Standardmodell. Die Terme quadratisch in den Fermionfeldern stammen allesamt aus den Termen mit den zweiten Ableitungen des Superpotentials nach den skalaren Superpartnern der Standardmodell-Fermionen. Für die Leptonen erhält man

$$-2\Re\Big[h^E_{kl}H_1^-\overline{\nu_k}\ell^c_{L,l} - h^E_{kl}H_1^0\overline{\ell_{L,k}}\ell^c_{L,l}\Big]. \tag{6.87}$$

Der Faktor 2 hier stammt daher, daß man natürlich die zweite Ableitung zunächst nach dem Sneutrino-, dann nach dem Slepton-Feld, sowie auch in umgekehrter Reihenfolge machen kann. Setzt man für das neutrale Higgs H_1^0 dessen VEW ein, so gelangt man zu einem Massenterm für die Sleptonen. (Man beachte, daß das ladungskonjugierte linkshändige Lepton-Feld einem nicht ladungskonjugierten rechtshändigen Feld entspricht.) Es ergibt sich mit der Hermitezität der Matrix h^E_{kl}

$$-\frac{v_1}{\sqrt{2}}\,h^E_{kl}(\overline{\ell_{L,k}}\ell_{R,l} + \overline{\ell_{R,k}}\ell_{L,l}) = -\frac{v_1}{\sqrt{2}}\,h^E_{kl}\overline{\ell_k}\ell_l \tag{6.88}$$

Mittels einer unitären Transformation wie im Standardmodell ist man nun in der Lage, die Matrix h^E_{kl} zu diagonalisieren. Dabei muß man Vorsicht walten lassen, denn innerhalb der Superfelder müssen selbstverständlich alle Komponenten eines Supermultipletts unitär transformiert werden, um die Gestalt des Multipletts zu erhalten. Die transformierten Felder müßten eigentlich mit Strichen versehen werden, die aber sofort wieder unterdrückt werden. In allen weiteren Termen kann man nun die Matrix h^E_{kl} mittels der Lepton-Massen und des Vakuumerwartungswertes v_1 ersetzen.

$$h^E = \frac{\sqrt{2}}{v_1}\begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix} \tag{6.89}$$

Die entsprechenden Terme der up- und down-Quarks müssen die Quark-Massen wie auch die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-(CKM)-Mischung beinhalten. Sie haben die Form

$$\frac{v_2}{\sqrt{2}}\, h^U_{kl}\overline{u_k}u_l - \frac{v_1}{\sqrt{2}}\, h^D_{kl}\overline{d_k}d_l. \tag{6.90}$$

Auch hier kann man durch unitäre Transformationen dafür Sorge tragen, daß die Matrizen h^D_{kl} und h^U_{kl} diagonal werden. Während man die Transformation der up-Quarks ohne Schwierigkeiten auffangen kann, bleibt die Verdrehung der down-Quarks erhalten als wohlbekannte *CKM-Mischung*. Wichtig ist, daß stets die gesamten Superfelder unitär gedreht werden müssen, um die Lagrangedichte supersymmetrisch (bis auf die weichen Terme) zu erhalten. Dies heißt insbesondere, daß die skalaren SUSY-Partner, die Squarks, in der gleichen Weise gedreht werden müssen wie die Quarks. Führt man den gleichen Formalismus wie im (nicht-supersymmetrischen) Standardmodell durch, dann darf man die beiden Matrizen h^D_{kl} und h^U_{kl} diagonal wählen, bekommt jedoch eine Verdrehung der down-type-Quarks und down-type-Squarks (!) mittels der CKM-Matrix V. Die beiden Matrizen der Yukawa-Kopplungen sehen dann so aus:

$$h^U = -\frac{\sqrt{2}}{v_2}\begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \cdot V^{CKM} \tag{6.91}$$

$$h^D = \frac{\sqrt{2}}{v_1}\begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} \tag{6.92}$$

Von nun an werden die diagonalen, reellen Matrizen h^E, h^D, h^U verwendet, zu berücksichtigen bleibt die CKM-Drehung der down-type-Quarks und -Squarks.

6.8.2 Kopplungen an die Higgs-Bosonen

Die meisten Kopplungsterme der Higgs-Bosonen sind vernachlässigbar, da die Kopplungen proportional zu den Fermionen-Massen sind, und lediglich die Masse des top-Quarks groß genug ist, um wesentlich ins Gewicht zu fallen. Der Vollständigkeit halber werden allerdings alle Kopplungsterme angeben.

Kopplungen der Leptonen und Neutrinos:

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{\sqrt{2}m_{\ell_i}}{v_1}\Big(\Big(\overline{\nu}_i\ell_i H_1^- + \text{h.c.}\Big) - \overline{\ell}_i\ell_i\Big(\Re[H_1^0] - \frac{v_1}{\sqrt{2}}\Big)\Big) \tag{6.93}$$

Kopplungen der Quarks (Summenkonvention):

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}\Big(& m_{u_i}\overline{u}_i u_i\Big(\Re[H_2^0] - \frac{v_2}{\sqrt{2}}\Big) - m_{d_i}\overline{d}_i d_i\Big(\Re[H_1^0] - \frac{v_1}{\sqrt{2}}\Big) \\ &+ \frac{m_{d_i}}{2}\Big((\overline{u_{L,i}}\,V_{ij}^{CKM\,*}d_{R,j} + \overline{d_{R,i}}\,V_{ij}^{CKM\,*}u_{L,j})H_1^- + \text{h.c.}\Big) \\ &- \frac{m_{u_i}}{2}\Big((\overline{u_{R,i}}\,V_{ij}^{CKM}d_{L,j} + \overline{d_{L,i}}\,V_{ij}^{CKM}u_{R,j})H_2^+ + \text{h.c.}\Big)\Big) \end{aligned} \tag{6.94}$$

Die erste Zeile ergibt ähnliche Kopplungen wie die nicht flavour-ändernden bei den Leptonen, die letzten beiden Zeilen verdienen weitere Erläuterung. Schreibt man diese Zeilen aus, erhält man eine Reihe von Termen, die man sinnvoll so umordnet:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\overline{u_{L,i}}\,V_{ij}^{CKM\,*}d_{R,j} + \overline{d_{R,i}}\,V_{ij}^{CKM\,*}u_{L,j})H_1^- m_{d_i} \\ &\quad + (\overline{d_{R,j}}\,V_{ij}^{CKM}u_{L,i} + \overline{u_{L,j}}\,V_{ij}^{CKM}d_{R,i})H_1^{-\,*}m_{d_i} \\ &\quad - (\overline{u_{R,i}}\,V_{ij}^{CKM}d_{L,j} + \overline{d_{L,i}}\,V_{ij}^{CKM}u_{R,j})H_2^+ m_{u_i} \\ &\quad - (\overline{d_{L,j}}\,V_{ij}^{CKM\,*}u_{R,i} + \overline{u_{R,j}}\,V_{ij}^{CKM\,*}d_{L,i})H_2^{+\,*}m_{u_i}\Big) \\ = &\frac{1}{2\sqrt{2}}\Bigg(\overline{d_i}u_j\Big(V_{ij}^{CKM\,*}H^- m_{d_i}\sin\beta - V_{ij}^{CKM}H^+ m_{u_i}\cos\beta \\ &\qquad + V_{ji}^{CKM}H^+ m_{d_i}\sin\beta - V_{ji}^{CKM\,*}H^- m_{u_i}\cos\beta\Big) \\ &\quad - \overline{d_i}\gamma^5 u_j\Big(V_{ij}^{CKM\,*}H^- m_{d_i}\sin\beta + V_{ij}^{CKM}H^+ m_{u_i}\cos\beta \\ &\qquad + V_{ji}^{CKM}H^+ m_{d_i}\sin\beta + V_{ji}^{CKM\,*}H^- m_{u_i}\cos\beta\Big)\Bigg) \\ &\quad + \Bigg(\overline{u_i}d_j\Big(V_{ij}^{CKM\,*}H^- m_{d_i}\sin\beta - V_{ij}^{CKM}H^+ m_{u_i}\cos\beta \\ &\qquad + V_{ji}^{CKM}H^+ m_{d_i}\sin\beta - V_{ji}^{CKM\,*}H^- m_{u_i}\cos\beta\Big) \\ &\quad + \overline{u_i}\gamma^5 d_j\Big(V_{ij}^{CKM\,*}H^- m_{d_i}\sin\beta + V_{ij}^{CKM}H^+ m_{u_i}\cos\beta \\ &\qquad + V_{ji}^{CKM}H^+ m_{d_i}\sin\beta + V_{ji}^{CKM\,*}H^- m_{u_i}\cos\beta\Big)\Bigg) \end{aligned} \tag{6.95}$$

6.9 Mischung der Sleptonen und Squarks

Jedes Lepton ℓ besitzt zwei Superpartner, für die rechts- und linkshändige Feldkomponente des vierkomponentigen Spinors je eine. Diese beiden (komplexen) skalaren Felder werden als $\tilde{\ell}_R$ und $\tilde{\ell}_L$ bezeichnet. Im Fall exakter Supersymmetrie sind die Sleptonen-Massen gemeinsam mit der Leptonenmasse entartet. Durch das Einführen symmetriebrechender Terme (durch welchen Mechanismus auch immer) treten diagonale Massenterme auf, die dafür verantwortlich sind, daß die Sleptonenmassen sowohl von der Leptonenmasse wie auch untereinander verschieden sind. Weiterhin gibt es durch nichtdiagonale Elemente der Massenmatrix eine Mischung der beiden Sleptonen $\tilde{\ell}_R$ und $\tilde{\ell}_L$. Das eben Gesagte trifft in gleicher Weise auf die Squarks zu.

Um einen Verlust an Allgemeinheit im Hinblick auf Präzisionsrechnungen zu vermeiden, kann man die (verschwindend geringen) aufgrund der Hyperladungs-Fayet-Iliopoulos-Konstanten durch eine Umdefinition der Massenkonstanten im superrenormierbaren Term auffangen:

$$\begin{aligned}
M_Q^2 &\equiv \tilde{M}_Q^2 + \frac{1}{6} g' \xi_{U(1)_Y} \\
M_{\bar{U}}^2 &\equiv \tilde{M}_{\bar{U}}^2 - \frac{2}{3} g' \xi_{U(1)_Y} \\
M_{\bar{D}}^2 &\equiv \tilde{M}_{\bar{D}}^2 + \frac{1}{3} g' \xi_{U(1)_Y} \\
M_L^2 &\equiv \tilde{M}_L^2 - \frac{1}{2} g' \xi_{U(1)_Y} \\
M_{\bar{E}}^2 &\equiv \tilde{M}_{\bar{E}}^2 + g' \xi_{U(1)_Y}
\end{aligned} \tag{6.96}$$

6.9.1 Die up-Squarks

Das Auffinden der Massen-Eigenzustände verläuft prinzipiell für alle Sleptonen und Squarks gleich und soll hier am Beispiel der up-Squarks durchexerziert werden. Gesucht werden Terme, die quadratisch in den up-Squark-Feldern $\tilde{u}_i$ sind (i Generationenindex!). Hier hat man zunächst den die Supersymmetrie brechenden Term

$$-\sum_{ij} (M_{\mathbf{Q}}^2)_{ij} (Q_i^\dagger Q_j) - \sum_{ij} (M_{\bar{\mathbf{U}}}^2)_{ij} (\bar{U}_i^\dagger \bar{U}_j). \tag{6.97}$$

Warnung
Wie in [?] diskutiert, gibt es sogenannte Universalitätsbedingungen, die die Koeffizienten des superrenormierbaren Terms gewissen Einschränkungen

unterwerfen, die durch Anlehnungen an Supergravitationstheorien und phänomenologische Argumente wie obere Schranken für flavour-ändernde neutrale Ströme (FCNC) motiviert sind. Um den Rechenaufwand überschaubar zu halten (bzw. analytisch erst durchführbar zu gestalten), machen wir hier die Annahme, daß die obigen Matrizen im Generationenraum, $(M^2_{\mathbf{Q}})_{ij}$, $(M^2_{\bar{\mathbf{U}}})_{ij}$ diagonal sind, aber unterschiedliche Einträge für die jeweiligen Generationen enthalten können. Das gleiche gilt für die weiteren weichen Supersymmetrie brechenden Terme, d.h. $A^E_{ij}, A^D_{ij}, A^U_{ij}$ sowie $C^E_{ij}, C^D_{ij}, C^U_{ij}$ werden als diagonal angenommen, können allerdings für die drei Generationen unterschiedliche Einträge aufweisen.

Als nächstes bekommt man einen in den Squark-Feldern quadratischen Term aus (**??**), und zwar:

$$-\sum_{i=1}^{3} m^2_{u_i} \left(|\tilde{u}_{L,i}|^2 + |\tilde{u}_{R,i}|^2\right) \tag{6.98}$$

Der Beitrag aus (6.34) und (6.37) steuert das Folgende zur Matrix der Massenquadrate der up-Squarks bei:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{3}\Bigg[\frac{1}{12}g'^2\left(|H_2^0|^2-|H_1^0|^2\right)\left(|\tilde{u}_{L,i}|^2-4|\tilde{u}_{R,i}|^2\right) \\
&\qquad\qquad +\frac{1}{4}g^2\Big(2|\tilde{u}_L^* H_1^0|^2-|\tilde{u}_L|^2(|H_1^0|^2+|H_2^0|^2)\Big)\Bigg] \\
&\stackrel{\text{VEW}}{\longrightarrow}\ \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{24}g'^2(v_1^2-v_2^2)\left(|\tilde{u}_{L,i}|^2-4|\tilde{u}_{R,i}|^2\right)-\frac{1}{8}g^2|\tilde{u}_{L,i}|^2(v_1^2-v_2^2)\right] \\
&=\ \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{4}|\tilde{u}_{L,i}|^2(v_1^2-v_2^2)\left(\frac{1}{6}g'^2-\frac{1}{2}g^2\right)-\frac{1}{6}|\tilde{u}_{R,i}|^2 g'^2(v_1^2-v_2^2)\right] \\
&=\ -m_Z^2\sum_{i=1}^{3}\left[|\tilde{u}_{L,i}|^2\cos(2\beta)\left(\frac{1}{2}-Q_u\sin^2\theta_W\right)+|\tilde{u}_{R,i}|^2 Q_u\cos(2\beta)\sin^2\theta_W\right]
\end{aligned} \tag{6.99}$$

Hierin bedeutet $Q_u = 2/3$ die Ladung der up-Squarks.

Schließlich hat man noch die gemischten Terme, die zum einem aus dem weichen, Supersymmetrie brechenden Ausdruck stammen, zum anderen aus dem Quadrat der ersten Ableitung des Superpotentials. Der Mischterm hat dann die Form:

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{\sqrt{2}m_{u_i}}{v_2}\tilde{u}_{L,i}\tilde{u}^*_{R,i}\left[A_i^U H_2^0 + C_i^U H_1^{0\,*} + \mu^* H_1^{0\,*}\right] + \text{h.c.}$$

$$\stackrel{\text{VEW}}{\longrightarrow} \; -\sum_{i=1}^{3} m_{u_i}\,\tilde{u}_{L,i}\tilde{u}^*_{R,i}\,\left[A_i^U + (C_i^U + \mu^*)\cot\beta\right] + \text{h.c.} \tag{6.100}$$

Die Massenmatrix der up-Squarks nimmt damit die Gestalt

$$M^2_{\tilde{u}_i} =$$
$$\begin{pmatrix} m^2_{Q_i} + m^2_{u_i} + m^2_Z \cos(2\beta)\left(\frac{1}{2} - \hat{Q}\right) & m_{u_i}\left(A_i^U + (C_i^U + \mu^*)\cot\beta\right) \\ m_{u_i}\left(A_i^{U\,*} + (C_i^{U\,*} + \mu)\cot\beta\right) & m^2_{\bar{U}_i} + m^2_{u_i} + m^2_Z\cos(2\beta)\hat{Q} \end{pmatrix},$$

$$\hat{Q} \equiv Q_u \sin^2\theta_W \tag{6.101}$$

an.

Die Masseneigenwerte sind nach Ausführen der orthogonalen Transformation

$$\begin{array}{rcl} \tilde{u}_{1,i} &=& \tilde{u}_{L,i}\cos\theta_{u_i} + \tilde{u}_{R,i}\sin\theta_{u_i} \\ \tilde{u}_{2,i} &=& -\tilde{u}_{L,i}\sin\theta_{u_i} + \tilde{u}_{R,i}\cos\theta_{u_i} \end{array}, \tag{6.102}$$

die die Matrix der Massenquadrate diagonalisiert, dann:

$$m^2_{u_{1/2,i}} = m^2_{u_i} + \frac{1}{2}\Bigg(m^2_{Q_i} + m^2_{\bar{U}_i} + \frac{m_Z^2}{2}\cos(2\beta) \mp \sqrt{(m^2_{u,L,i} - m^2_{u,R,i})^2 + 4|m_{u,L/R,i}|^2}\Bigg). \tag{6.103}$$

Hier sind die Eigenwerte konventionsgemäß so gewählt, daß $m_1 < m_2$ gilt.Der Mischungswinkel θ_{u_i} erfüllt entsprechend der Formeln zur Matrixdiagonalisierung im Anhang die Beziehung:

$$\tan\theta_{u_i} = \frac{2m^2_{u,L/R,i}}{m^2_{u,L,i} - m^2_{u,R,i}} \tag{6.104}$$

Da die Mischung der beiden geladenen, skalaren Squarks nur durch die außerdiagonalen Matrixelemente der Matrix der Massenquadrate hervorgerufen wird, diese aber proportional zu den Quarkmassen der jeweiligen Generation ist, ist die Mischung nur für das stop $\tilde{t}$ von Bedeutung, für die leichteren Squarks (wie auch später für die Sleptonen) vernachlässigbar. Weitaus wichtiger sind die Aufhebung der Entartung mit den jeweiligen Quarkmassen sowie eine Aufspaltung der Massen der beiden up-Squarks einer Generation. Da Mischungen, deren Mischungswinkel nicht $\theta_{u_i} = 45^0$ beträgt, Paritätsverletzungen zur Konsequenz haben, die experimentell beschränkt sind, müssen die Mischungen insgesamt sehr klein sein. (Eine weitere phänomenologische Einschränkung, die oben bereits erwähnt wurde, ist die Kleinheit der FCNC.)

6.9.2 Mischungen der down-Squarks

Das Vorgehen ist das gleiche wie bei den up-Squarks. Aus dem superrenormierbaren Anteil zieht man die folgenden Terme:

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^{3}\Big(m_{Q_i}^2|\tilde{d}_{L,i}|^2 + m_{\bar{D}_i}^2|\tilde{d}_{R,i}|^2 - \tilde{d}_{L,i}\tilde{d}_{R,i}^*\,\frac{\sqrt{2}m_{d_i}}{v_1}(A_i^D H_1^0 - C_i^D H_2^{0\,*})\Big)\\
\xrightarrow{\text{VEW}}\ & -\sum_{i=1}^{3}\Big(m_{Q_i}^2|\tilde{d}_{L,i}|^2 + m_{\bar{D}_i}^2|\tilde{d}_{R,i}|^2 - \tilde{d}_{L,i}\tilde{d}_{R,i}^* m_{d_i}(A_i^D - C_i^D\tan\beta)\Big) \qquad (6.105)
\end{aligned}
$$

Der Teil aus dem Superpotential, in welchen die VEWs der Higgsfelder bereits eingesetzt wurden, lautet:

$$
-\sum_{i=1}^{3} m_{d_i}^2\Big(|\tilde{d}_{L,i}|^2 + |\tilde{d}_{R,i}|^2 - m_{d_i}\tilde{d}_{L,i}\tilde{d}_{R,i}^*\mu^*\tan\beta\Big) \qquad (6.106)
$$

Ähnlich wie bei den up-Squarks sieht auch hier der Ausdruck aus, der aus den D-Termen stammt:

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^{3}\Bigg[\frac{1}{12}g'^2\left(|\tilde{d}_{L,i}|^2 + 2|\tilde{d}_{R,i}|^2\right)\left(|H_2^0|^2 - |H_1^0|^2\right)\\
&\qquad + \frac{1}{4}g^2\left(2|\tilde{d}_{L,i}^* H_2^0|^2 - |\tilde{d}_{L,i}|^2(|H_1^0|^2 + |H_2^0|^2)\right)\Bigg]\\
\xrightarrow{\text{VEW}}\ & \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{24}g'^2(v_1^2 - v_2^2)\left(|\tilde{d}_{L,i}|^2 + 2|\tilde{d}_{R,i}|^2\right) + \frac{1}{8}g^2|\tilde{d}_{L,i}|^2(v_1^2 - v_2^2)\right]\\
=\ & \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{8}|\tilde{d}_{L,i}|^2(v_1^2 - v_2^2)\left(g^2 + \frac{1}{3}g'^2\right) + \frac{1}{12}g'^2|\tilde{d}_{R,i}|^2(v_1^2 - v_2^2)\right]\\
=\ & -m_Z^2\sum_{i=1}^{3}\left[-|\tilde{d}_{L,i}|^2\cos(2\beta)\left(\frac{1}{2} + Q_d\sin^2\theta_W\right) + |\tilde{d}_{R,i}|^2 Q_d\cos(2\beta)\sin^2\theta_W\right].
\end{aligned}
\qquad (6.107)
$$

Hierin ist $Q_d = -1/3$ natürlich wieder die Ladung der down-Squarks.

Nun läßt sich leicht die Matrix der Massenquadrate für die down-Squarks aufschreiben:

$$
M_{\tilde{d}_i}^2 =
\begin{pmatrix}
m_{Q_i}^2 + m_{d_i}^2 - m_Z^2\cos(2\beta)\left(\frac{1}{2} + \hat{Q}\right) & m_{d_i}\left(A_i^D - (C_i^D + \mu^*)\tan\beta\right)\\
m_{d_i}\left(A_i^{D\,*} - (C_i^{D^*} + \mu)\tan\beta\right) & m_{\bar{D}_i}^2 + m_{d_i}^2 + m_Z^2\cos(2\beta)\hat{Q}
\end{pmatrix},
$$

$$\hat{Q} \equiv Q_d \sin^2\theta_W \tag{6.108}$$

Damit werden die Masseneigenwerte

$$m^2_{d_{1/2,i}} = m^2_{d_i} + \frac{1}{2}\Bigg(m^2_{Q_i} + m^2_{\bar{D}_i} - \frac{m_Z^2}{2}\cos(2\beta) \mp \sqrt{(m^2_{d,L,i} - m^2_{d,R,i})^2 + 4|m_{d,L/R,i}|^2} \Bigg). \tag{6.109}$$

Auch hier bildet man wieder mit einer orthogonalen Transformation die Masseneigenzustände,

$$\begin{array}{rcl} \tilde{d}_{1,i} & = & \tilde{d}_{L,i}\cos\theta_{d_i} + \tilde{d}_{R,i}\sin\theta_{d_i} \\ \tilde{d}_{2,i} & = & -\tilde{d}_{L,i}\sin\theta_{d_i} + \tilde{d}_{R,i}\cos\theta_{d_i} \end{array}, \tag{6.110}$$

wobei der Mischungswinkel der down-Squarks gegeben ist durch

$$\tan\theta_{d_i} = \frac{2m^2_{d,L/R,i}}{m^2_{d,L,i} - m^2_{d,R,i}} \tag{6.111}$$

Abschließend ist zu sagen, daß diese Mischung nur für die down-Squarks der dritten Generation von Bedeutung ist.

6.9.3 Mischungen der Sleptonen

Eine nützliche Parametrisierung der Massenmatrix findet sich z.B. in [8], die die allgemeinste Form darstellt. Wir wollen jedoch alle Terme direkt aus der Lagrangedichte ableiten. Nach der Erfahrung mit den Squarks können wir sofort die Matrix der Massenquadrate für die Sleptonen der verschiedenen Generationen hinschreiben, für jede einzeln, da auch hier wieder zum Teil auf die oben diskutierten Universalitätsbedingungen zurückgegriffen wird. Die Matrix der Massenquadrate der Sleptonen lautet:

$$M^2_{\tilde{\ell}_i} = \begin{pmatrix} m^2_{\ell_i} + m^2_{L,i} + \frac{1}{2}m_Z^2\cos(2\beta)\sin^2\theta_W & m_{\ell_i}\left(A_i^E + (C_i^E + \mu^*)\tan\beta\right) \\ m_{\ell_i}\left(A_i^{E*} + (C_i^{E*} + \mu)\tan\beta\right) & m^2_{\ell_i} + m^2_{\bar{E}_i} - m_Z^2\cos(2\beta)\sin^2\theta_W \end{pmatrix} \tag{6.112}$$

Führt man wie üblich eine orthogonale Transformation der Form

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\ell}_{1,i} & = & \tilde{\ell}_{L,i}\cos\theta_{\ell_i} + \tilde{\ell}_{R,i}\sin\theta_{\ell_i} \\ \tilde{\ell}_{2,i} & = & -\tilde{\ell}_{L,i}\sin\theta_{\ell_i} + \tilde{\ell}_{R,i}\cos\theta_{\ell_i} \end{array}, \tag{6.113}$$

durch, kann man wieder die Massen-Eigenwerte angeben:

$$m^2_{\ell_{1/2,i}} = m^2_{\ell_i} + \frac{1}{2}\Bigg(m^2_{L_i} + m^2_{\bar{E}_i} - \frac{m^2_Z}{2}\cos(2\beta)\sin^2\theta_W \\ \mp \sqrt{(m^2_{\ell,L,i} - m^2_{\ell,R,i})^2 + 4|m_{\ell,L/R,i}|^2}\Bigg). \tag{6.114}$$

Der Mischungswinkel ist klar:

$$\tan\theta_{\ell_i} = \frac{2m^2_{\ell,L/R,i}}{m^2_{\ell,L,i} - m^2_{\ell,R,i}} \tag{6.115}$$

Die Mischung der beiden Sleptonzustände $\tilde{\ell}_L$ und $\tilde{\ell}_R$ ist aufgrund der geringen Leptonenmassen prinzipiell wohl zu vernachlässigen, so daß man in den meisten Fällen von den rechts- und linkshändigen Sleptonen als Eigenzuständen sprechen darf.

6.9.4 Massenterm der Sneutrinos

Da es wohl nur Partner zu den linkshändigen Neutrinos gibt, kann keine Mischung der Sneutrinos auftreten, weswegen hier nur der Massenterm diskutiert werden braucht. Das Massenquadrat stellt sich leicht als

$$m^2_{L,i} + \frac{1}{4}m^2_Z\cos(2\beta)\sin^2\theta_W \tag{6.116}$$

heraus.

6.10 Charginos und Neutralinos

Um die fermionischen Teilchen, die durch die (minimale) supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells hinzukommen zu diskutieren, sind erst einmal einige klärende Bemerkungen notwendig.

Die Higgsinos als SUSY-Partner der Higgs-Bosonen lassen sich zu zwei Majorana-Spinoren der neutralen Higgsinos und zwei Dirac-Spinoren der geladenen Higgsinos zusammenfassen. Bezeichnen $\psi^1_{H_1}$ und $\psi^2_{H_2}$ die fermionischen Partner der neutralen oberen Komponente des ersten und der neutralen unteren Komponente des zweiten Higgs-Dubletts, dann werden diese zu den beiden Majorana-Spinoren

$$\tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} \psi^1_{H_1} \\ \bar{\psi}^1_{H_1} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{H}_2 = \begin{pmatrix} \psi^2_{H_2} \\ \bar{\psi}^2_{H_2} \end{pmatrix} \tag{6.117}$$

zusammengefaßt. Demgegenüber kann man aus den Spinorpartner der geladenen unteren Komponente des ersten und oberen des zweiten Higgs-Dubletts einen Dirac-Spinor bauen, dessen ladungskonjugierter Spinor hier der Vollständigkeit halber aufgeführt wird:

$$\tilde{H}^+ = \begin{pmatrix} \psi^1_{H_2} \\ \bar{\psi}^2_{H_1} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{H}^- = \begin{pmatrix} \psi^2_{H_1} \\ \bar{\psi}^1_{H_2} \end{pmatrix} \tag{6.118}$$

Weiterhin sind λ, λ' und λ_s die den Winos, dem Bino und den Gluinos entsprechenden Weyl-Fermionfelder (dies sind *nicht* die fermionischen Superpartner der jeweiligen Eichfelder, sondern unterscheiden sich von diesen um einen Faktor i, s. die Bemerkung unterhalb von Gleichung (6.18), während

$$\lambda_A = \cos\theta_W \lambda' + \sin\theta_W \lambda^3 \tag{6.119}$$

und

$$\lambda_Z = -\sin\theta_W \lambda' + \cos\theta_W \lambda^3 \tag{6.120}$$

die Weyl-Felder des Photino und Zino darstellen sowie

$$\lambda^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lambda^1 \mp \mathrm{i}\lambda^2\right) \tag{6.121}$$

das positiv und negativ geladene Wino. Beachte, daß diese Definition impliziert:

$$\bar{\lambda}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{\lambda}^1 \pm \mathrm{i}\bar{\lambda}^2\right) \tag{6.122}$$

Dies bedeutet vor allem, daß die komplexe Konjugation auch hier nur die Spinoren „quert", d.h.

$$(\lambda^+)^* = \bar{\lambda}^+, \qquad (\lambda^-)^* = \bar{\lambda}^-. \tag{6.123}$$

Aus diesen definiert man die Majorana-Spinoren für das Photino, das Zino, das Gluino sowie die Dirac-Spinoren der geladenen Winos:

$$\tilde{A}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_A(x) \\ \bar{\lambda}_A(x) \end{pmatrix} \tag{6.124}$$

$$\tilde{Z}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_Z(x) \\ \bar{\lambda}_Z(x) \end{pmatrix} \tag{6.125}$$

$$\tilde{W}^+(x) = \begin{pmatrix} \lambda^+(x) \\ \bar{\lambda}^-(x) \end{pmatrix} \tag{6.126}$$

$$\tilde{W}^-(x) = \begin{pmatrix} \lambda^-(x) \\ \bar{\lambda}^+(x) \end{pmatrix} \tag{6.127}$$

$$\tilde{G}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_s(x) \\ \bar{\lambda}_s(x) \end{pmatrix} \tag{6.128}$$

Der Massenterm der Higgsinos aus dem Superpotential lautet:

$$\begin{aligned} \mu\epsilon^{ij}\overline{h^i_{1,R}}h^j_{2,L} + \text{h.c.} &= \mu\overline{h^0_{1,R}}h^0_{2,L} - \mu\overline{h^-_{1,R}}h^+_{2,L} + \text{h.c.} \\ &= \mu\left((\psi^1_{H_1}\psi^2_{H_2}) - (\psi^2_{H_1}\psi^1_{H_2})\right) + \text{h.c.} \\ &= -\mu\overline{\tilde{H}^+_R}\tilde{H}^+_L + \frac{\mu}{2}\left(\overline{\tilde{H}_{1,R}}\tilde{H}_{2,L} + \overline{\tilde{H}_{2,R}}\tilde{H}_{1,L}\right) + \text{h.c.} \end{aligned} \tag{6.129}$$

Aus dem superrenormierbaren Anteil kann man die Terme für die Wino- und Bino-Massen auf die folgende Weise umschreiben:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}m_{\text{Wino}}\sum_{a=1}^{3}\lambda^a\lambda^a - \frac{1}{2}m_{\text{Bino}}\lambda'\lambda' + \text{h.c.} \\ &= -\frac{1}{2}m_{\text{Wino}}\left(\lambda^1\lambda^1 + \lambda^2\lambda^2\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}m_{\text{Wino}}\left(\lambda^3\lambda^3\right) - \frac{1}{2}m_{\text{Bino}}\left(\lambda'\lambda'\right) + \text{h.c.} \\ &= -m_{\text{Wino}}\left(\lambda^+\lambda^-\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(m_{\text{Wino}}\sin^2\theta_W + m_{\text{Bino}}\cos^2\theta_W\right)\left(\lambda_A\lambda_A\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(m_{\text{Wino}}\cos^2\theta_W + m_{\text{Bino}}\sin^2\theta_W\right)\left(\lambda_Z\lambda_Z\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(m_{\text{Wino}} - m_{\text{Bino}}\right)\sin(2\theta_W)\left(\lambda_A\lambda_Z\right) + \text{h.c.} \\ &= -m_{\text{Wino}}\left(\lambda^+\lambda^-\right) - \frac{1}{2}m_{\tilde{A}}\left(\lambda_A\lambda_A\right) - \frac{1}{2}m_{\tilde{Z}}\left(\lambda_Z\lambda_Z\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(m_{\text{Wino}} - m_{\text{Bino}}\right)\left(\lambda_A\lambda_Z\right) + \text{h.c.} \\ &= -m_{\text{Wino}}\overline{\tilde{W}^+_R}\tilde{W}^+_L - \frac{1}{2}m_{\tilde{A}}\overline{\tilde{A}_R}\tilde{A}_L - \frac{1}{2}m_{\tilde{Z}}\overline{\tilde{Z}_R}\tilde{Z}_L \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(m_{\tilde{Z}} - m_{\tilde{A}}\right)\tan(2\theta_W)\overline{\tilde{A}_R}\tilde{Z}_L + \text{h.c.} \end{aligned} \tag{6.130}$$

Hier wurden die ganz natürlichen Definitionen

$$m_{\tilde{A}} = m_{\text{Bino}}\cos^2\theta_W + m_{\text{Wino}}\sin^2\theta_W \tag{6.131}$$

$$m_{\tilde{Z}} = m_{\text{Bino}} \sin^2\theta_W + m_{\text{Wino}} \cos^2\theta_W \tag{6.132}$$

eingeführt. Auch diese Massen sind komplexe (!) Majorana-Massen, wenn die entsprechenden Bino- und Wino-Massen nicht reell sind.

Um die Anteile an den Massen- und Mischungstermen der Charginos und Neutralinos aus den Yukawa-Termen zu gewinnen, müssen diese in eine brauchbare Form umgeschrieben werden, wozu man die Definitionen (6.121) und (6.122) verwendet. Zunächst ist es sinnvoll, folgende Rechnung durchzuführen, die man gewinnt, wenn man die eben zitierten Definitionen sowie (6.119) und (6.120) zu Bispinoren zusammensetzt:

$$\begin{aligned}
&g'\frac{Y}{2}\tilde{B} + g\sum_{a=1}^{3} T^a\tilde{W}^a \\
&\quad = g'\frac{Y}{2}\tilde{B} + gT^3\tilde{W}^3 + \frac{g}{2}\left(T^1 + \mathrm{i}T^2\right)\left(\tilde{W}_1 - \mathrm{i}\tilde{W}_2\right) \\
&\qquad\quad + \frac{g}{2}\left(T^1 - \mathrm{i}T^2\right)\left(\tilde{W}_1 + \mathrm{i}\tilde{W}_2\right) \\
&\quad = eQ\tilde{A} + \frac{g}{\cos\theta_W}\tilde{Z}\left(T^3 - \sin^2\theta_W Q\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}gT^+\tilde{W}^+ + \frac{1}{\sqrt{2}}gT^-\tilde{W}^-
\end{aligned} \tag{6.133}$$

Damit hat man dann

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}\,\overline{h_{1,k,L}}\left(g'\frac{Y}{2}\tilde{B}_L\delta_{kl} + g\sum_{a=1}^{3} T^a_{kl}\tilde{W}^a_R\right)H_{1,l} + \text{h.c.} \\
&\quad = \sqrt{2}\,\overline{h_{1,k,L}}\Bigg(eQ\tilde{A}_R + \frac{g}{\cos\theta_W}\tilde{Z}_R\left(T^3 - \sin^2\theta_W Q\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\sqrt{2}}gT^+\tilde{W}^+_R + \frac{1}{\sqrt{2}}gT^-\tilde{W}^-_R\Bigg)H_1 + \text{h.c.} \\
&\quad = -\sqrt{2}\,e\overline{\tilde{H}^-_L}\tilde{A}_R\left(H^-\sin\beta + \phi^-\cos\beta\right) + g\overline{\tilde{H}_{1,L}}\tilde{W}^+_R\left(H^-\sin\beta + \phi^-\cos\beta\right) \\
&\qquad + \frac{g_Z}{2}\overline{\tilde{H}_{1,L}}\tilde{Z}_R\left(v_1 + H^0\cos\alpha - h^0\sin\alpha + \mathrm{i}(A^0\sin\beta + \phi^0\cos\beta)\right) \\
&\qquad - \frac{g_Z}{\sqrt{2}}\left(1 - 2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{H}^-_L}\tilde{Z}_R\left(H^-\sin\beta + \phi^-\cos\beta\right) \\
&\qquad + \frac{1}{\sqrt{2}}\,g\overline{\tilde{H}^-_L}\tilde{W}^-_R\left(v_1 + H^0\cos\alpha - h^0\sin\alpha + \mathrm{i}(A^0\sin\beta + \phi^0\cos\beta)\right) \\
&\qquad + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{6.134}$$

Die entsprechende Rechnung für das zweite Higgs-Dublett lautet:

$$\sqrt{2}\,\overline{h_{2,k,L}}\left(g'\frac{Y}{2}\tilde{B}_R\delta_{kl} + g\sum_{a=1}^{3} T^a_{kl}\tilde{W}^a_R\right)H_{2,l} + \text{h.c.}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{2}\,\overline{h_{2,k,L}}\Big(eQ\tilde{A}_R + \frac{g}{\cos\theta_W}\tilde{Z}_R\left(T^3 - \sin^2\theta_W Q\right) \\
&\qquad + \frac{1}{\sqrt{2}} g T^+ \tilde{W}_R^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} g T^- \tilde{W}_R^-\Big) H_2 + \text{h.c.} \\
&= \sqrt{2} e \overline{\tilde{H}_L^+} \tilde{A}_R \left(H^+\cos\beta - \phi^+\sin\beta\right) \\
&\quad + \frac{g_Z}{\sqrt{2}}\left(1 - 2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{H}_L^+}\tilde{Z}_R\left(H^+\cos\beta - \phi^+\sin\beta\right) \\
&\quad - \frac{g_Z}{2}\overline{\tilde{H}_{2,L}}\tilde{Z}_R\left(v_2 + H^0\sin\alpha + h^0\cos\alpha + \mathrm{i}(A^0\cos\beta - \phi^0\sin\beta)\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\, g\overline{\tilde{H}_L^+}\tilde{W}_R^+\left(v_2 + H^0\sin\alpha + h^0\cos\alpha + \mathrm{i}(A^0\cos\beta - \phi^0\sin\beta)\right) \\
&\quad + g\overline{\tilde{H}_{2,L}}\tilde{W}_R^-\left(H^+\cos\beta - \phi^+\sin\beta\right) + \text{h.c.}
\end{aligned}
\tag{6.135}
$$

6.10.1 Mischung der geladenen Fermionen

Sucht man alle Massenterme der geladenen Fermion-Felder (die nicht Quarks oder Leptonen sind) zusammen, findet man einen Beitrag aus dem superrenormierbaren Anteil, einen Beitrag aus dem Superpotential sowie (analog zum Standardmodell) über die Yukawa-Kopplungen der Higgs-Felder. Insgesamt findet sich:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^{\pm}\,2} &= -\mu\overline{\tilde{H}_R^+}\tilde{H}_L^+ - m_{\text{Wino}}\overline{\tilde{W}_R^+}\tilde{W}_L^+ + \frac{1}{\sqrt{2}}\, g v_1\overline{\tilde{H}_R^-}\tilde{W}_L^- \\
&\qquad + \frac{1}{\sqrt{2}}\, g v_2\overline{\tilde{H}_R^+}\tilde{W}_L^+ + \text{h.c.} \\
&= -\mu\left(\psi_{H_1}^2\psi_{H_2}^1\right) - m_{\text{Wino}}\left(\lambda^+\lambda^-\right) \\
&\qquad + \frac{1}{\sqrt{2}}\, g v_1\psi_{H_1}^2\lambda^- + \frac{1}{\sqrt{2}}\, g v_2\psi_{H_2}^1\lambda^+ + \text{h.c.}
\end{aligned}
\tag{6.136}
$$

Für die weitere Rechnung benötigt man folgende Relationen:

$$
\begin{aligned}
g v_1 &= \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}\sqrt{g^2 + g'^2}\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\
&= \cos\theta_W\sqrt{g^2 + g'^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\cos\beta \\
&= 2 m_W\cos\beta
\end{aligned}
\tag{6.137}
$$

$$
g v_2 = 2 m_W \sin\beta \tag{6.138}
$$

Zur Vereinfachung des Massenterms spaltet man nun die Terme auf:

$$
\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^{\pm}\,2} = -\frac{1}{2} m_{\text{Wino}}(\lambda^+\lambda^-) - \frac{1}{2}\mu(\psi_{H_2}^1\psi_{H_1}^2) + \frac{1}{2\sqrt{2}} g v_2(\psi_{H_2}^1\lambda^+)
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2\sqrt{2}}gv_1(\psi^2_{H_1}\lambda^-)-\frac{1}{2}m_{\text{Wino}}(\lambda^+\lambda^-)-\frac{1}{2}\mu(\psi^1_{H_2}\psi^2_{H_1})\\
&+\frac{1}{2\sqrt{2}}gv_2(\psi^1_{H_2}\lambda^+)+\frac{1}{2\sqrt{2}}gv_1(\psi^2_{H_1}\lambda^-)+\text{h.c.}\\
=&-\frac{1}{2}\left(\lambda^+,\psi^1_{H_2}\right)\begin{pmatrix} m_{\text{Wino}} & -\sqrt{2}\,m_W\cos\beta\\ -\sqrt{2}\,m_W\sin\beta & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^-\\ \psi^2_{H_1}\end{pmatrix}\\
&-\frac{1}{2}\left(\lambda^-,\psi^2_{H_1}\right)\begin{pmatrix} m_{\text{Wino}} & -\sqrt{2}\,m_W\sin\beta\\ -\sqrt{2}\,m_W\cos\beta & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^+\\ \psi^1_{H_2}\end{pmatrix}+\text{h.c.}\\
=&-\frac{1}{2}\Psi^{+T}X^T\Psi^- - \frac{1}{2}\Psi^{-T}X\Psi^+ + \text{h.c.},
\end{aligned}
\tag{6.139}
$$

wo die Abkürzungen

$$
\Psi^+ = \begin{pmatrix}\lambda^+\\ \psi^1_{H_2}\end{pmatrix} \tag{6.140}
$$

$$
\Psi^- = \begin{pmatrix}\lambda^-\\ \psi^2_{H_1}\end{pmatrix} \tag{6.141}
$$

$$
X = \begin{pmatrix} m_{\text{Wino}} & -\sqrt{2}\,m_W\sin\beta\\ -\sqrt{2}\,m_W\cos\beta & \mu\end{pmatrix} \tag{6.142}
$$

eingeführt wurden. **Wichtig:** Die Vorzeichen in den Außerdiagonalelementen hängen von der Wahl des Vorzeichens der kovarianten Ableitung ab! Dies ändert aber nicht die Massen der Charginos, die Vorzeichenambiguität kann durch die Phasenwahl der Mischungsmatrizen aufgefangen werden, wie sie in [9] und [30] beschrieben wird. Mit den Definitionen

$$
\Xi = \begin{pmatrix}\Psi^+\\ \Psi^-\end{pmatrix} \tag{6.143}
$$

$$
Y = \begin{pmatrix} 0 & X^T\\ X & 0\end{pmatrix} \tag{6.144}
$$

kann man den Ausdruck weiter formalisieren und (6.139) in der Form

$$
\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^{\pm}\,2} = -\frac{1}{2}\,\Xi^T Y\,\Xi + \text{h.c.} \tag{6.145}
$$

schreiben. Man benutzt nun einen Satz aus der linearen Algebra, daß eine beliebige Matrix durch zwei unitäre Matrizen auf Diagonalgestalt mit positiven Einträgen gebracht werden kann. Dies geschieht in der Form

$$
U^* X V^\dagger = M_D. \tag{6.146}
$$

Noch eine neue Definition der transformierten Spinoren mit den Indizes $i, j = 1, 2$:

$$\chi_i^+ = V_{ij}\Psi_j^+, \qquad \chi_i^- = U_{ij}\Psi_j^-, \tag{6.147}$$

mit der man dann diese Umformung tätigen kann:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\Psi^{+T}X^T\Psi^- - \frac{1}{2}\Psi^{-T}X\Psi^+ + \text{h.c.}\\
&\quad = -\frac{1}{2}\chi^{+T}V^*X^TU^\dagger\chi^- - \frac{1}{2}\chi^{-T}U^*XV^\dagger\chi^+ + \text{h.c.}\\
&\quad = -\frac{1}{2}\chi^{+T}M_D^T\chi^- - \frac{1}{2}\chi^{-T}M_D\chi^+ + \text{h.c.}\\
&\quad = -\chi^{-T}M_D\chi^+ + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{6.148}$$

Führt man an dieser Stelle die Dirac-Spinoren der beiden Charginos

$$\tilde{\chi}_1^+ = \begin{pmatrix} \chi_1^+ \\ \bar{\chi}_1^- \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\chi}_2^+ = \begin{pmatrix} \chi_2^+ \\ \bar{\chi}_2^- \end{pmatrix} \tag{6.149}$$

mit den Massen

$$m_{\tilde{\chi}_1} > m_{\tilde{\chi}_2} \tag{6.150}$$

ein, dann erhält man

$$\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^{\pm 2}} = -m_{\tilde{\chi}_1}\overline{\tilde{\chi}_1^+}\tilde{\chi}_1^+ - m_{\tilde{\chi}_2}\overline{\tilde{\chi}_2^+}\tilde{\chi}_2^+. \tag{6.151}$$

Unter Verwendung der Tatsache

$$M_D^2 = M_D^\dagger M_D = M_D M_D^\dagger = V(X^\dagger X)V^\dagger = U^*(XX^\dagger)(U^*)^\dagger \tag{6.152}$$

lassen sich die Eigenwerte der Matrix der Massenquadrate ermitteln [1]:

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 - \lambda\left(|m_{\text{Wino}}|^2 + |\mu|^2 + 2m_W^2\right) + |m_{\text{Wino}}|^2|\mu|^2 + 4m_W^4\cos^2\beta\sin^2\beta\\
&\qquad - m_W^2 m_{\text{Wino}}\mu\sin(2\beta) - m_W^2 m_{\text{Wino}}^*\mu^*\sin(2\beta) \stackrel{!}{=} 0\\
&\Longrightarrow\\
&\qquad \lambda_{1/2} \equiv m_{\tilde{\chi}_{1/2}}^2\\
&\quad = \frac{1}{2}\Bigg\{|m_{\text{Wino}}|^2 + |\mu|^2 + 2m_W^2 \mp \Bigg[\left(|m_{\text{Wino}}|^2 - |\mu|^2\right)^2 + 4m_W^2\cos^2(2\beta)
\end{aligned}$$

[1] Obwohl die beiden Matrizen $XX^\dagger$ und $X^\dagger X$ nicht identisch sind, sind ihre Säkulargleichungen dieselben. Beide besitzen daher dieselben Eigenwerte.

$$+ 4m_W^2 \left[|m_{\mathrm{Wino}}|^2 + |\mu|^2 + m_{\mathrm{Wino}}\mu \sin(2\beta) + m^*_{\mathrm{Wino}}\mu^* \sin(2\beta) \right] \Big]^{\frac{1}{2}} \Bigg\} \tag{6.153}$$

Die Vorzeichen der Wurzel sind hier so gewählt, daß $m_{\tilde{\chi}_1} < m_{\tilde{\chi}_2}$ gilt. Der Determinante von X bestimmt, ob beide Eigenwerte positiv sind, oder einer der beiden negativ ist. Entscheidend ist die Größe

$$\epsilon_{\tilde{\chi}^\pm} = \mathrm{sgn}\ \left[\mu m_{\mathrm{Wino}} - m_W^2 \sin(2\beta)\right] \tag{6.154}$$

Man muß also Definition (6.155) dahingehend abändern, daß man (z.B.) die Transformationsmatrix der positiven Charginos mit einem wahlweisen Vorzeichen versieht (s. Gl. (C.19) in [9] und Gl. (2.10) in [30]),

$$\chi_i^+ = E_{\tilde{\chi}^\pm} V_{ij} \Psi_j^+, \qquad \chi_i^- = U_{ij} \Psi_j^-, \tag{6.155}$$

mit der Matrix

$$E_{\tilde{\chi}^\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\tilde{\chi}^\pm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_{\tilde{\chi}^\pm} \end{pmatrix} \tag{6.156}$$

Im folgenden denken wir uns die Matrix $E_{\tilde{\chi}^\pm}$ in V absorbiert.

Sind die Parameter μ und m_{Wino} reell (ihre Imaginärteile sind auf jeden Fall sehr klein, so daß diese Annahme in guter Näherung stets erfüllt sein dürfte) (s. z.B. [9]) kann man die Transformationsmatrizen in der folgenden Form wählen:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\phi_- & \sin\phi_- \\ -\sin\phi_- & \cos\phi_- \end{pmatrix}, \tag{6.157}$$

$$\begin{aligned} V &= \begin{pmatrix} \cos\phi_+ & \sin\phi_+ \\ -\sin\phi_+ & \cos\phi_+ \end{pmatrix}, \text{ falls } \det X \geq 0, \\ V &= \begin{pmatrix} \cos\phi_+ & \sin\phi_+ \\ \sin\phi_+ & -\cos\phi_+ \end{pmatrix}, \text{ falls } \det X < 0. \end{aligned} \tag{6.158}$$

Die etwas sonderbare Wahl von V für $\det X < 0$ sorgt, wie bereits oben diskutiert, dafür, daß die als Diagonalelemente von M_D auftretenden Chargino-Massen beide positiv sind.

Die Mischungswinkel sind gegeben durch:

$$\tan(2\phi_+) = \frac{-2\sqrt{2}m_W\,(m_{\text{Wino}}\sin\beta + \mu\cos\beta)}{m_{\text{Wino}}^2 - \mu^2 + 2m_W^2\cos(2\beta)}, \tag{6.159}$$

$$\tan(2\phi_-) = \frac{-2\sqrt{2}m_W\,(m_{\text{Wino}}\cos\beta + \mu\sin\beta)}{m_{\text{Wino}}^2 - \mu^2 - 2m_W^2\cos(2\beta)}, \tag{6.160}$$

Man kann nun bezüglich der Bispinoren der Winos und Higgsinos sowie der Charginos wichtige Relationen herleiten. Multipliziert man die linke der Gleichungen (6.155) mit V_{ik}^*, erhält man

$$V_{ik}^*\chi_i^+ = V_{ik}^*V_{ij}\Psi_j^+ = \delta_{kj}\Psi_j^+ = \Psi_k^+. \tag{6.161}$$

Daraus folgt:

$$\tilde{W}_L^+ = \lambda^+ = \Psi_1^+ = V_{i1}^*\chi_i^+ = V_{i1}^*\tilde{\chi}_{L,i}^+ \tag{6.162}$$

Auf ähnliche Weise ergeben sich auch die anderen der unten aufgeführten Identitäten:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \tilde{W}_L^+ = V_{i1}^*\tilde{\chi}_{i,L}^+ & \overline{\tilde{W}_L^+} & = \overline{\tilde{\chi}_{i,L}^+}V_{i1} \\ \tilde{W}_R^+ = U_{i1}\tilde{\chi}_{i,R}^+ & \overline{\tilde{W}_R^+} & = \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^+}U_{i1}^* \\ \tilde{H}_L^+ = V_{i2}^*\tilde{\chi}_{i,L}^+ & \overline{\tilde{H}_L^+} & = \overline{\tilde{\chi}_{i,L}^+}V_{i2} \\ \tilde{H}_R^+ = U_{i2}\tilde{\chi}_{i,R}^+ & \overline{\tilde{H}_R^+} & = \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^+}U_{i2}^* \end{array}} \tag{6.163}$$

Sodann gelten vergleichbare Relationen für die ladungskonjugierten Zustände:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \tilde{W}_L^- = U_{i1}^*\tilde{\chi}_{i,L}^- & \overline{\tilde{W}_L^-} & = \overline{\tilde{\chi}_{i,L}^-}U_{i1} \\ \tilde{W}_R^- = V_{i1}\tilde{\chi}_{i,R}^- & \overline{\tilde{W}_R^-} & = \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^-}V_{i1}^* \\ \tilde{H}_L^- = U_{i2}^*\tilde{\chi}_{i,L}^- & \overline{\tilde{H}_L^-} & = \overline{\tilde{\chi}_{i,L}^-}U_{i2} \\ \tilde{H}_R^- = V_{i2}\tilde{\chi}_{i,R}^- & \overline{\tilde{H}_R^-} & = \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^-}V_{i2}^* \end{array}} \tag{6.164}$$

Die entsprechenden Gleichungen für die adjungierten Bispinoren erhält man durch hermitesche Konjugation. Dabei ist zu beachten, daß die Elemente der Mischungsmatrix nur komplex konjugiert werden, die Matrix aber nicht zusätzlich transponiert!

6.10.2 Mischung der neutralen Fermionen

An neutralen Fermionen, die neu gegenüber dem Standardmodell sind, sind das Photino, das Zino und die beiden neutralen Higgsinos. Wir tragen hier die oben diskutierten Massen- und Mischungsterme zusammen.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(\tilde{\chi}^0)^2} &= \frac{\mu}{2}\left(\overline{\tilde{H}_{1,R}}\tilde{H}_{2,L} + \overline{\tilde{H}_{2,R}}\tilde{H}_{1,L}\right) - \frac{1}{2}m_{\tilde{A}}\overline{\tilde{A}_R}\tilde{A}_L - \frac{1}{2}m_{\tilde{Z}}\overline{\tilde{Z}_R}\tilde{Z}_L \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(m_{\tilde{Z}} - m_{\tilde{A}}\right)\tan(2\theta_W)\overline{\tilde{A}_R}\tilde{Z}_L \\
&\quad + \frac{g_Z}{2}\left(v_1\overline{\tilde{H}_{R,1}}\tilde{Z}_L - v_2\overline{\tilde{H}_{R,2}}\tilde{Z}_L\right) + \text{h.c.} \\
&= \mu\psi^1_{H_1}\psi^2_{H_2} - \frac{1}{2}m_{\tilde{A}}\lambda_A\lambda_A - \frac{1}{2}m_{\tilde{Z}}\lambda_Z\lambda_Z \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(m_{\tilde{Z}} - m_{\tilde{A}}\right)\tan(2\theta_W)\lambda_A\lambda_Z + \frac{g_Z}{2}\left(v_1\lambda_Z\psi^1_{H_1} - v_2\lambda_Z\psi^2_{H_2}\right) \\
&\quad + \text{h.c.} \\
&= -\frac{1}{2}\Psi^{0\,T}Y^0\Psi^0 + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{6.165}$$

Dabei bedeutet Ψ^0 die Basis

$$\Psi^0 = \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_Z \\ \psi^1_{H_1} \\ \psi^2_{H_2} \end{pmatrix}, \tag{6.166}$$

während die Matrix Y^0 gegeben ist durch

$$Y^0 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{A}} & \frac{m_{\tilde{Z}} - m_{\tilde{A}}}{2}\tan(2\theta_W) & 0 & 0 \\ \frac{m_{\tilde{Z}} - m_{\tilde{A}}}{2}\tan(2\theta_W) & m_{\tilde{Z}} & -m_Z\cos\beta & m_Z\sin\beta \\ 0 & -m_Z\cos\beta & 0 & -\mu \\ 0 & m_Z\sin\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.167}$$

Für die Umformung der Terme in der Lagrangedichte auf die physikalischen Masseneigenzustände der Neutralinos ist es z.T. sinnvoller, die alternative Basis

$$\Psi^{0\,\prime} = \begin{pmatrix} \lambda' \\ \lambda^3 \\ \psi^1_{H_1} \\ \psi^2_{H_2} \end{pmatrix}, \tag{6.168}$$

zu verwenden, in welcher die Massenmatrix die Gestalt

$Y^{0\,\prime} =$

$$\begin{pmatrix} m_{\text{Bino}} & 0 & m_Z \sin\theta_W \cos\beta & -m_Z \sin\theta_W \sin\beta \\ 0 & m_{\text{Wino}} & -m_Z \cos\theta_W \cos\beta & m_Z \cos\theta_W \sin\beta \\ m_Z \sin\theta_W \cos\beta & -m_Z \cos\theta_W \cos\beta & 0 & -\mu \\ -m_Z \sin\theta_W \sin\beta & m_Z \cos\theta_W \sin\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{6.169}$$

besitzt und sich entsprechend der Term zweiter Ordnung in den neutralen Fermionfeldern

$$\mathcal{L}_{(\tilde{\chi}^0)^2} = -\frac{1}{2}(\Psi^{0\prime})^T Y^{0\prime}\Psi^{0\prime} + \text{h.c.} \tag{6.170}$$

schreibt. Man benutzt nun eine unitäre Matrix N, um die Masseneigenzustände der Neutralinos einzuführen:

$$\chi_i^0 = N_{ij}\Psi_j^{0\prime}, \qquad i, j = 1, \ldots, 4 \tag{6.171}$$

wobei N die Bedingung

$$N^* Y^{0\prime} N^{-1} = N_D \tag{6.172}$$

erfüllt. Daß man hier dieselbe Matrix N (und deren konjugiert Komplexes) verwenden darf, liegt an der Symmetrie der Matrix $Y^{0(\prime)}$, die wiederum aus der Tatsache resultiert, Massenmatrix von Majorana-Spinoren zu sein. Hier kann man die durch (6.171) definierten Spinoren und ihre komplex konjugierten Spinoren in Majorana-Bispinoren zusammenfassen:

$$\tilde{\chi}_i^0 = \begin{pmatrix} \chi_i^0 \\ \bar{\chi}_i^0 \end{pmatrix}, \qquad i, j = 1, \ldots, 4 \tag{6.173}$$

Der Massenterm der vier Neutralinos nimmt daher die Gestalt

$$\mathcal{L}_{(\tilde{\chi}^0)^2} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} m_{\tilde{\chi}_i^0}\overline{\tilde{\chi}_i^0}\tilde{\chi}_i^0 \tag{6.174}$$

Wie im Falle der Charginos kann man auch hier Identitäten zwischen den

Zuständen der Gauginos und der Neutralinos auf einfache Weise herleiten:

$$
\boxed{\begin{array}{rclrcl}
\tilde{B}_L &=& \eta_i^* N_{i1}^* \tilde{\chi}_{i,L}^0 & \overline{\tilde{B}_L} &=& \overline{\tilde{\chi}_{i,L}^0}\eta_i N_{i1} \\
\tilde{B}_R &=& \eta_i N_{i1} \tilde{\chi}_{i,R}^0 & \overline{\tilde{B}_R} &=& \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^0}\eta_i^* N_{i1}^* \\
\tilde{W}_L^3 &=& \eta_i^* N_{i2}^* \tilde{\chi}_{i,L}^0 & \overline{\tilde{W}_L^3} &=& \overline{\tilde{\chi}_{i,L}^0}\eta_i N_{i2} \\
\tilde{W}_R^3 &=& \eta_i N_{i2} \tilde{\chi}_{i,R}^0 & \overline{\tilde{W}_R^3} &=& \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^0}\eta_i^* N_{i2}^* \\
\tilde{H}_{1,L} &=& \eta_i^* N_{i3}^* \tilde{\chi}_{i,L}^0 & \overline{\tilde{H}_{1,L}} &=& \overline{\tilde{\chi}_{i,L}^0}\eta_i N_{i3} \\
\tilde{H}_{1,R} &=& \eta_i N_{i3} \tilde{\chi}_{i,R}^0 & \overline{\tilde{H}_{1,R}} &=& \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^0}\eta_i^* N_{i3}^* \\
\tilde{H}_{2,L} &=& \eta_i^* N_{i4}^* \tilde{\chi}_{i,L}^0 & \overline{\tilde{H}_{2,L}} &=& \overline{\tilde{\chi}_{i,L}^0}\eta_i N_{i4} \\
\tilde{H}_{2,R} &=& \eta_i N_{i4} \tilde{\chi}_{i,R}^0 & \overline{\tilde{H}_{2,R}} &=& \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^0}\eta_i^* N_{i4}^*
\end{array}} \tag{6.175}
$$

Kapitel 7

Zur Herleitung der Feynman-Regeln

7.1 Kovariante Ableitungen der Higgs-Felder

Der Term

$$(D_\mu H_1)^\dagger (D^\mu H_1) + (D_\mu H_2)^\dagger (D^\mu H_2) \tag{7.1}$$

aus der Lagrangedichte des MSSM enthält die Massenterme der W- und Z-Bosonen, die kinetischen Terme der physikalischen Higgs-Bosonen und die Kopplungen derselben an die Eichbosonen der elektroschwachen Theorie. Die Form der eichkovarianten Ableitung haben wir bereits in (3.20) ermittelt und können sie nun einfach übernehmen:

$$D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} - \mathrm{i}g_Z Z_\mu^0 \left(T_3 - \sin^2\theta_W Q_{el.}\right) - \mathrm{i}eA_\mu Q_{el.} \tag{7.2}$$

Hierin wurde die Abkürzung $g_Z \equiv g/\cos\theta_W$ benutzt. Dabei ist A_μ das Photon-Feld, das stets einen Lorentz-Index trägt im Gegensatz mit dem zu verwechselnden pseudoskalaren Higgs A^0. $Q_{el.}$ ist der Operator der elektrischen Ladung. Da eine Matrixschreibweise den Rahmen der Seitengröße sprengen würde, teilen wir das Ergebnis in möglichst kleine Häppchen.

Es ergibt sich bei Anwendung von (7.2) auf (6.83):

$$\begin{aligned}(D_\mu H_1)_1 = {} & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\,\partial_\mu H^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\,\partial_\mu h^0 + \frac{g_Z}{2\sqrt{2}} Z_\mu^0\left(A^0\sin\beta + \phi^0\cos\beta\right) \\ & + \mathrm{i}\Bigg[\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\,\partial_\mu A^0 + \frac{\cos\beta}{\sqrt{2}}\,\partial_\mu\phi^0 - \frac{g_Z v_1}{2\sqrt{2}} Z_\mu^0 - \frac{g\cos\beta}{\sqrt{2}} W_\mu^+\phi^-\end{aligned}$$

$$
- \frac{g \sin\beta}{\sqrt{2}} W_\mu^+ H^- - \frac{g_Z \cos\alpha}{2\sqrt{2}} Z_\mu^0 H^0 + \frac{g_Z \sin\alpha}{2\sqrt{2}} Z_\mu^0 h^0 \Bigg] \tag{7.3}
$$

$$
\begin{aligned}
(D_\mu H_1)_2 = \; & \sin\beta\, \partial_\mu H^- + \cos\beta \partial_\mu \phi^- + \frac{g}{2} W_\mu^- \left(A^0 \sin\beta + \phi^0 \cos\beta\right) \\
& + \mathrm{i} \Bigg[-\frac{g v_1}{2} W_\mu^- - \frac{g \cos\alpha}{2} H^0 W_\mu^- + \frac{g \sin\alpha}{2} h^0 W_\mu^- \\
& \quad + \frac{g_Z}{2} \left(1 - 2\sin^2\theta_W\right) Z_\mu^0 \left(H^- \sin\beta + \phi^- \cos\beta\right) \\
& \quad + e A_\mu \left(H^- \sin\beta + \phi^- \cos\beta\right) \Bigg]
\end{aligned} \tag{7.4}
$$

Läßt man (7.2) auf (6.84) wirken, erhält man:

$$
\begin{aligned}
(D_\mu H_2)_1 = \; & \cos\beta \partial_\mu H^+ - \sin\beta \partial_\mu \phi^+ + \frac{g}{2} W_\mu^+ \left(A^0 \cos\beta - \phi^0 \sin\beta\right) \\
& + \mathrm{i} \Bigg[-\frac{g v_2}{2} W_\mu^+ - \frac{g \sin\alpha}{2} H^0 W_\mu^+ - \frac{g \cos\alpha}{2} h^0 W_\mu^+ \\
& \quad - \frac{g_Z}{2} \left(1 - 2\sin^2\theta_W\right) Z_\mu^0 \left(H^+ \cos\beta - \phi^+ \sin\beta\right) \\
& \quad - e A_\mu \left(H^+ \cos\beta - \phi^+ \sin\beta\right) \Bigg]
\end{aligned} \tag{7.5}
$$

$$
\begin{aligned}
(D_\mu H_2)_2 = \; & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\alpha\, \partial_\mu H^0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\alpha\, \partial_\mu h^0 - \frac{g_Z}{2\sqrt{2}} Z_\mu^0 \left(A^0 \cos\beta - \phi^0 \sin\beta\right) \\
& + \mathrm{i} \Bigg[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\beta\, \partial_\mu A^0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\beta\, \partial_\mu \phi^0 - \frac{g \cos\beta}{\sqrt{2}} H^+ W_\mu^- \\
& \quad + \frac{g \sin\beta}{\sqrt{2}} W_\mu^- \phi^+ + \frac{g_Z v_2}{2\sqrt{2}} Z_\mu^0 + \frac{g_Z \sin\alpha}{2\sqrt{2}} H^0 Z_\mu^0 + \frac{g_Z \cos\alpha}{2\sqrt{2}} h^0 Z_\mu^0 \Bigg]
\end{aligned} \tag{7.6}
$$

Nun muß man die Betragsquadrate bilden. Dabei wird häufiger der Ausdruck $W_\mu^- H^+ + W_\mu^+ H^-$ auftreten; dieser wird dann gleich $W_\mu^\pm H^\mp$ gesetzt, da wir dann die Vertizes der beiden Ladungen in einem abhaken können. Im folgenden bedeuten Unterstreichungen, daß der betreffende Term sich auf offensichtliche Weise gegen einen anderen aus einem der übrigen Quadrate weghebt. Die doppelt unterstrichenen Terme fallen gegeneinander heraus aufgrund der Vakuumstruktur des Higgspotentials, (6.57):

$$v_2 \cos\beta - v_1 \sin\beta = v_1 \tan\beta \cos\beta - v_1 \sin\beta = 0. \tag{7.7}$$

Weiterhin sind die Ausdrücke in drei Abschnitte untergliedert, der erste stammt daher, daß man die Terme ohne i quadriert, der zweite durch Quadrieren der Terme, die ein i enthalten und der dritte Teil kommt zustande, wenn Felder wie $W^{\pm\mu}$ oder $H^\pm$ nicht gleich ihren eigenen komplex Konjugierten sind, so daß die gemischten Terme (mit und ohne i sich nicht gegenseitig wegheben.

Das Quadrat von (7.3) ergibt:

$$
\begin{aligned}
&(D_\mu H_1)_1^*(D^\mu H_1)_1 = \\
&\quad \frac{1}{2}\cos^2\alpha(\partial_\mu H^0)(\partial^\mu H^0) + \frac{1}{2}\sin^2\alpha(\partial_\mu h^0)(\partial^\mu h^0) \\
&\quad + \frac{g_Z^2}{8}(Z_\mu^0 Z^{0\mu})\left(A^0\sin\beta + \phi^0\cos\beta\right)^2 - \underline{\cos\alpha\sin\alpha(\partial_\mu h^0)(\partial^\mu H^0)} \\
&\quad + \frac{g_Z\cos\alpha}{2}\partial_\mu H^0 Z^{0\mu}\left(\sin\beta A^0 + \cos\beta\phi^0\right) \\
&\quad - \frac{g_Z\sin\alpha}{2}\partial_\mu h^0 Z^{0\mu}\left(\sin\beta A^0 + \cos\beta\phi^0\right) \\
\\
&\quad + \frac{1}{2}\sin^2\beta\,(\partial_\mu A^0)(\partial^\mu A^0) + \frac{1}{2}\cos^2\beta\,(\partial_\mu\phi^0)(\partial^\mu\phi^0) \\
&\quad + \frac{g^2\cos^2\beta}{2}(W_\mu^+ W^{-\mu})\phi^+\phi^- + \frac{g^2\sin^2\beta}{2}(W_\mu^+ W^{-\mu})H^+H^- \\
&\quad + \frac{g_Z^2 v_1^2}{8}(Z_\mu^0 Z^{0\mu}) + \frac{g_Z^2\cos^2\alpha}{8}(Z_\mu^0 Z^{0\mu})(H^0)^2 \\
&\quad + \frac{g_Z^2\sin^2\alpha}{8}(Z_\mu^0 Z^{0\mu})(h^0)^2 - \frac{g\sin^2\beta}{2}\partial_\mu A^0\,W^{\pm\mu}H^\mp \\
&\quad - \underline{\underline{\frac{g_Z v_1\sin\beta}{2}\partial_\mu A^0 Z^{0\mu}}} - \frac{g_Z\cos\alpha\sin\beta}{2}\partial_\mu A^0 Z^{0\mu}H^0 \\
&\quad + \frac{g_Z\sin\alpha\sin\beta}{2}\partial_\mu A^0 Z^{0\mu}h^0 + \underline{\cos\beta\sin\beta\partial_\mu A^0\partial^\mu\phi^0} \\
&\quad + \underline{\frac{g g_Z v_1\sin\beta}{4}Z_\mu^0 W^{\pm\mu}H^\mp} + \underline{\frac{g g_Z\cos\alpha\sin\beta}{4}Z_\mu^0 W^{\pm\mu}H^\mp H^0} \\
&\quad - \underline{\frac{g g_Z\sin\alpha\sin\beta}{4}Z_\mu^0 W^{\pm\mu}H^\mp h^0} + \frac{g_Z^2 v_1\cos\alpha}{4}(Z_\mu^0 Z^{0\mu})H^0 \\
&\quad - \frac{g_Z^2 v_1\sin\alpha}{4}(Z_\mu^0 Z^{0\mu})h^0 - \underline{\frac{g_Z^2\cos\alpha\sin\alpha}{4}(Z_\mu^0 Z^{0\mu})h^0 H^0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\boxed{\frac{g_Z v_1\cos\beta}{2} Z^0_\mu \partial^\mu \phi^0} - \underline{\frac{g\sin\beta\cos\beta}{2} W^\pm_\mu H^\mp \partial^\mu\phi^0} \\
&-\frac{g_Z\cos\alpha\cos\beta}{2} H^0 Z^0_\mu \partial^\mu\phi^0 + \frac{g_Z\sin\alpha\cos\beta}{2} h^0 Z^0_\mu\partial^\mu\phi^0 \\
&-\underline{\frac{g\cos\beta\sin\beta}{2}\partial_\mu A^0 W^{\pm\,\mu}\phi^\mp} - \frac{g\cos^2\beta}{2}\partial_\mu\phi^0 W^{\pm\,\mu}\phi^\mp \\
&+\underline{\frac{g g_Z v_1\cos\beta}{4}(Z^0_\mu W^{\pm\,\mu})\phi^\mp} + \underline{\frac{g\cos\beta\sin\beta}{2}(W^+_\mu W^{-\,\mu})H^\pm\phi^\mp} \\
&+\underline{\frac{g g_Z\cos\alpha\cos\beta}{4}(W^\pm_\mu Z^{0\,\mu})\phi^\mp H^0} - \underline{\frac{g g_Z\sin\alpha\cos\beta}{4}(W^\pm_\mu Z^{0\,\mu})\phi^\mp h^0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathrm{i}\frac{g\cos\alpha\sin\beta}{2}\partial_\mu H^0(W^{-\mu}H^+ - W^{+\mu}H^-) \\
&-\mathrm{i}\frac{g\sin\alpha\sin\beta}{2}\partial_\mu h^0(W^{-\mu}H^+ - W^{+\mu}H^-) \\
&+\underline{\mathrm{i}\frac{g g_Z\sin\beta}{4}\left(A^0\sin\beta + \phi^0\cos\beta\right) Z^0_\mu(W^{-\mu}H^+ - W^{+\mu}H^-)} \\
&+\mathrm{i}\frac{g\cos\alpha\cos\beta}{2}\partial_\mu H^0(W^{-\mu}\phi^+ - W^{+\mu}\phi^-) \\
&-\mathrm{i}\frac{g\sin\alpha\cos\beta}{2}\partial_\mu h^0(W^{-\mu}\phi^+ - W^{+\mu}\phi^-) \\
&+\underline{\mathrm{i}\frac{g g_Z\cos\beta}{4}\left(A^0\sin\beta + \phi^0\cos\beta\right) Z^0_\mu(W^{-\mu}\phi^+ - W^{+\mu}\phi^-)} \qquad (7.8)
\end{aligned}
$$

Dann das Quadrat des Terms (7.4):

$$
\begin{aligned}
(D_\mu H_1)^*_2(D^\mu H_1)_2 = {}& \\
&\sin^2\beta(\partial_\mu H^-)(\partial^\mu H^+) + \cos^2\beta(\partial_\mu\phi^-)(\partial^\mu\phi^+) \\
&+\underline{\sin\beta\cos\beta(\partial_\mu H^\mp)(\partial^\mu\phi^\pm)} + \frac{g^2}{4}(W^-_\mu W^{+\mu})\left(A^0\sin\beta + \phi^0\cos\beta\right)^2 \\
&+\frac{g}{2}\left(\partial_\mu(H^\mp\sin\beta + \phi^\mp\cos\beta)W^{\pm\mu}\right)\left(A^0\sin\beta + \phi^0\cos\beta\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{g^2 v_1^2}{4}(W^-_\mu W^{+\mu}) + \frac{g^2\cos^2\alpha}{4}(H^0)^2(W^-_\mu W^{+\mu}) + \frac{g^2\sin^2\alpha}{4}(h^0)^2(W^-_\mu W^{+\mu}) \\
&+\frac{g_Z^2}{4}\left(1 - 2\sin^2\theta_W\right)^2(Z^0_\mu Z^{0\mu})\left|H^-\sin\beta + \phi^-\cos\beta\right|^2 \\
&+e^2(A_\mu A^\mu)\left|H^-\sin\beta + \phi^-\cos\beta\right|^2 + \frac{g^2 v_1\cos\alpha}{2}H^0(W^-_\mu W^{+\mu})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{g^2 v_1 \sin\alpha}{2} h^0 (W^-_\mu W^{+\mu}) - \underline{\frac{g^2 \cos\alpha \sin\alpha}{2} h^0 H^0 \left(W^-_\mu W^{+\mu}\right)} \\
&- \frac{g g_Z v_1}{4} \left(\, \underline{1} - 2\sin^2\theta_W\right) Z^0_\mu W^{\pm\mu} \Big(\underline{\underline{H^\mp \sin\beta}} + \phi^\mp \cos\beta\Big) \\
&- \frac{e g v_1}{2} A_\mu W^{\pm\mu} \Big(\underline{\underline{H^\mp \sin\beta}} + \phi^\mp \cos\beta\Big) \\
&- \frac{g g_Z \cos\alpha}{4} \left(\, \underline{1} - 2\sin^2\theta_W\right) H^0 Z^0_\mu W^{\pm\mu} \left(H^\mp \sin\beta + \phi^\mp \cos\beta\right) \\
&- \frac{e g \cos\alpha}{2} H^0 A_\mu W^{\pm\mu} \left(H^\mp \sin\beta + \phi^\mp \cos\beta\right) \\
&+ \frac{e g \sin\alpha}{2} h^0 A_\mu W^{\pm\mu} \left(H^\mp \sin\beta + \phi^\mp \cos\beta\right) \\
&+ \frac{g g_Z \sin\alpha}{4} \left(\, \underline{1} - 2\sin^2\theta_W\right) h^0 Z^0_\mu W^{\pm\mu} \left(H^\mp \sin\beta + \phi^\mp \cos\beta\right) \\
&+ e g_Z \left(1 - 2\sin^2\theta_W\right) \left(A_\mu Z^{0\mu}\right) \left|H^- \sin\beta + \phi^- \cos\beta\right|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \underline{\underline{\mathrm{i}\frac{g v_1 \sin\beta}{2} (\partial_\mu H^+ W^{-\mu} - \partial_\mu H^- W^{+\mu})}} \\
&- \mathrm{i}\frac{g \cos\alpha \sin\beta}{2} H^0 (\partial_\mu H^+ W^{-\mu} - \partial_\mu H^- W^{+\mu}) \\
&+ \mathrm{i}\frac{g \sin\alpha \sin\beta}{2} h^0 (\partial_\mu H^+ W^{-\mu} - \partial_\mu H^- W^{+\mu}) \\
&- \boxed{\mathrm{i}\frac{g v_1 \cos\beta}{2} (\partial_\mu \phi^+ W^{-\mu} - \partial_\mu \phi^- W^{+\mu})} \\
&- \mathrm{i}\frac{g \cos\alpha \cos\beta}{2} H^0 (\partial_\mu \phi^+ W^{-\mu} - \partial_\mu \phi^- W^{+\mu}) \\
&+ \mathrm{i}\frac{g \sin\alpha \cos\beta}{2} h^0 (\partial_\mu \phi^+ W^{-\mu} - \partial_\mu \phi^- W^{+\mu}) \\
&+ \mathrm{i}\frac{g_Z \sin^2\beta}{2} \left(1 - 2\sin^2\theta_W\right) Z^0_\mu (\partial^\mu H^+ H^- - \partial^\mu H^- H^+) \\
&+ \mathrm{i}\frac{g_Z \cos^2\beta}{2} \left(1 - 2\sin^2\theta_W\right) Z^0_\mu (\partial^\mu \phi^+ \phi^- - \partial^\mu \phi^- \phi^+) \\
&+ \underline{\mathrm{i}\frac{g_Z \sin\beta\cos\beta}{2} \left(1 - 2\sin^2\theta_W\right) Z^0_\mu (\partial^\mu H^+ \phi^- - \partial^\mu H^- \phi^+ + \partial^\mu \phi^+ H^- - \partial^\mu \phi^- H^+)} \\
&+ \mathrm{i}e \sin^2\beta A_\mu (\partial^\mu H^+ H^- - \partial^\mu H^- H^+) \\
&+ \mathrm{i}e \cos^2\beta A_\mu (\partial^\mu \phi^+ \phi^- - \partial^\mu \phi^- \phi^+) \\
&+ \underline{\mathrm{i}e \cos\beta \sin\beta A_\mu (\partial^\mu H^+ \phi^- - \partial^\mu H^- \phi^+ + \partial^\mu \phi^+ H^- - \partial^\mu \phi^- H^+)} \\
&+ \underline{\mathrm{i}\frac{g g_Z \sin\beta}{4} \left(1 - 2\sin^2\theta_W\right) Z^0_\mu (W^{+\mu} H^- - W^{-\mu} H^+) \left(A^0 \sin\beta + \phi^0 \cos\beta\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \mathrm{i}\frac{g g_Z \cos\beta}{4}\left(\underline{\ 1\ } - 2\sin^2\theta_W\right) Z^0_\mu (W^{+\mu}\phi^- - W^{-\mu}\phi^+)\left(A^0 \sin\beta + \phi^0\cos\beta\right)\\
&\underline{+ \mathrm{i}\frac{e g \sin\beta}{2} A_\mu (W^{+\mu}H^- - W^{-\mu}H^+)\left(A^0 \sin\beta + \phi^0\cos\beta\right)}\\
&+ \mathrm{i}\frac{e g \cos\beta}{2} A_\mu (W^{+\mu}\phi^- - W^{-\mu}\phi^+)\left(A^0 \sin\beta + \phi^0\cos\beta\right)
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

Wendet man sich dem zweiten Higgs-Dublett zu, hat man zunächst wieder die obere Komponente zu quadrieren, (7.5):

$$
\begin{aligned}
&(D_\mu H_2)^*_1 (D^\mu H_2)_1 =\\
&\quad \cos^2\beta(\partial_\mu H^-)(\partial^\mu H^+) + \sin^2\beta(\partial_\mu\phi^-)(\partial^\mu\phi^+)\\
&- \underline{\sin\beta\cos\beta(\partial_\mu H^\mp)(\partial^\mu\phi^\pm)} + \frac{g^2}{4}(W^-_\mu W^{+\mu})\left(A^0\cos\beta - \phi^0\sin\beta\right)^2\\
&+ \frac{g}{2}\left(\partial_\mu(H^\mp\cos\beta - \phi^\mp\sin\beta)W^{\pm\mu}\right)\left(A^0\cos\beta - \phi^0\sin\beta\right)\\
&\\
&+ \frac{g^2 v_2^2}{4}(W^-_\mu W^{+\mu}) + \frac{g^2\sin^2\alpha}{4}(H^0)^2(W^-_\mu W^{+\mu}) + \frac{g^2\cos^2\alpha}{4}(h^0)^2(W^-_\mu W^{+\mu})\\
&+ \frac{g_Z^2}{4}\left(1 - 2\sin^2\theta_W\right)^2 (Z^0_\mu Z^{0\mu})\left|H^+\cos\beta - \phi^+\sin\beta\right|^2\\
&+ e^2(A_\mu A^\mu)\left|H^+\cos\beta - \phi^-\sin\beta\right|^2 + \frac{g^2 v_2\sin\alpha}{2}H^0(W^-_\mu W^{+\mu})\\
&+ \frac{g^2 v_2\cos\alpha}{2}h^0(W^-_\mu W^{+\mu}) + \underline{\frac{g^2\cos\alpha\sin\alpha}{2}h^0 H^0\,(W^-_\mu W^{+\mu})}\\
&+ \frac{g g_Z v_2}{4}\left(\underline{\ 1\ } - 2\sin^2\theta_W\right) Z^0_\mu W^{\pm\mu}\left(\underline{\underline{H^\mp\cos\beta}} - \phi^\mp\sin\beta\right)\\
&+ \frac{e g v_2}{2}A_\mu W^{\pm\mu}\left(\underline{\underline{H^\mp\cos\beta}} - \phi^\mp\sin\beta\right)\\
&+ \frac{g g_Z\sin\alpha}{4}\left(\underline{\ 1\ } - 2\sin^2\theta_W\right) H^0 Z^0_\mu W^{\pm\mu}\left(H^\mp\cos\beta - \phi^\mp\sin\beta\right)\\
&+ \frac{e g\sin\alpha}{2}H^0 A_\mu W^{\pm\mu}\left(H^\mp\cos\beta - \phi^\mp\sin\beta\right)\\
&+ \frac{e g\cos\alpha}{2}h^0 A_\mu W^{\pm\mu}\left(H^\mp\cos\beta - \phi^\mp\sin\beta\right)\\
&+ \frac{g g_Z\cos\alpha}{4}\left(\underline{\ 1\ } - 2\sin^2\theta_W\right) h^0 Z^0_\mu W^{\pm\mu}\left(H^\mp\cos\beta - \phi^\mp\sin\beta\right)\\
&+ e g_Z\left(1 - 2\sin^2\theta_W\right)(A_\mu Z^{0\mu})\left|H^+\cos\beta - \phi^-\sin\beta\right|^2\\
&\\
&+ \underline{\underline{\mathrm{i}\frac{g v_2\cos\beta}{2}(\partial_\mu H^+ W^{-\mu} - \partial_\mu H^- W^{+\mu})}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \mathrm{i}\frac{g\sin\alpha\cos\beta}{2}H^0(\partial_\mu H^+W^{-\mu} - \partial_\mu H^-W^{+\mu}) \\
&+ \mathrm{i}\frac{g\cos\alpha\cos\beta}{2}h^0(\partial_\mu H^+W^{-\mu} - \partial_\mu H^-W^{+\mu}) \\
&- \boxed{\mathrm{i}\frac{gv_2\sin\beta}{2}(\partial_\mu\phi^+W^{-\mu} - \partial_\mu\phi^-W^{+\mu})} \\
&- \mathrm{i}\frac{g\sin\alpha\sin\beta}{2}H^0(\partial_\mu\phi^+W^{-\mu} - \partial_\mu\phi^-W^{+\mu}) \\
&- \mathrm{i}\frac{g\cos\alpha\sin\beta}{2}h^0(\partial_\mu\phi^+W^{-\mu} - \partial_\mu\phi^-W^{+\mu}) \\
&+ \mathrm{i}\frac{g_Z\cos^2\beta}{2}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)Z^0_\mu(\partial^\mu H^+H^- - \partial^\mu H^-H^+) \\
&+ \mathrm{i}\frac{g_Z\sin^2\beta}{2}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)Z^0_\mu(\partial^\mu \phi^+\phi^- - \partial^\mu \phi^-\phi^+) \\
&- \underline{\mathrm{i}\frac{g_Z\sin\beta\cos\beta}{2}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)Z^0_\mu(\partial^\mu H^+\phi^- - \partial^\mu H^-\phi^+ + \partial^\mu\phi^+H^- - \partial^\mu\phi^-H^+)} \\
&+ \mathrm{i}e\cos^2\beta A_\mu(\partial_\mu H^+H^- - \partial_\mu H^-H^+) \\
&+ \mathrm{i}e\sin^2\beta A_\mu(\partial_\mu \phi^+\phi^- - \partial_\mu \phi^-\phi^+) \\
&- \underline{\mathrm{i}e\cos\beta\sin\beta A_\mu(\partial^\mu H^+\phi^- - \partial^\mu H^-\phi^+ + \partial^\mu\phi^+H^- - \partial^\mu\phi^-H^+)} \\
&+ \underline{\mathrm{i}\frac{gg_Z\cos\beta}{4}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)Z^0_\mu(W^{+\mu}H^- - W^{-\mu}H^+)\left(A^0\cos\beta - \phi^0\sin\beta\right)} \\
&- \mathrm{i}\frac{gg_Z\sin\beta}{4}\left(\underline{\ 1\ } - 2\sin^2\theta_W\right)Z^0_\mu(W^{+\mu}\phi^- - W^{-\mu}\phi^+)\left(A^0\cos\beta - \phi^0\sin\beta\right) \\
&+ \underline{\mathrm{i}\frac{eg\cos\beta}{2}A_\mu(W^{+\mu}H^- - W^{-\mu}H^+)\left(A^0\cos\beta - \phi^0\sin\beta\right)} \\
&- \mathrm{i}\frac{eg\sin\beta}{2}A_\mu(W^{+\mu}\phi^- - W^{-\mu}\phi^+)\left(A^0\cos\beta - \phi^0\sin\beta\right)
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

Es fehlt noch die 2. Komponente des 2. Higgs-Dubletts, (7.6):

$$
\begin{aligned}
&(D_\mu H_2)^*_2(D^\mu H_2)_2 = \\
&\qquad \frac{1}{2}\sin^2\alpha(\partial_\mu H^0)(\partial^\mu H^0) + \frac{1}{2}\cos^2\alpha(\partial_\mu h^0)(\partial^\mu h^0) \\
&\quad + \frac{g_Z^2}{8}(Z^0_\mu Z^{0\mu})\left(A^0\cos\beta - \phi^0\sin\beta\right)^2 + \underline{\cos\alpha\sin\alpha(\partial_\mu h^0)(\partial^\mu H^0)} \\
&\quad - \frac{g_Z\sin\alpha}{2}\partial_\mu H^0 Z^{0\mu}\left(\cos\beta A^0 - \sin\beta\phi^0\right) \\
&\quad - \frac{g_Z\cos\alpha}{2}\partial_\mu h^0 Z^{0\mu}\left(\cos\beta A^0 - \sin\beta\phi^0\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{2}\cos^2\beta\,(\partial_\mu A^0)(\partial^\mu A^0) + \frac{1}{2}\sin^2\beta\,(\partial_\mu \phi^0)(\partial^\mu \phi^0)\\
&+ \frac{g^2\sin^2\beta}{2}(W^+_\mu W^{-\mu})\phi^+\phi^- + \frac{g^2\cos^2\beta}{2}(W^+_\mu W^{-\mu})H^+H^-\\
&+ \frac{g_Z^2 v_2^2}{8}(Z^0_\mu Z^{0\mu}) + \frac{g_Z^2\sin^2\alpha}{8}(Z^0_\mu Z^{0\mu})(H^0)^2\\
&+ \frac{g_Z^2\cos^2\alpha}{8}(Z^0_\mu Z^{0\mu})(h^0)^2 - \frac{g\cos^2\beta}{2}\partial_\mu A^0\, W^{\pm\mu}H^\mp\\
&+ \underline{\underline{\frac{g_Z v_2\cos\beta}{2}\partial_\mu A^0 Z^{0\mu}}} + \frac{g_Z\sin\alpha\cos\beta}{2}\partial_\mu A^0 Z^{0\mu}H^0\\
&+ \frac{g_Z\cos\alpha\cos\beta}{2}\partial_\mu A^0 Z^{0\mu}h^0 - \underline{\cos\beta\sin\beta\partial_\mu A^0\partial^\mu\phi^0}\\
&- \underline{\frac{g g_Z v_2\cos\beta}{4}Z^0_\mu W^{\pm\mu}H^\mp} - \underline{\frac{g g_Z\sin\alpha\cos\beta}{4}Z^0_\mu W^{\pm\mu}H^\mp H^0}\\
&- \underline{\frac{g g_Z\cos\alpha\cos\beta}{4}Z^0_\mu W^{\pm\mu}H^\mp h^0} + \frac{g_Z^2 v_2\sin\alpha}{4}(Z^0_\mu Z^{0\mu})H^0\\
&+ \frac{g_Z^2 v_2\cos\alpha}{4}(Z^0_\mu Z^{0\mu})h^0 + \underline{\frac{g_Z^2\cos\alpha\sin\alpha}{4}(Z^0_\mu Z^{0\mu})h^0H^0}\\
&- \boxed{\frac{g_Z v_2\sin\beta}{2}Z^0_\mu\partial^\mu\phi^0} + \underline{\frac{g\sin\beta\cos\beta}{2}W^\pm_\mu H^\mp\partial^\mu\phi^0}\\
&- \frac{g_Z\sin\alpha\sin\beta}{2}H^0 Z^0_\mu\partial^\mu\phi^0 - \frac{g_Z\cos\alpha\sin\beta}{2}h^0 Z^0_\mu\partial^\mu\phi^0\\
&+ \underline{\frac{g\cos\beta\sin\beta}{2}\partial_\mu A^0 W^{\pm\mu}\phi^\mp} - \frac{g\sin^2\beta}{2}\partial_\mu\phi^0 W^{\pm\mu}\phi^\mp\\
&+ \underline{\frac{g g_Z v_2\sin\beta}{4}(Z^0_\mu W^{\pm\mu})\phi^\mp} - \underline{\frac{g\cos\beta\sin\beta}{2}(W^+_\mu W^{-\mu})H^\pm\phi^\mp}\\
&+ \underline{\frac{g g_Z\sin\alpha\sin\beta}{4}(W^\pm_\mu Z^{0\mu})\phi^\mp H^0} + \underline{\frac{g g_Z\cos\alpha\sin\beta}{4}(W^\pm_\mu Z^{0\mu})\phi^\mp h^0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \mathrm{i}\frac{g\cos\alpha\cos\beta}{2}\partial_\mu H^0(W^{-\mu}H^+ - W^{+\mu}H^-)\\
&- \mathrm{i}\frac{g\sin\alpha\cos\beta}{2}\partial_\mu h^0(W^{-\mu}H^+ - W^{+\mu}H^-)\\
&+ \underline{\mathrm{i}\frac{g g_Z\cos\beta}{4}\left(A^0\cos\beta - \phi^0\sin\beta\right)Z^0_\mu(W^{-\mu}H^+ - W^{+\mu}H^-)}\\
&+ \mathrm{i}\frac{g\sin\alpha\sin\beta}{2}\partial_\mu H^0(W^{-\mu}\phi^+ - W^{+\mu}\phi^-)\\
&+ \mathrm{i}\frac{g\cos\alpha\sin\beta}{2}\partial_\mu h^0(W^{-\mu}\phi^+ - W^{+\mu}\phi^-)
\end{aligned}
$$

$$\underline{- \mathrm{i}\frac{g g_Z \sin\beta}{4}\left(A^0 \cos\beta - \phi^0 \sin\beta\right) Z^0_\mu (W^{-\mu}\phi^+ - W^{+\mu}\phi^-)} \tag{7.11}$$

Die Terme in den Kästen $\boxed{\;\cdots\;}$ ergeben

$$-m_Z Z^0_\mu \partial^\mu \phi^0 - \mathrm{i} m_W W^-_\mu \partial^\mu \phi^+ + \mathrm{i} m_W W^+_\mu \partial^\mu \phi^- . \tag{7.12}$$

Durch geeignete Wahl des Faddeew-Popow-Terms bei der BRS-Quantisierung nichtabelscher Eichtheorien werden diese Terme zu totalen Ableitungen erweitert und tragen deshalb nicht zu den Feynman-Regeln bei (s. z.B. [7], S. 269/270).

Nachdem alles zusammengetragen wurde, kann man die Terme jetzt analysieren: Natürlich hat man die kinetischen Terme der fünf physikalischen Higgs-Bosonen,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\text{Higgs}}_{\text{kin.}} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial_\mu A)(\partial^\mu A) + (\partial_\mu H^+)(\partial^\mu H^-)\end{aligned} \tag{7.13}$$

sowie die kinetischen Terme der Goldstone-Bosonen:

$$\mathcal{L}^{\text{Goldstone}}_{\text{kin.}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^0)(\partial^\mu \phi^0) + (\partial_\mu \phi^+)(\partial^\mu \phi^-). \tag{7.14}$$

Wie im (nicht-supersymmetrischen) Standardmodell erhält man die Massenterme für die W- und Z-Bosonen, s. (6.58), (6.76):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{W/Z}_{\text{Masse}} &= \frac{g^2}{4}(v_1^2 + v_2^2)(W^-_\mu W^{+\mu}) + \frac{g^2}{8\cos^2\theta_W}(v_1^2 + v_2^2)(Z^0_\mu Z^{0\mu}) \\ &= m_W^2 (W^-_\mu W^{+\mu}) + \frac{1}{2} m_Z^2 (Z^0_\mu Z^{0\mu})\end{aligned} \tag{7.15}$$

Die übrigbleibenden Terme ergeben die 3-Vertizes und 4-Vertizes der elektroschwachen Eichbosonen mit den physikalischen Higgs-Bosonen.

Die 3-Higgs-Eichboson-Vertizes

$$AH^\mp W^\pm : \qquad \frac{g}{2}(\partial_\mu H^\mp A - \partial_\mu A H^\mp) W^{\pm\mu} \tag{7.16}$$

$$AZ^0 H : \qquad \frac{g \sin(\beta - \alpha)}{2\cos\theta_W}(\partial_\mu H A - \partial_\mu A H) Z^0_\mu \tag{7.17}$$

$$AZ^0 h : \qquad -\frac{g \cos(\beta - \alpha)}{2\cos\theta_W}(\partial_\mu h A - \partial_\mu A h) Z^0_\mu \tag{7.18}$$

$$HW^+W^-: \quad \frac{g^2}{2}(v_2 \sin\alpha + v_1 \cos\alpha) H (W_\mu^- W^{+\mu}) \tag{7.19}$$

$$hW^+W^-: \quad \frac{g^2}{2}(v_2 \cos\alpha - v_1 \sin\alpha) h (W_\mu^- W^{+\mu}) \tag{7.20}$$

$$HH^\mp W^\pm: \quad \mp \mathrm{i}\, \frac{g \sin(\beta-\alpha)}{2} W_\mu^\pm (\partial^\mu H H^\mp - \partial^\mu H^\mp H) \tag{7.21}$$

$$hH^\mp W^\pm: \quad \pm \mathrm{i}\, \frac{g \cos(\beta-\alpha)}{2} W_\mu^\pm (\partial^\mu h H^\mp - \partial^\mu H^\mp h) \tag{7.22}$$

$$HZ^0Z^0: \quad \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}(v_2 \sin\alpha + v_1 \cos\alpha) H (Z_\mu^0 Z^{0\mu}) \tag{7.23}$$

$$hZ^0Z^0: \quad \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}(v_2 \cos\alpha - v_1 \sin\alpha) h (Z_\mu^0 Z^{0\mu}) \tag{7.24}$$

$$H^+H^-\gamma: \quad \mathrm{i}e A_\mu (\partial^\mu H^+ H^- - \partial^\mu H^+ H^-) \tag{7.25}$$

$$H^+H^-Z^0: \quad \mathrm{i}g \frac{2\cos^2\theta_W - 1}{2\cos\theta_W} Z_\mu^0 (\partial^\mu H^+ H^- - \partial^\mu H^+ H^-) \tag{7.26}$$

Die 4-Higgs-Eichboson-Vertizes

$$AAZ^0Z^0: \quad \frac{g^2}{8\cos^2\theta_W} A^2 (Z_\mu^0 Z^{0\mu}) \tag{7.27}$$

$$HHZ^0Z^0: \quad \frac{g^2}{8\cos^2\theta_W} H^2 (Z_\mu^0 Z^{0\mu}) \tag{7.28}$$

$$hhZ^0Z^0: \quad \frac{g^2}{8\cos^2\theta_W} h^2 (Z_\mu^0 Z^{0\mu}) \tag{7.29}$$

$$H^+H^-Z^0Z^0: \quad \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W} (2\cos^2\theta_W - 1)^2 H^+H^- (Z_\mu^0 Z^{0\mu}) \tag{7.30}$$

$$H^+H^-\gamma\gamma: \quad e^2 H^+H^- (A_\mu A^\mu) \tag{7.31}$$

$$H^+H^-\gamma Z^0: \quad \frac{eg}{\cos\theta_W} (2\cos^2\theta_W - 1) H^+H^- (A_\mu Z^{0\mu}) \tag{7.32}$$

$$HH^\mp Z^0 W^\pm: \quad \frac{g^2 \sin^2\theta_W \sin(\beta-\alpha)}{2\cos\theta_W} (Z_\mu^0 W^{\pm\mu}) H H^\mp \tag{7.33}$$

$$hH^\mp Z^0 W^\pm: \quad -\frac{g^2 \sin^2\theta_W \cos(\beta-\alpha)}{2\cos\theta_W} (Z_\mu^0 W^{\pm\mu}) h H^\mp \tag{7.34}$$

$$HH^\mp \gamma W^\pm: \quad -\frac{eg \sin(\beta-\alpha)}{2} (A_\mu W^{\pm\mu}) H H^\mp \tag{7.35}$$

$$hH^\mp \gamma W^\pm: \quad \frac{eg \cos(\beta-\alpha)}{2} (A_\mu W^{\pm\mu}) h H^\mp \tag{7.36}$$

$$AAW^+W^-: \quad \frac{g^2}{4} A^2 (W_\mu^- W^{+\mu}) \tag{7.37}$$

$$HHW^+W^- : \quad \frac{g^2}{4} H^2 (W_\mu^- W^{+\mu}) \tag{7.38}$$

$$hhW^+W^- : \quad \frac{g^2}{4} h^2 (W_\mu^- W^{+\mu}) \tag{7.39}$$

$$H^+H^-W^+W^- : \quad \frac{g^2}{2} H^+H^- (W_\mu^- W^{+\mu}) \tag{7.40}$$

$$AZ^0W^\pm H^\mp : \quad \mp \mathrm{i} \frac{g^2 \sin^2\theta_W}{2\cos\theta_W} AZ_\mu^0 W^{\pm\mu} H^\mp \tag{7.41}$$

$$A\gamma W^\pm H^\mp : \quad \pm \mathrm{i} \frac{eg}{2} AA_\mu W^{\pm\mu} H^\mp \tag{7.42}$$

3-(Higgs)-Goldstone-Eichboson-Vertizes

$$\phi^+\phi^-Z^0 : \quad \mathrm{i}\frac{g_Z}{2}\left(1-2\sin^2\theta_W\right) Z_\mu^0 \left(\phi^-\partial^\mu\phi^+ - \phi^+\partial^\mu\phi^-\right) \tag{7.43}$$

$$\phi^+\phi^-\gamma : \quad \mathrm{i}eA_\mu \left(\phi^-\partial^\mu\phi^+ - \phi^+\partial^\mu\phi^-\right) \tag{7.44}$$

$$\phi^0\phi^\mp W^\pm : \quad \frac{g}{2} W_\pm^\mu \left(\phi^0\partial_\mu\phi^\mp - \phi^\mp\partial_\mu\phi^0\right) \tag{7.45}$$

$$H^0\phi^0Z^0 : \quad -\frac{g_Z}{2}\cos(\alpha-\beta) Z_\mu^0 \left(H^0\partial^\mu\phi^0 - \phi^0\partial^\mu H^0\right) \tag{7.46}$$

$$h^0\phi^0Z^0 : \quad \frac{g_Z}{2}\sin(\alpha-\beta) Z_\mu^0 \left(h^0\partial^\mu\phi^0 - \phi^0\partial^\mu h^0\right) \tag{7.47}$$

$$H^0\phi^\mp W^\pm : \quad \pm \mathrm{i}\frac{g}{2}\cos(\alpha-\beta)\left(H^0\partial_\mu\phi^\mp - \phi^\mp\partial_\mu H^0\right) W^{\pm\mu} \tag{7.48}$$

$$h^0\phi^\mp W^\pm : \quad \mp \mathrm{i}\frac{g}{2}\sin(\alpha-\beta)\left(h^0\partial_\mu\phi^\mp - \phi^\mp\partial_\mu h^0\right) W^{\pm\mu} \tag{7.49}$$

$$\phi^\mp W^\pm \gamma : \quad -em_W A_\mu W^{\pm\mu}\phi^\mp \tag{7.50}$$

$$\phi^\mp W^\pm Z^0 : \quad g_Z m_W \sin^2\theta_W Z_\mu^0 W^{\pm\mu}\phi^\mp \tag{7.51}$$

4-(Higgs)-Goldstone-Eichboson-Vertizes

$$\phi^0\phi^0Z^0Z^0 : \quad \frac{g_Z^2}{8} Z_\mu^0 Z^{0\mu} (\phi^0)^2 \tag{7.52}$$

$$\phi^+\phi^-\gamma\gamma : \quad e^2 A_\mu A^\mu \phi^+\phi^- \tag{7.53}$$

$$\phi^+\phi^-Z^0\gamma : \quad eg_Z\left(1-2\sin^2\theta_W\right)(Z_\mu^0 A^\mu)\phi^+\phi^- \tag{7.54}$$

$$\phi^+\phi^-Z^0Z^0 : \quad \frac{g_Z^2}{4}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)^2 Z_\mu^0 Z^{0\mu}\phi^+\phi^- \tag{7.55}$$

$$\phi^+\phi^-W^+W^- : \quad \frac{g^2}{2}(W_\mu^+ W^{-\mu})\phi^+\phi^- \tag{7.56}$$

$$\phi^0\phi^0W^+W^- : \quad \frac{g^2}{4}(W_\mu^+ W^{-\mu})(\phi^0)^2 \tag{7.57}$$

$$\phi^0\phi^\mp W^\pm\gamma: \qquad \pm\,\mathrm{i}\frac{eg}{2}A_\mu W^{\pm\,\mu}\phi^\mp\phi^0 \tag{7.58}$$

$$\phi^0\phi^\mp W^\pm Z^0: \qquad \mp\,\mathrm{i}\frac{gg_Z\sin^2\theta_W}{2}Z^0_\mu W^{\pm\,\mu}\phi^\mp \tag{7.59}$$

$$H^0\phi^\mp W^\pm\gamma; \qquad -\frac{eg}{2}\cos(\alpha-\beta)H^0A_\mu W^{\pm\,\mu}\phi^\mp \tag{7.60}$$

$$h^0\phi^\mp W^\pm\gamma; \qquad \frac{eg}{2}\sin(\alpha-\beta)h^0A_\mu W^{\pm\,\mu}\phi^\mp \tag{7.61}$$

$$H^0\phi^\mp W^\pm Z^0: \qquad \frac{gg_Z\sin^2\theta_W\cos(\alpha-\beta)}{2}H^0Z^0_\mu W^{\pm\,\mu}\phi^\mp \tag{7.62}$$

$$h^0\phi^\mp W^\pm Z^0: \qquad -\frac{gg_Z\sin^2\theta_W\sin(\alpha-\beta)}{2}h^0Z^0_\mu W^{\pm\,\mu}\phi^\mp \tag{7.63}$$

7.2 Das Higgs-Potential

Hierzu, wie auch zum vorangegangenen Abschnitt s. vor allem [29]. Das Higgs-Potential (6.45) liefert die Massenterme der (physikalischen) Higgs-Bosonen wie auch die Kopplungen der Higgs-Bosonen untereinander. An letzteren sind wir sehr interessiert, weshalb wir die Rechnung hier auch vollständig ausführen, wenn wir die Massenterme natürlich auch schon kennen. Es ergibt sich in ersten Teilschritten:

$$\begin{aligned}|H_1|^2 = {} & \frac{v_1^2}{2}+\frac{\cos^2\alpha}{2}(H^0)^2+\frac{\sin^2\alpha}{2}(h^0)^2+v_1H^0\cos\alpha-v_1h^0\sin\alpha\\ & -h^0H^0\cos\alpha\sin\alpha+\frac{\sin^2\beta}{2}(A^0)^2+\frac{\cos^2\beta}{2}(\phi^0)^2\\ & +\cos\beta\sin\beta A^0\phi^0+H^+H^-\sin^2\beta+\phi^+\phi^-\cos^2\beta+\phi^\pm H^\mp\cos\beta\sin\beta\end{aligned} \tag{7.64}$$

$$\begin{aligned}|H_2|^2 = {} & \frac{v_2^2}{2}+\frac{\sin^2\alpha}{2}(H^0)^2+\frac{\cos^2\alpha}{2}(h^0)^2+v_2H^0\sin\alpha+v_2h^0\cos\alpha\\ & +h^0H^0\cos\alpha\sin\alpha+\frac{\cos^2\beta}{2}(A^0)^2+\frac{\sin^2\beta}{2}(\phi^0)^2-A^0\phi^0\cos\beta\sin\beta\\ & +H^+H^-\cos^2\beta+\phi^+\phi^-\sin^2\beta-\phi^\pm H^\mp\cos\beta\sin\beta\end{aligned} \tag{7.65}$$

$$\begin{aligned}\left|H_1^\dagger H_2\right|^2 = {} & \frac{1}{2}\left|H^+\cos\beta-\phi^+\sin\beta\right|^2\Big[v_1^2+(H^0)^2\cos^2\alpha+(h^0)^2\sin^2\alpha\\ & +2v_1H^0\cos\alpha-2v_1h^0\sin\alpha-H^0h^0\sin(2\alpha)+(A^0)^2\sin^2\beta\\ & +(\phi^0)^2\cos^2\beta+A^0\phi^0\sin(2\beta)\Big]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\left|H^+\sin\beta+\phi^+\cos\beta\right|^2\Big[v_2^2+(H^0)^2\sin^2\alpha+(h^0)^2\cos^2\alpha\\
&\quad+2v_2H^0\sin\alpha+2v_2h^0\cos\alpha+H^0h^0\sin(2\alpha)+(A^0)^2\cos^2\beta\\
&\quad+(\phi^0)^2\sin^2\beta-A^0\phi^0\sin(2\beta)\Big]\\
&+\frac{1}{2}\Big(2\left(H^+H^- -\phi^+\phi^-\right)\cos\beta\sin\beta+\left(H^+\phi^- +H^-\phi^+\right)\cos(2\beta)\Big)\cdot\\
&\quad\Big[v_1v_2+H^0(v_1\sin\alpha+v_2\cos\alpha)+h^0(v_1\cos\alpha-v_2\sin\alpha)\\
&\quad+H^0h^0\cos(2\alpha)+(H^0)^2\cos\alpha\sin\alpha-(h^0)^2\cos\alpha\sin\alpha\\
&\quad-(A^0)^2\cos\beta\sin\beta+(\phi^0)^2\cos\beta\sin\beta-A^0\phi^0\cos(2\beta)\Big]\\
&+\frac{1}{2}\mathrm{i}\left(H^-\phi^+-H^+\phi^-\right)\Big[A^0(v_1\cos\beta+v_2\sin\beta)\\
&\quad-\phi^0(v_1\sin\beta-v_2\cos\beta)+A^0H^0\cos(\alpha-\beta)\\
&\quad-A^0h^0\sin(\alpha-\beta)+\phi^0H^0\sin(\alpha-\beta)+\phi^0h^0\cos(\alpha-\beta)\Big]
\end{aligned}
\tag{7.66}
$$

Hierin verschwindet der erste Term in der vorletzten Zeile aufgrund der Vakuumstruktur des Zwei-Higgsdublett-Modells des MSSM, s. (7.7).

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
&\Big(|H_1|^2-|H_2|^2\Big)^2\\
&=\Big[\frac{v_1^2}{2}-\frac{v_2^2}{2}+\frac{\cos(2\alpha)}{2}(H^0)^2-\frac{\cos(2\alpha)}{2}(h^0)^2-h^0H^0\sin(2\alpha)\\
&\qquad-\frac{\cos(2\beta)}{2}(A^0)^2-\cos(2\beta)H^+H^- -h^0(v_1\sin\alpha+v_2\cos\alpha)\\
&\qquad+H^0(v_1\cos\alpha-v_2\sin\alpha)+A^0\phi^0\sin(2\beta)+\frac{\cos(2\beta)}{2}(\phi^0)^2\\
&\qquad+\phi^+\phi^-\cos(2\beta)+\phi^\mp H^\pm\sin(2\beta)\Big]^2\\
&=\frac{1}{4}(v_1^2-v_2^2)^2+\frac{1}{4}(H^0)^4\cos^2(2\alpha)+\frac{1}{4}(h^0)^4\cos^2(2\alpha)\\
&\quad+(h^0)^2(H^0)^2\sin^2(2\alpha)+\frac{1}{4}(A^2)^4\cos^2(2\beta)+(H^+H^-)^2\cos^2(2\beta)\\
&\quad+(h^0)^2(v_1\sin\alpha+v_2\cos\alpha)^2+(H^0)^2(v_1\cos\alpha-v_2\sin\alpha)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}(v_1^2-v_2^2)\cos(2\alpha)(H^0)^2-\frac{1}{2}(v_1^2-v_2^2)\cos(2\alpha)(h^0)^2\\
&-(v_1^2-v_2^2)h^0H^0\sin(2\alpha)-\frac{1}{2}(v_1^2-v_2^2)\cos(2\beta)(A^0)^2\\
&-(v_1^2-v_2^2)(H^+H^-)\cos(2\beta)-(v_1^2-v_2^2)h^0(v_1\sin\alpha+v_2\cos\alpha)\\
&+(v_1^2-v_2^2)H^0(v_1\cos\alpha-v_2\sin\alpha)-\frac{1}{2}(h^0)^2(H^0)^2\cos^2(2\alpha)\\
&-h^0(H^0)^3\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)-\frac{1}{2}H^2(A^0)^2\cos(2\alpha)\cos(2\beta)\\
&-(H^0)^2H^+H^-\cos(2\alpha)\cos(2\beta)-h^0(H^0)^2\cos(2\alpha)(v_1\sin\alpha+v_2\cos\alpha)\\
&+(H^0)^3\cos(2\alpha)(v_1\cos\alpha-v_2\sin\alpha)+(h^0)^3H^0\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)\\
&+\frac{1}{2}(h^0)^2(A^0)^2\cos(2\alpha)\cos(2\beta)+(h^0)^2H^+H^-\cos(2\alpha)\cos(2\beta)\\
&+(h^0)^3\cos(2\alpha)(v_1\sin\alpha+v_2\cos\alpha)-(h^0)^2H^0\cos(2\alpha)(v_1\cos\alpha-v_2\sin\alpha)\\
&+h^0H^0(A^0)^2\cos(2\beta)\sin(2\alpha)+2h^0H^0H^+H^-\sin(2\alpha)\cos(2\beta)\\
&+2(h^0)^2H^0\sin(2\alpha)(v_1\sin\alpha+v_2\cos\alpha)\\
&-2h^0(H^0)^2\sin(2\alpha)(v_1\cos\alpha-v_2\sin\alpha)\\
&+(A^0)^2H^+H^-\cos^2(2\beta)+h^0(A^0)^2\cos(2\beta)(v_1\sin\alpha+v_2\cos\alpha)\\
&-H^0(A^0)^2\cos(2\beta)(v_1\cos\alpha-v_2\sin\alpha)\\
&+2h^0H^+H^-\cos(2\beta)(v_1\sin\alpha+v_2\cos\alpha)\\
&-2H^0H^+H^-\cos(2\beta)(v_1\cos\alpha-v_2\sin\alpha)\\
&-2h^0H^0(v_1\sin\alpha+v_2\cos\alpha)(v_1\cos\alpha-v_2\sin\alpha)\\
&+(A^0)^2(\phi^0)^2\sin^2(2\beta)+\frac{1}{4}(\phi^0)^4\cos^2(2\beta)+(\phi^+\phi^-)^2\cos^2(2\beta)\\
&+(\phi^\mp H^\pm)^2\sin^2(2\beta)+(v_1^2-v_2^2)A^0\phi^0\sin(2\beta)+\frac{1}{2}(v_1^2-v_2^2)(\phi^0)^2\cos(2\beta)\\
&+(v_1^2-v_2^2)\phi^+\phi^-\cos(2\beta)+(v_1^2-v_2^2)\phi^\mp H^\pm\sin(2\beta)\\
&+(H^0)^2A^0\phi^0\cos(2\alpha)\sin(2\beta)+\frac{1}{2}(\phi^0)^2(H^0)^2\cos(2\alpha)\cos(2\beta)\\
&+(H^0)^2\phi^+\phi^-\cos(2\alpha)\cos(2\beta)+(H^0)^2\phi^\mp H^\pm\cos(2\alpha)\sin(2\beta)\\
&-(h^0)^2A^0\phi^0\cos(2\alpha)\sin(2\beta)-\frac{1}{2}(h^0)^2(\phi^0)^2\cos(2\alpha)\cos(2\beta)\\
&-(h^0)^2\phi^+\phi^-\cos(2\alpha)\cos(2\beta)-(h^0)^2\phi^\mp H^\pm\cos(2\alpha)\sin(2\beta)\\
&-2h^0H^0A^0\phi^0\sin(2\alpha)\sin(2\beta)-h^0H^0(\phi^0)^2\sin(2\alpha)\cos(2\beta)\\
&-2h^0H^0\phi^+\phi^-\sin(2\alpha)\cos(2\beta)-2h^0H^0\phi^\mp H^\pm\sin(2\alpha)\sin(2\beta)\\
&-(A^0)^3\phi^0\cos(2\beta)\sin(2\beta)-\frac{1}{2}(A^0)^2(\phi^0)^2\cos^2(2\beta)-(A^0)^2\phi^+\phi^-\cos^2(2\beta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- (A^0)^2\phi^\mp H^\pm \cos(2\beta)\sin(2\beta) - 2A^0\phi^0 H^+H^- \cos(2\beta)\sin(2\beta)\\
&- (\phi^0)^2 H^+H^- \cos^2(2\beta) - 2\phi^+\phi^- H^+H^- \cos^2(2\beta)\\
&- 2\phi^\mp H^\pm H^+H^- \cos(2\beta)\sin(2\beta) - 2h^0A^0\phi^0(v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha)\sin(2\beta)\\
&- h^0(\phi^0)^2(v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha)\cos(2\beta)\\
&- 2h^0\phi^+\phi^-(v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha)\cos(2\beta)\\
&- 2h^0\phi^\mp H^\pm(v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha)\sin(2\beta)\\
&+ 2H^0A^0\phi^0(v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha)\sin(2\beta).\\
&+ H^0(\phi^0)^2(v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha)\cos(2\beta)\\
&+ 2H^0\phi^+\phi^-(v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha)\cos(2\beta)\\
&+ 2H^0\phi^\mp H^\pm(v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha)\sin(2\beta) + A^0(\phi^0)^3\cos(2\beta)\sin(2\beta)\\
&+ 2A^0\phi^0\phi^+\phi^-\cos(2\beta)\sin(2\beta) + 2A^0\phi^0\phi^\mp H^\pm\sin^2(2\beta)\\
&+ (\phi^0)^2\phi^+\phi^-\cos^2(2\beta) + (\phi^0)^2\phi^\mp H^\pm\cos(2\beta)\sin(2\beta)\\
&+ 2\phi^+\phi^-\phi^\mp H^\pm\cos(2\beta)\sin(2\beta)
\end{aligned} \tag{7.67}
$$

Dieser Ausdruck muß nur noch mit $(g^2 + g'^2)/8$ multipliziert werden. Man hat darin zu berücksichtigen, daß gilt:

$$(\phi^\mp H^\pm)^2 = (\phi^- H^+ + \phi^+ H^-)^2 = (\phi^-)^2(H^+)^2 + (\phi^+)^2(H^-)^2 + 2\phi^+\phi^-H^+H^-.$$

Weiterhin errechnet man

$$
\begin{aligned}
&\Re[H_1^0H_2^0 - H_1^-H_2^+]\\
&= \frac{v_1v_2}{2} + \frac{1}{2}(H^0)^2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{1}{2}(h^0)^2\sin\alpha\cos\alpha\\
&\quad + \frac{1}{2}H^0(v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha) + \frac{1}{2}h^0(v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha) - \frac{1}{2}(A^0)^2\sin\beta\cos\beta\\
&\quad + \frac{1}{2}h^0H^0\cos(2\alpha) - H^+H^-\cos\beta\sin\beta + \phi^+\phi^-\cos\beta\sin\beta\\
&\quad - \frac{1}{2}\phi^\mp H^\pm\cos(2\beta) + (\phi^0)^2\cos\beta\sin\beta - \phi^0A^0\cos(2\beta)
\end{aligned} \tag{7.68}
$$

Hier hat man $-(B\mu)$ als Vorfaktor zu verwenden.

Der Term linear in dem leichteren neutralen Higgs h^0 ist

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{h^0}/h^0 = {} & \frac{g^2 + g'^2}{8}(v_1^2 - v_2^2)(-v_1\sin\alpha - v_2\cos\alpha) - (m_1^2 + |\mu|^2)v_1\sin\alpha\\
& + (m_2^2 + |\mu|^2)v_2\cos\alpha - \frac{1}{2}(B\mu)(v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha)\\
= {} & -\sin\alpha\cdot(6.55) + \cos\alpha\cdot(6.56) = 0,
\end{aligned} \tag{7.69}
$$

und entsprechend für das schwerere:

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_{H^0}/H^0 = \;& \frac{g^2+g'^2}{8}(v_1^2-v_2^2)(v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha) + (m_1^2+|\mu|^2)v_1\cos\alpha \\ & + (m_2^2+|\mu|^2)v_2\sin\alpha - \frac{1}{2}(B\mu)(v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha) \\ = \;& \cos\alpha\cdot(6.55) + \sin\alpha\cdot(6.56) = 0. \end{aligned} \tag{7.70}$$

Das war zu erwarten, denn die ganze Konstruktion zielte ja darauf ab, die linearen Terme zum Verschwinden zu bringen. Mit den Gleichungen (6.58) , (6.60), (6.61) und (6.72) kann man zeigen, daß auch der Term proportional zu h^0H^0 verschwindet als möglicher Massenterm zweier zueinander orthogonaler Felder:

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_{h^0H^0}/(h^0H^0) = \;& -\frac{1}{2}(m_1^2-m_2^2)\sin(2\alpha) - \frac{1}{2}(B\mu)\cos(2\alpha) \\ & -\frac{g^2+g'^2}{4}\left[(v_1^2-v_2^2)\sin(2\alpha) + v_1v_2\cos(2\alpha)\right] \\ = \;& \frac{1}{2}(m_A^2+m_Z^2)\sin(2\alpha)\cos(2\beta) - \frac{1}{2}m_A^2\cos(2\alpha)\sin(2\beta) \\ & - m_Z^2\left[\sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \frac{1}{2}\cos(2\alpha)\sin(2\beta)\right] \\ = \;& \frac{1}{2}(m_A^2-m_Z^2)\sin(2\alpha)\cos(2\beta) - \frac{1}{2}(m_A^2+m_Z^2)\cos(2\alpha)\sin(2\beta) \\ = \;& 0. \end{aligned} \tag{7.71}$$

Lineare Terme in den Goldstone-Bosonen können nicht auftreten, da nur die neutralen Higgs-Komponenten Vakuumerwartungswerte erhalten, und dort die Goldstone-Bosonen als Imaginärteile erscheinen. Auch die bilinearen Terme verschwinden, wie man sich überzeugt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(\phi^0)^2}/(\phi^0)^2 = \;& \frac{g^2+g'^2}{16}(v_1^2-v_2^2)\cos(2\beta)(B\mu)\cos(2\beta) \\ & + \frac{1}{2}(m_1^2+|\mu|^2)\cos^2\beta + \frac{1}{2}(m_2^2+|\mu|^2)\sin^2\beta \\ = \;& \frac{v_1}{v_1^2+v_2^2}\cdot(6.55) + \frac{v_2}{v_1^2+v_2^2}\cdot(6.56) = 0. \end{aligned} \tag{7.72}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{A^0\phi^0}/(A^0\phi^0) = \;& \frac{g^2+g'^2}{8}(v_1^2-v_2^2)\sin(2\beta) - (B\mu)\cos\beta\sin\beta \\ & + (m_1^2+|\mu|^2)\cos\beta\sin\beta - (m_2^2+|\mu|^2)\cos\beta\sin\beta \\ = \;& \frac{v_2}{v_1^2+v_2^2}\cdot(6.55) - \frac{v_1}{v_1^2+v_2^2}\cdot(6.56) = 0 \end{aligned} \tag{7.73}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\phi^+\phi^-}/(\phi^+\phi^-) &= \frac{g^2+g'^2}{8}(v_1^2-v_2^2)\cos(2\beta) - (B\mu)\cos\beta\sin\beta \\
&\quad + (m_1^2+|\mu|^2)\cos^2\beta + (m_2^2+|\mu|^2)\sin^2\beta \\
&\quad + \frac{g^2}{4}(v_2\cos\beta - v_1\sin\beta)^2 \\
&= \frac{v_1}{v_1^2+v_2^2}\cdot(6.55) + \frac{v_2}{v_1^2+v_2^2}\cdot(6.56) + 0 = 0 \qquad (7.74) \\
\mathcal{L}_{\phi^\mp H^\pm}/(\phi^\mp H^\pm) &= \frac{g^2+g'^2}{8}(v_1^2-v_2^2)\sin(2\beta) + (B\mu)\cos(2\beta) \\
&\quad + (m_1^2+|\mu|^2)\cos\beta\sin\beta + (m_2^2+|\mu|^2)\cos\beta\sin\beta \\
&\quad + \frac{g^2}{4}\left[\sin\beta\cos\beta(v_2^2-v_1^2) + v_1v_2\cos(2\beta)\right] \\
&= \frac{v_2}{v_1^2+v_2^2}\cdot(6.55) - \frac{v_1}{v_1^2+v_2^2}\cdot(6.56) + 0 = 0 \qquad (7.75)
\end{aligned}
$$

Kommen wir jetzt zu den Massentermen der fünf physikalischen Higgs-Felder. Man beachte, daß der Potentialterm

$$\frac{1}{2}m_H^2(H^0)^2 + \frac{1}{2}m_h^2(h^0)^2 + \frac{1}{2}m_A^2(A^0)^2 + m_{H^\pm}^2(H^+H^-)$$

ergeben muß. Für das schwerere neutrale Higgs rechnet man mit der Hilfe von (6.58), (6.60), (6.62), (6.63) und (6.74):

$$
\begin{aligned}
m_H^2 &\overset{!}{=} (m_1^2+|\mu|^2)\cos^2\alpha + (m_2^2+|\mu|^2)\sin^2\alpha - \frac{1}{2}(B\mu)\sin(2\alpha) \\
&\quad + \frac{g^2+g'^2}{4}\left[(v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha)^2 + \frac{1}{2}(v_1^2-v_2^2)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\right] \\
&= \frac{1}{2}m_{A^0}^2 - \frac{1}{2}(m_{A^0}^2+m_{Z^0}^2)\cos(2\alpha)\cos(2\beta) - \frac{1}{2}m_A^2\sin(2\alpha)\sin(2\beta) \\
&\quad + \frac{m_Z^2}{v_1^2+v_2^2}\left[\frac{1}{2}(v_1^2+v_2^2) + \frac{1}{2}(v_1^2-v_2^2)\cos(2\alpha) - v_1v_2\sin(2\alpha)\right] \\
&= \frac{1}{2}(m_A^2+m_Z^2) - \frac{1}{2}(m_A^2+m_Z^2)\cos(2\alpha)\cos(2\beta) - \frac{1}{2}m_A^2\sin(2\alpha)\sin(2\beta) \\
&\quad + m_Z^2\left[\cos(2\alpha)\cos(2\beta) - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\sin(2\beta)\right] \\
&= \frac{1}{2}\Big(m_A^2+m_Z^2 - (m_A^2-m_Z^2)\cos(2\alpha)\cos(2\beta) \\
&\quad - (m_A^2+m_Z^2)\sin(2\alpha)\sin(2\beta)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\left(m_A^2+m_Z^2 - (m_A^2+m_Z^2)\left(\sin(2\alpha)\sin(2\beta) + \frac{\tan(2\beta)}{\tan(2\alpha)}\cos(2\alpha)\cos(2\beta)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}\left(m_A^2 + m_Z^2 - (m_A^2 + m_Z^2)\frac{\sin(2\beta)}{\sin(2\alpha)} \right) = \frac{1}{2}(m_H^2 + m_h^2 + m_H^2 - m_h^2) \tag{7.76}$$

Ähnlich verfährt man für das leichtere neutrale Higgs h^0:

$$\begin{aligned} m_h^2 &= (m_1^2 + |\mu|^2)\sin^2\alpha + (m_2^2 + |\mu|^2)\cos^2\alpha + \frac{1}{2}(B\mu)\sin(2\alpha) \\ &\quad + \frac{g^2 + g'^2}{4}\left[(v_1 \sin\alpha + v_2\cos\alpha)^2 - \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \right] \\ &= \frac{1}{2}m_A^2 + \frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2)\cos(2\alpha)\cos(2\beta) + \frac{1}{2}m_A^2\sin(2\alpha)\sin(2\beta) \\ &\quad + \frac{m_Z^2}{v_1^2 + v_2^2}\left[\frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) - \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)\cos(2\alpha) + v_1 v_2 \sin(2\alpha) \right] \\ &= \frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2) + \frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2)\cos(2\alpha)\cos(2\beta) + \frac{1}{2}m_A^2 \sin(2\alpha)\sin(2\beta) \\ &\quad - m_Z^2\left[\cos(2\alpha)\cos(2\beta) - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\sin(2\beta) \right] \\ &= \frac{1}{2}(m_H^2 + m_h^2 - m_H^2 + m_h^2) \end{aligned} \tag{7.77}$$

Das pseudoskalare Higgs hat diesen Massenterm:

$$\begin{aligned} m_A^2 &= (m_1^2 + |\mu|^2)\sin^2\beta + (m_2^2 + |\mu|^2)\cos^2\beta + \frac{1}{2}(B\mu)\sin(2\beta) \\ &\quad - \frac{g^2 + g'^2}{8}(v_1^2 - v_2^2)\cos(2\beta) \\ &= \frac{1}{2}\left(m_A^2 + (m_A^2 + m_Z^2)\cos^2(2\beta) + m_A^2 \sin^2(2\beta) - m_Z^2\cos^2(2\beta) \right) \end{aligned} \tag{7.78}$$

Und für die geladenen Higgs-Bosonen bekommt man, wenn man beachtet, daß bis auf den Faktor 2 und einen Term, den man mit (6.76) mit dem W-Massenquadrat identifiziert, alles mit dem pseudoskalaren Higgs übereinstimmt:

$$m_{H^\pm}^2 = m_A^2 + \frac{g^2 v_1^2}{4\cos^2\beta} = m_A^2 + \frac{g^2}{4}(v_1^2 + v_2^2) \tag{7.79}$$

Der konstante Term als Beitrag zur kosmologischen Konstante ist

$$-\frac{1}{4}(v_1^2 - v_2^2)^2 - (m_1^2 + |\mu|^2)\frac{v_1^2}{2} - (m_2^2 + |\mu|^2)\frac{v_2^2}{2} + \frac{1}{2}(B\mu)v_1 v_2 + \frac{1}{2}\xi_{U(1)_Y}^2 \tag{7.80}$$

Die trilinearen und quatrilinearen Terme ergeben die Higgs-Kopplungen. Im folgenden wird die Relation

$$g^2 + g'^2 = g^2 \cdot \frac{g^2 + g'^2}{g^2} = \frac{g^2}{\cos^2\theta_W} \equiv g_Z^2$$

benutzt.

Die 3-Higgs-Vertizes

$$H^+H^-H: \quad \Big(\frac{g_Z^2}{4}\cos(2\beta)(v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha) - \frac{g^2}{2}\frac{v_1}{\cos\beta}\cos(\beta-\alpha)\Big)H^0H^+H^- \tag{7.81}$$

$$H^+H^-h^0: \quad -\Big(\frac{g_Z^2}{4}\cos(2\beta)(v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha) + \frac{g^2}{2}\frac{v_1}{\cos\beta}\sin(\beta-\alpha)\Big)h^0H^+H^- \tag{7.82}$$

$$H^0H^0h^0: \quad \frac{g_Z^2}{8}\Big((v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha)\cos(2\alpha) + 2(v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha)\sin(2\alpha)\Big)(H^0)^2h^0 \tag{7.83}$$

$$H^0H^0H^0: \quad -\frac{g_Z^2}{8}\cos(2\alpha)(v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha)(H^0)^3 \tag{7.84}$$

$$h^0h^0h^0: \quad -\frac{g_Z^2}{8}\cos(2\alpha)(v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha)(h^0)^3 \tag{7.85}$$

$$h^0h^0H^0: \quad \frac{g_Z^2}{8}\Big((v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha)\cos(2\alpha) - 2(v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha)\sin(2\alpha)\Big)H^0(h^0)^2 \tag{7.86}$$

$$H^0A^0A^0: \quad \frac{g_Z^2}{8}\cos(2\beta)(v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha)H^0(A^0)^2 \tag{7.87}$$

$$h^0A^0A^0: \quad -\frac{g_Z^2}{8}\cos(2\beta)(v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha)h^0(A^0)^2 \tag{7.88}$$

Die 4-Higgs-Vertizes

$$H^+H^-H^+H^-: \quad -\frac{g_Z^2}{8}\cos^2(2\beta)(H^+H^-)^2 \tag{7.89}$$

$$H^+H^-H^0H^0: \quad -\Big(\frac{g^2}{4}\cos^2(\beta-\alpha) - \frac{g_Z^2}{8}\cos(2\alpha)\cos(2\beta)\Big)H^+H^-(H^0)^2 \tag{7.90}$$

$$H^+H^-h^0h^0: \quad -\Big(\frac{g^2}{4}\sin^2(\beta-\alpha) + \frac{g_Z^2}{8}\cos(2\alpha)\cos(2\beta)\Big)H^+H^-(h^0)^2 \tag{7.91}$$

$$H^+H^-H^0h^0: \quad -\Big(\frac{g^2}{2}\cos(\beta-\alpha)\sin(\beta-\alpha) + \frac{g_Z^2}{4}\sin(2\alpha)\cos(2\beta)\Big)H^+H^-H^0h^0 \tag{7.92}$$

$$H^+H^-A^0A^0: \quad -\frac{g_Z^2}{8}\cos^2(2\beta)H^+H^-(A^0)^2 \tag{7.93}$$

$$H^0H^0H^0H^0: \quad -\frac{g_Z^2}{32}\cos^2(2\alpha)(H^0)^4 \tag{7.94}$$

$$h^0h^0h^0h^0: \quad -\frac{g_Z^2}{32}\cos^2(2\alpha)(h^0)^4 \tag{7.95}$$

$$H^0H^0h^0h^0: \quad -\frac{g_Z^2}{16}(2\sin^2(2\alpha)-\cos^2(2\alpha))(H^0)^2(h^0)^2 \tag{7.96}$$

$$H^0h^0h^0h^0: \quad -\frac{g_Z^2}{8}\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)(h^0)^3H^0 \tag{7.97}$$

$$h^0H^0H^0H^0: \quad \frac{g_Z^2}{8}\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)h^0(H^0)^3 \tag{7.98}$$

$$H^0H^0A^0A^0: \quad \frac{g_Z^2}{16}\cos(2\alpha)\cos(2\beta)(H^0)^2(A^0)^2 \tag{7.99}$$

$$h^0h^0A^0A^0: \quad -\frac{g_Z^2}{16}\cos(2\alpha)\cos(2\beta)(h^0)^2(A^0)^2 \tag{7.100}$$

$$H^0h^0A^0A^0: \quad -\frac{g_Z^2}{8}\sin(2\alpha)\cos(2\beta)H^0h^0(A^0)^2 \tag{7.101}$$

$$A^0A^0A^0A^0: \quad -\frac{g_Z^2}{32}\cos^2(2\beta)(A^0)^4 \tag{7.102}$$

3-Higgs-Goldstone-Vertizes

$$H^0A^0\phi^0: \quad -\frac{g_Z}{2}m_Z\sin(2\beta)\cos(\alpha+\beta)H^0A^0\phi^0 \tag{7.103}$$

$$h^0A^0\phi^0: \quad \frac{g_Z}{2}m_Z\sin(2\beta)\sin(\alpha+\beta)h^0A^0\phi^0 \tag{7.104}$$

$$H^0H^\pm\phi^\mp: \quad -\frac{1}{2}\Big(gm_W\sin(\alpha-\beta) + g_Zm_Z\cos(\alpha+\beta)\sin(2\beta)\Big)H^0H^\pm\phi^\mp \tag{7.105}$$

$$h^0H^\pm\phi^\mp: \quad \frac{1}{2}\Big(-gm_W\cos(\alpha-\beta)+g_Zm_Z\sin(\alpha+\beta)\sin(2\beta)\Big)h^0H^\pm\phi^\mp \tag{7.106}$$

$$A^0H^\pm\phi^\mp: \quad \pm\,\mathrm{i}\,\frac{g}{2}m_W \tag{7.107}$$

$$H^0\phi^0\phi^0: \quad -\frac{g_Z}{4}m_Z\cos(\alpha+\beta)\cos(2\beta)H^0(\phi^0)^2 \tag{7.108}$$

$$H^0\phi^+\phi^-: \quad -\frac{g_Z}{2}m_Z\cos(\alpha+\beta)\cos(2\beta)H^0(\phi^0)^2 \tag{7.109}$$

$$h^0\phi^0\phi^0: \quad \frac{g_Z}{4}m_Z\sin(\alpha+\beta)\cos(2\beta)h^0(\phi^0)^2 \tag{7.110}$$

$$h^0\phi^+\phi^-: \quad \frac{g_Z}{2}m_Z\sin(\alpha+\beta)\cos(2\beta)h^0(\phi^0)^2 \tag{7.111}$$

4-(Higgs)-Goldstone-Vertizes

$$H^0H^0A^0\phi^0: \quad -\frac{g_Z^2}{8}\sin(2\beta)\cos(2\alpha)(H^0)^2A^0\phi^0 \tag{7.112}$$

$$h^0h^0A^0\phi^0: \quad \frac{g_Z^2}{8}\sin(2\beta)\cos(2\alpha)(h^0)^2A^0\phi^0 \tag{7.113}$$

$$H^0h^0A^0\phi^0: \quad \frac{g_Z^2}{4}\sin(2\beta)\sin(2\alpha)H^0h^0A^0\phi^0 \tag{7.114}$$

$$A^0A^0A^0\phi^0: \quad \frac{g_Z^2}{16}\sin(4\beta)(A^0)^3\phi^0 \tag{7.115}$$

$$H^+H^-A^0\phi^0: \quad \frac{g_Z^2}{8}\sin(4\beta)H^+H^-A^0\phi^0 \tag{7.116}$$

$$H^\pm\phi^\mp(H^0)^2: \quad -\frac{1}{8}\Big(g^2\sin[2(\alpha-\beta)]+g_Z^2\cos(2\alpha)\sin(2\beta)\Big)H^\pm\phi^\mp(H^0)^2 \tag{7.117}$$

$$H^\pm\phi^\mp(h^0)^2: \quad \frac{1}{8}\Big(g^2\sin[2(\alpha-\beta)]+g_Z^2\cos(2\alpha)\sin(2\beta)\Big)H^\pm\phi^\mp(h^0)^2 \tag{7.118}$$

$$H^\pm\phi^\mp H^0h^0: \quad -\frac{1}{4}\Big(g^2\cos[2(\alpha-\beta)]-g_Z^2\sin(2\alpha)\sin(2\beta)\Big)H^\pm\phi^\mp H^0h^0 \tag{7.119}$$

$$H^\pm\phi^\mp A^0A^0: \quad \frac{g_Z^2}{16}\sin(4\beta) \tag{7.120}$$

$$H^0A^0H^\pm\phi^\mp: \quad \pm\,\mathrm{i}\,\frac{g^2}{4}\cos(\alpha-\beta)H^0A^0H^\pm\phi^\mp \tag{7.121}$$

$$h^0A^0H^\pm\phi^\mp: \quad \mp\,\mathrm{i}\,\frac{g^2}{4}\sin(\alpha-\beta)H^0A^0H^\pm\phi^\mp \tag{7.122}$$

$$H^+H^-H^\pm\phi^\mp : \quad \frac{g_Z^2}{8}\sin(4\beta)H^+H^-H^\pm\phi^\mp \tag{7.123}$$

$$H^0H^0\phi^0\phi^0 : \quad -\frac{g_Z^2}{16}\cos(2\alpha)\cos(2\beta) \tag{7.124}$$

$$h^0h^0\phi^0\phi^0 : \quad \frac{g_Z^2}{16}\cos(2\alpha)\cos(2\beta) \tag{7.125}$$

$$H^0h^0\phi^0\phi^0 : \quad \frac{g_Z^2}{8}\sin(2\alpha)\cos(2\beta) \tag{7.126}$$

$$A^0A^0\phi^0\phi^0 : \quad -\frac{g_Z^2}{16}\left(3\sin^2\beta - 1\right)(A^0)^2(\phi^0)^2 \tag{7.127}$$

$$H^+H^-\phi^0\phi^0 : \quad -\left(\frac{g^2}{4} - \frac{g_Z^2}{8}\cos^2(2\beta)\right)H^+H^-(\phi^0)^2 \tag{7.128}$$

$$H^\pm H^0\phi^\mp\phi^0 : \quad \pm\,\mathrm{i}\,\frac{g^2}{4}\sin(\alpha-\beta)H^\pm H^0\phi^\mp\phi^0 \tag{7.129}$$

$$H^\pm h^0\phi^\mp\phi^0 : \quad \pm\,\mathrm{i}\,\frac{g^2}{4}\cos(\alpha-\beta)H^\pm h^0\phi^\mp\phi^0 \tag{7.130}$$

$$H^\pm\phi^\mp A^0\phi^0 : \quad \frac{1}{4}\left(g^2 - g_Z^2\sin^2(2\beta)\right)H^\pm\phi^\mp A^0\phi^0 \tag{7.131}$$

$$H^0H^0\phi^+\phi^- : \quad -\frac{1}{4}\Big(g^2\sin^2(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}g_Z^2\cos(2\alpha)\cos(2\beta)\Big)(H^0)^2\phi^+\phi^- \tag{7.132}$$

$$h^0h^0\phi^+\phi^- : \quad -\frac{1}{4}\Big(g^2\cos^2(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}g_Z^2\cos(2\alpha)\cos(2\beta)\Big)(h^0)^2\phi^+\phi^- \tag{7.133}$$

$$H^0h^0\phi^+\phi^- : \quad -\frac{1}{4}\Big(g^2\sin[2(\alpha-\beta)] - g_Z^2\sin(2\alpha)\cos(2\beta)\Big)H^0h^0\phi^+\phi^- \tag{7.134}$$

$$A^0A^0\phi^+\phi^- : \quad -\left(\frac{g^2}{4} - \frac{g_Z^2}{8}\cos^2(2\beta)\right)(A^0)^2\phi^+\phi^- \tag{7.135}$$

$$H^+H^-\phi^+\phi^- : \quad \frac{g_Z^2}{4}\cos(4\beta)H^+H^-\phi^+\phi^- \tag{7.136}$$

$$H^\pm H^\pm\phi^\mp\phi^\mp : \quad -\frac{g_Z^2}{8}\sin^2(2\beta)(H^\pm)^2(\phi^\mp)^2 \tag{7.137}$$

$$A^0\phi^0\phi^0\phi^0 : \quad -\frac{g_Z^2}{16}\sin(4\beta)A^0(\phi^0)^3 \tag{7.138}$$

$$H^\pm\phi^\mp\phi^0\phi^0 : \quad -\frac{g_Z^2}{16}\sin(4\beta)H^\pm\phi^\mp(\phi^0)^2 \tag{7.139}$$

$$A^0\phi^0\phi^+\phi^- : \quad -\frac{g_Z^2}{8}\sin(4\beta)A^0\phi^0\phi^+\phi^- \tag{7.140}$$

$$H^\pm\phi^\mp\phi^+\phi^- : \qquad -\frac{g_Z^2}{8}\sin(4\beta)H^\pm\phi^\mp\phi^+\phi^- \tag{7.141}$$

$$\phi^0\phi^0\phi^0\phi^0 : \qquad -\frac{g_Z^2}{32}\cos^2(2\beta)(\phi^0)^4 \tag{7.142}$$

$$\phi^0\phi^0\phi^+\phi^- : \qquad -\frac{g_Z^2}{8}\cos^2(2\beta)(\phi^0)^2\phi^+\phi^- \tag{7.143}$$

$$\phi^+\phi^-\phi^+\phi^- : \qquad -\frac{g_Z^2}{8}\cos^2(2\beta)(\phi^+)^2(\phi^-)^2 \tag{7.144}$$

7.3 Wechselwirkungen der Quarks und Leptonen mit dem Higgs-Sektor

Da der Higgs-Sektor i.allg. ein anderer ist im MSSM als im SM (man kann natürlich auch im Standardmodell zwei Higgs-Dubletts verwenden, die Existenz der Supersymmetrie auferlegt den Dubletts aber zusätzliche Einschränkungen), sind auch die Kopplungen der Higgs-Bosonen an die Standardmodell-Fermionen (Quarks und Leptonen) andere, so daß die für das SM durchgeführte Diskussion nicht übernommen werden kann.

In diesem Abschnitt werden auch die Kopplungen an die Goldstone-Bosonen diskutiert, die benötigt werden, falls in einer beliebigen R_ξ-Eichung gerechnet wird. Sammelt man die Terme aus (6.33) zusammen, die die Kopplung an die Higgs.Felder darstellen, hat man:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{ffH} = &-\sum_k \frac{m_{\ell_k}}{v_1}\left(\overline{\ell_k}\ell_k\right)\left(H^0\cos\alpha - h^0\sin\alpha\right) \\
&-\sum_k \frac{m_{u_k}}{v_2}\left(\overline{u_k}u_k\right)\left(H^0\sin\alpha + h^0\cos\alpha\right) \\
&-\sum_k \frac{m_{d_k}}{v_1}\left(\overline{d_k}d_k\right)\left(H^0\cos\alpha - h^0\sin\alpha\right) \\
&+\mathrm{i}\sum_k \frac{m_{\ell_k}}{v_1}\left(\overline{\ell_k}\gamma^5\ell_k\right)\left(A^0\sin\beta + \phi^0\cos\beta\right) \\
&+\mathrm{i}\sum_k \frac{m_{u_k}}{v_2}\left(\overline{u_k}\gamma^5 u_k\right)\left(A^0\cos\beta - \phi^0\sin\beta\right) \\
&+\mathrm{i}\sum_k \frac{m_{d_k}}{v_1}\left(\overline{d_k}\gamma^5 d_k\right)\left(A^0\sin\beta + \phi^0\cos\beta\right) \\
&+\sum_k \frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}\left(\overline{\nu_k}P_R\ell_k\right)\left(H^+\sin\beta + \phi^+\cos\beta\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_k \frac{\sqrt{2} m_{\ell_k}}{v_1} \left(\overline{\ell_k} P_L \nu_k \right) \left(H^- \sin\beta + \phi^- \cos\beta \right) \\
&+ \sum_{k,l} V_{kl}^{CKM} \left[\frac{\sqrt{2} m_{d_l}}{v_1} \left(\overline{u_k} P_R d_l \right) \left(H^+ \sin\beta + \phi^+ \cos\beta \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\sqrt{2} m_{u_k}}{v_2} \left(\overline{u_k} P_L d_l \right) \left(H^+ \cos\beta - \phi^+ \sin\beta \right) \right] \\
&+ \sum_{k,l} V_{kl}^{CKM*} \left[\frac{\sqrt{2} m_{d_l}}{v_1} \left(\overline{d_l} P_R u_k \right) \left(H^- \cos\beta - \phi^- \sin\beta \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\sqrt{2} m_{u_k}}{v_2} \left(\overline{d_l} P_L u_k \right) \left(H^- \sin\beta + \phi^- \cos\beta \right) \right] \\
&- \sum_k m_{\ell_k} \left(\overline{\ell_k} \ell_k \right) - \sum_k m_{u_k} \left(\overline{u_k} u_k \right) - \sum_k m_{d_k} \left(\overline{d_k} d_k \right) \qquad (7.145)
\end{aligned}
$$

7.4 Wechselwirkungen der Squarks und Sleptonen mit dem Higgs-Sektor

Allgemein hat man hier zunächst alle Terme zu berücksichtigen, die den Squarks und Sleptonen Masse gegeben haben, sowie natürlich auch noch die Kopplungen an die beiden geladenen Komponenten der beiden Higgs-Dubletts. Der Vollständigkeit halber (auch im Hinblick auf numerische Tests) werden wir alle in den vorangegangenen Abschnitten hergeleiteten Mischungen mitnehmen.

7.4.1 Higgs-Kopplungen der Squarks

Sammeln wir alle Kopplungsterme aus den D-Termen der $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$-Eichgruppe (die Higgs-Bosonen wechselwirken ja nicht stark!) sowie aus dem Superpotential, dann haben wir zu berücksichtigen, daß selbst, wenn wir nur die erste Generation betrachten, wir in Termen, wo up- und down-Squarks gemeinsam auftreten, die CKM-Mischungsmatrix für die down-Squark-Zustände einfügen müssen. Das hat zur Konsequenz, daß bei den Vertizes, wo up- und down-type-Quarks gemeinsam auftreten, wir die Mischungswinkel mit Generationenindizes versehen müssen. Zwar sagen die Universalitätsbedingungen voraus, daß die Mischung aller Generationen dieselbe ist, aber diese Beschränkung der Allgemeinheit wollen wir hier nicht annehmen.

Die Terme aus der Kopplung an die $U(1)_Y$-Eichgruppe sind:

$$
\begin{aligned}
&\frac{g'^2}{4}\frac{1}{3}|\tilde{u}_L|^2+\frac{1}{3}|\tilde{d}_L|^2-\frac{4}{3}|\tilde{u}_R|^2+\frac{2}{3}|\tilde{d}_R|^2\Big)\Big(|H_1^0|^2+|H_1^-|^2-|H_2^+|^2+|H_2^0|^2\Big)\\
=&\frac{g'^2}{4}\left(\frac{1}{3}|\tilde{u}_L|^2+\frac{1}{3}|\tilde{d}_L|^2-\frac{4}{3}|\tilde{u}_R|^2+\frac{2}{3}|\tilde{d}_R|^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}(v_1^2-v_2^2)\right.\\
&\qquad+(v_1\cos\alpha-v_2\sin\alpha)H^0-(v_1\sin\alpha+v_2\cos\alpha)h^0\\
&\qquad+\frac{1}{2}(H^0)^2\cos(2\alpha)-\frac{1}{2}(h^0)^2\cos(2\alpha)-H^0h^0\sin(2\alpha)\\
&\qquad-\frac{1}{2}(A^0)^2\cos(2\beta)+\frac{1}{2}(\phi^0)^2\cos(2\beta)+A^0\phi^0\sin(2\beta)\\
&\qquad\left.-H^+H^-\cos(2\beta)+\phi^+\phi^-\cos(2\beta)+H^\pm\phi^\mp\sin(2\beta)\right)
\end{aligned}
\tag{7.146}
$$

Dieser Ausdruck ist identisch für jede Generation, Mischungen aufgrund der CKM-Matrix treten nicht auf.

Die $SU(2)_L$-Eichgruppe dagegen liefert die folgenden Terme:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{g^2}{4}\left(2\sum_{b=1}^{3}|Q_b^\dagger H_1|^2-\sum_{b=1}^{3}(Q_b^\dagger Q_b)(H_1^\dagger H_1)+2\sum_{b=1^3}|Q_b^\dagger H_2|^2\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{b=1}^{3}(Q_b^\dagger Q_b)(H_2^\dagger H_2)\right)\\
=&\frac{g^2}{4}\sum_{b=1}^{3}\left(|\tilde{u}_{L,b}|^2+|\tilde{d}_{L,b}|^2\right)\cdot\left[\frac{1}{2}(v_1^2+v_2^2)+\frac{1}{2}(H^0)^2+\frac{1}{2}(h^0)^2\right.\\
&\qquad+(v_1\cos\alpha+v_2\sin\alpha)H^0-(v_1\sin\alpha-v_2\cos\alpha)h^0+\frac{1}{2}(A^0)^2\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}(\phi^0)^2+H^+H^-+\phi^+\phi^-\right]\\
&-\frac{g^2}{4}\sum_{b=1}^{3}|\tilde{u}_{L,b}|^2\Big(v_1^2+(H^0)^2\cos^2\alpha+(h^0)^2\sin^2\alpha+2v_1\cos\alpha H^0\\
&\qquad-2v_1\sin\alpha h^0-H^0h^0\sin(2\alpha)+(A^0)^2\sin^2\beta+(\phi^0)^2\cos^2\beta\\
&\qquad+A^0\phi^0\sin(2\beta)+2H^+H^-\cos^2\beta+2\phi^+\phi^-\sin^2\beta-H^\pm\phi^\mp\sin(2\beta)\Big)\\
&-\frac{g^2}{4}\sum_{b=1}^{3}|\tilde{d}_{L,b}|^2\Big(v_2^2+(H^0)^2\sin^2\alpha+(h^0)^2\cos^2\alpha+2v_2\sin\alpha H^0\\
&\qquad+2v_2\cos\alpha h^0+H^0h^0\sin(2\alpha)+(A^0)^2\cos^2\beta+(\phi^0)^2\sin^2\beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - A^0\phi^0 \sin(2\beta) + 2H^+H^- \sin^2\beta + 2\phi^+\phi^- \cos^2\beta + H^\pm\phi^\mp \sin(2\beta)\Big)\\
&- \frac{g^2}{2\sqrt{2}}\Bigg[\sum_{b,l=1}^{3}\Big(\tilde{u}^*_{L,b}V^{CKM}_{bl}\tilde{d}_{L,l}\Big)\Big(H^+\Big[v_1\sin\beta + v_2\cos\beta + H^0\sin(\alpha+\beta)\\
&\quad + h^0\cos(\alpha+\beta) - \mathrm{i}A^0\cos(2\beta) + \mathrm{i}\phi^0\sin(2\beta)\Big] + \phi^+\Big[v_1\cos\beta\\
&\quad - v_2\sin\beta + H^0\cos(\alpha+\beta) - h^0\sin(\alpha+\beta) + \mathrm{i}A^0\sin(2\beta)\\
&\quad + \mathrm{i}\phi^0\cos(2\beta)\Big]\Big) + \text{h.c.}\Bigg] \qquad (7.147)
\end{aligned}
$$

Die Terme aus dem Superpotential sind:

$$
\begin{aligned}
&\sum_k \frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}\Big(\mu\,\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{R,k}H^0_2 + \mu^*\,\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{R,k}H^{0\,*}_2\Big)\\
&+\sum_{k,l} \frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}\Big(\mu\,V^{CKM}_{lk}\tilde{u}^*_{L,l}\tilde{d}_{R,k}H^+_2 + \mu^*\,V^{CKM\,*}_{lk}\tilde{u}_{L,l}\tilde{d}^*_{R,k}(H^+_2)^*\Big)\\
&+\sum_k \frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\Big(\mu\,\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{R,k}H^0_1 + \mu^*\,\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{R,k}(H^0_1)^*\Big)\\
&+\sum_{k,l} \frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\Big(\mu\,V^{CKM\,*}_{kl}\tilde{d}^*_{L,l}\tilde{u}_{R,k}H^-_1 + \mu^*\,V^{CKM}_{kl}\tilde{d}_{L,l}\tilde{u}^*_{R,k}(H^-_1)^*\Big)\\
&-\sum_k \frac{2m^2_{d_k}}{v_1^2}|\tilde{d}_{R,k}|^2|H^-_1|^2 - \sum_k \frac{2m^2_{u_k}}{v_2^2}|\tilde{u}_{R,k}|^2|H^0_2|^2\\
&+\sum_{k,l} \frac{2m_{d_l}m_{u_k}}{v_1v_2}\Big(V^{CKM}_{kl}\tilde{d}_{R,l}\tilde{u}^*_{R,k}H^0_2(H^-_1)^* + V^{CKM\,*}_{kl}\tilde{d}^*_{R,l}\tilde{u}_{R,k}(H^0_2)^*H^-_1\Big)\\
&-\sum_k \frac{2m^2_{u_k}}{v_2^2}|\tilde{d}_{L,k}|^2|H^+_2|^2 - \sum_k \frac{2m^2_{u_k}}{v_2^2}|\tilde{u}_{L,k}|^2|H^0_2|^2\\
&+\sum_{k,l} \frac{2m^2_{u_k}}{v_2^2}\Big(V^{CKM}_{kl}\tilde{d}_{L,l}\tilde{u}^*_{L,k}H^+_2(H^0_2)^* + V^{CKM\,*}_{kl}\tilde{d}^*_{L,l}\tilde{u}_{L,k}(H^+_2)^*H^0_2\Big)\\
&-\sum_k \frac{2m^2_{d_k}}{v_1^2}|\tilde{d}_{R,k}|^2|H^0_1|^2 - \sum_k \frac{2m^2_{u_k}}{v_2^2}|\tilde{u}_{R,k}|^2|H^+_2|^2\\
&+\sum_{k,l} \frac{2m_{d_k}m_{u_l}}{v_1v_2}\Big(V^{CKM}_{lk}\tilde{d}_{R,k}\tilde{u}^*_{R,l}H^+_2(H^0_1)^* + V^{CKM\,*}_{lk}\tilde{d}^*_{R,k}\tilde{u}_{R,l}(H^+_2)^*H^0_1\Big)\\
&-\sum_k \frac{2m^2_{d_k}}{v_1^2}|\tilde{u}_{L,k}|^2|H^-_1|^2 - \sum_k \frac{2m^2_{d_k}}{v_1^2}|\tilde{d}_{L,k}|^2|H^0_1|^2
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{k,l}\frac{2m_{d_k}^2}{v_1^2}\left(V_{lk}^{CKM}\tilde{d}_{L,k}\tilde{u}_{L,l}^*H_1^0(H_1^-)^*+V_{lk}^{CKM\,*}\tilde{d}_{L,k}^*\tilde{u}_{L,l}(H_1^0)^*H_1^-\right) \tag{7.148}$$

Schließlich kommen noch die weichen, Supersymmetrie brechenden Terme hinzu:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{a,l=1}^{3}A_a^D\frac{\sqrt{2}m_{d_a}}{v_1}\left(\tilde{u}_{L,a}V_{al}^{CKM\,*}\tilde{d}_{R,l}^*\right)H_1^-+\sum_{a=1}^{3}A_a^D\frac{\sqrt{2}m_{d_a}}{v_1}\left(\tilde{d}_{L,a}\tilde{d}_{R,a}^*\right)H_1^0\\
&+\sum_{a=1}^{3}A_a^U\frac{\sqrt{2}m_{u_a}}{v_2}\left(\tilde{u}_{L,a}\tilde{u}_{R,a}^*\right)H_2^0-\sum_{a,l=1}^{3}A_a^U\frac{\sqrt{2}m_{u_a}}{v_2}\left(\tilde{d}_{L,l}V_{la}^{CKM}\tilde{u}_{R,a}^*\right)H_2^+\\
&+\sum_{a,l=1}^{3}C_a^D\frac{\sqrt{2}m_{d_a}}{v_1}\left(\tilde{u}_{L,a}V_{al}^{CKM\,*}\tilde{d}_{R,l}^*\right)(H_2^+)^*+\sum_{a=1}^{3}C_a^D\frac{\sqrt{2}m_{d_a}}{v_1}\left(\tilde{d}_{L,a}\tilde{d}_{R,a}^*\right)(H_2^0)^*\\
&-\sum_{a=1}^{3}C_a^U\frac{\sqrt{2}m_{u_a}}{v_2}\left(\tilde{u}_{L,a}\tilde{u}_{R,a}^*\right)(H_1^0)^*-\sum_{a,l=1}^{3}C_a^U\frac{\sqrt{2}m_{u_a}}{v_2}\left(\tilde{d}_{L,l}V_{la}^{CKM}\tilde{u}_{R,a}^*\right)(H_1^-)^*\\
&\quad+\text{h.c.}
\end{aligned} \tag{7.149}$$

An dieser Stelle erinnere man sich daran, daß die Matrizen A^D, A^U, C^D, C^U in einer gewissen Spezialisierung als diagonal angenommen wurden! Dabei ist zu beachten, daß neben den expliziten Faktoren i (durch das A-Higgsboson) auch die Größen μ, A_k^D, A_k^U, C_k^D und C_k^U komplex sind. Es ergibt sich nach mühevoller Arbeit:

3-Kopplungen an die Higgs-Felder:

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}_{L,k}^*H^0: \quad -\left(\frac{gm_{u_k}^2\sin\alpha}{m_W\sin\beta}+g_Zm_Z\cos(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)\right) \tag{7.150}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}_{R,k}^*H^0: \quad -\left(\frac{gm_{u_k}^2\sin\alpha}{m_W\sin\beta}+\frac{2}{3}g_Zm_Z\cos(\alpha+\beta)\sin^2\theta_W\right) \tag{7.151}$$

$$\tilde{u}_{L,k}^*\tilde{u}_{R,k}H^0: \quad \frac{gm_{u_k}}{2m_W\sin\beta}\left((\mu-C_k^{U\,*})\cos\alpha+A_k^{U\,*}\sin\alpha\right) \tag{7.152}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}_{R,k}^*H^0: \quad \frac{gm_{u_k}}{2m_W\sin\beta}\left((\mu^*-C_k^U)\cos\alpha+A_k^U\sin\alpha\right) \tag{7.153}$$

$$\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}_{L,k}^*H^0: \quad -\frac{gm_{d_k}^2\cos\alpha}{m_W\cos\beta}-g_Zm_Z\cos(\alpha+\beta)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right) \tag{7.154}$$

$$\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,k}H^0: \quad -\frac{gm^2_{d_k}\cos\alpha}{m_W\cos\beta}+\frac{1}{3}g_Zm_Z\cos(\alpha+\beta)\sin^2\theta_W \tag{7.155}$$

$$\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{R,k}H^0: \quad \frac{gm_{d_k}}{2m_W\cos\beta}\big((\mu+C^{D\,*}_k)\sin\alpha+A^{D\,*}_k\cos\alpha\big) \tag{7.156}$$

$$\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{R,k}H^0: \quad \frac{gm_{d_k}}{2m_W\cos\beta}\big((\mu^*+C^{D}_k)\sin\alpha+A^{D}_k\cos\alpha\big) \tag{7.157}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{L,k}h^0: \quad -\left(\frac{gm^2_{u_k}\cos\alpha}{m_W\sin\beta}-g_Zm_Z\sin(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)\right) \tag{7.158}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}^*_{R,k}h^0: \quad -\left(\frac{gm^2_{u_k}\cos\alpha}{m_W\sin\beta}-\frac{2}{3}g_Zm_Z\sin(\alpha+\beta)\sin^2\theta_W\right) \tag{7.159}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{R,k}h^0: \quad \frac{gm_{u_k}}{2m_W\sin\beta}\big((C^{U\,*}_k-\mu)\sin\alpha+A^{U\,*}_k\cos\alpha\big) \tag{7.160}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{R,k}h^0: \quad \frac{gm_{u_k}}{2m_W\sin\beta}\big((C^{U}_k-\mu^*)\sin\alpha+A^{U}_k\cos\alpha\big) \tag{7.161}$$

$$\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,k}h^0: \quad \frac{gm^2_{d_k}\sin\alpha}{m_W\cos\beta}+g_Zm_Z\sin(\alpha+\beta)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right) \tag{7.162}$$

$$\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,k}h^0: \quad \frac{gm^2_{d_k}\sin\alpha}{m_W\cos\beta}-\frac{1}{3}g_Zm_Z\sin(\alpha+\beta)\sin^2\theta_W \tag{7.163}$$

$$\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{R,k}h^0: \quad \frac{gm_{d_k}}{2m_W\cos\beta}\big((\mu+C^{D\,*}_k)\cos\alpha-A^{D\,*}_k\sin\alpha\big) \tag{7.164}$$

$$\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{R,k}h^0: \quad \frac{gm_{d_k}}{2m_W\cos\beta}\big((\mu^*+C^{D}_k)\cos\alpha-A^{D}_k\sin\alpha\big) \tag{7.165}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{R,k}A^0: \quad -\mathrm{i}\,\frac{gm_{u_k}}{2m_W}\big(A^{U\,*}_k\cot\beta-(\mu-C^{U\,*}_k)\big) \tag{7.166}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{R,k}A^0: \quad \mathrm{i}\,\frac{gm_{u_k}}{2m_W}\big(A^{U}_k\cot\beta-(\mu^*-C^{U}_k)\big) \tag{7.167}$$

$$\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{R,k}A^0: \quad -\mathrm{i}\,\frac{gm_{d_k}}{2m_W}\big(A^{D\,*}_k\tan\beta-(\mu+C^{D\,*}_k)\big) \tag{7.168}$$

$$\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{R,k}A^0: \quad \mathrm{i}\,\frac{gm_{d_k}}{2m_W}\big(A^{D}_k\tan\beta-(\mu^*+C^{D}_k)\big) \tag{7.169}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,l}H^+: \quad -\frac{g}{\sqrt{2}m_W}V^{CKM}_{kl}\big(m^2_W\sin(2\beta)-m^2_{d_l}\tan\beta-m^2_{u_k}\cot\beta\big) \tag{7.170}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,l}H^-: \quad -\frac{g}{\sqrt{2}m_W}V^{CKM\,*}_{kl}\big(m^2_W\sin(2\beta)-m^2_{d_l}\tan\beta-m^2_{u_k}\cot\beta\big) \tag{7.171}$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{d}_{R,l}H^+: \quad \frac{\sqrt{2}gm_{u_k}m_{d_l}}{m_W\sin(2\beta)}V^{CKM}_{kl} \tag{7.172}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,l}H^- : \quad \frac{\sqrt{2}gm_{u_k}m_{d_l}}{m_W\sin(2\beta)}V^{CKM*}_{kl} \tag{7.173}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{d}_{R,l}H^+ : \quad \frac{gm_{d_l}}{\sqrt{2}m_W}V^{CKM}_{kl}\left((\mu + C^{D*}_l) - A^{D*}_l\tan\beta\right) \tag{7.174}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{R,l}H^- : \quad \frac{gm_{d_l}}{\sqrt{2}m_W}V^{CKM*}_{kl}\left((\mu^* + C^D_l) - A^D_l\tan\beta\right) \tag{7.175}$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{d}_{L,l}H^+ : \quad \frac{gm_{u_k}}{\sqrt{2}m_W}V^{CKM}_{kl}\left((\mu^* - C^U_k) - A^U_k\cot\beta\right) \tag{7.176}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{d}^*_{L,l}H^- : \quad \frac{gm_{u_k}}{\sqrt{2}m_W}V^{CKM*}_{kl}\left((\mu - C^{U*}_k) - A^{U*}_k\cot\beta\right) \tag{7.177}$$

4-Kopplungen an die Higgs-Felder:

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{L,k}H^0H^0 : \quad -\frac{g^2m^2_{u_k}\sin^2\alpha}{4m^2_W\sin^2\beta} - \frac{1}{4}g^2_Z\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)\cos(2\alpha) \tag{7.178}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}^*_{R,k}H^0H^0 : \quad -\frac{g^2m^2_{u_k}\sin^2\alpha}{4m^2_W\sin^2\beta} - \frac{1}{6}g^2_Z\sin^2\theta_W\cos(2\alpha) \tag{7.179}$$

$$\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,k}H^0H^0 : \quad -\frac{g^2m^2_{d_k}\cos^2\alpha}{4m^2_W\cos^2\beta} + \frac{1}{4}g^2_Z\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)\cos(2\alpha) \tag{7.180}$$

$$\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,k}H^0H^0 : \quad -\frac{g^2m^2_{d_k}\cos^2\alpha}{4m^2_W\cos^2\beta} + \frac{1}{12}g^2_Z\sin^2\theta_W\cos(2\alpha) \tag{7.181}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{L,k}h^0h^0 : \quad -\frac{g^2m^2_{u_k}\cos^2\alpha}{4m^2_W\sin^2\beta} + \frac{1}{4}g^2_Z\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)\cos(2\alpha) \tag{7.182}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}^*_{R,k}h^0h^0 : \quad -\frac{g^2m^2_{u_k}\cos^2\alpha}{4m^2_W\sin^2\beta} + \frac{1}{6}g^2_Z\sin^2\theta_W\cos(2\alpha) \tag{7.183}$$

$$\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,k}h^0h^0 : \quad -\frac{g^2m^2_{d_k}\sin^2\alpha}{4m^2_W\cos^2\beta} - \frac{1}{4}g^2_Z\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)\cos(2\alpha) \tag{7.184}$$

$$\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,k}h^0h^0 : \quad -\frac{g^2m^2_{d_k}\sin^2\alpha}{4m^2_W\cos^2\beta} - \frac{1}{12}g^2_Z\sin^2\theta_W\cos(2\alpha) \tag{7.185}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{L,k}H^0h^0 : \quad -\frac{g^2m^2_{u_k}\sin(2\alpha)}{4m^2_W\sin^2\beta} + \frac{1}{2}g^2_Z\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)\sin(2\alpha) \tag{7.186}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}^*_{R,k}H^0h^0: \quad -\frac{g^2 m^2_{u_k}\sin(2\alpha)}{4m_W^2\sin^2\beta}+\frac{1}{3}g_Z^2\sin^2\theta_W\sin(2\alpha) \tag{7.187}$$

$$\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,k}H^0h^0: \quad \frac{g^2 m^2_{d_k}\sin(2\alpha)}{4m_W^2\cos^2\beta}-\frac{1}{2}g_Z^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)\sin(2\alpha) \tag{7.188}$$

$$\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,k}H^0h^0: \quad \frac{g^2 m^2_{d_k}\sin(2\alpha)}{4m_W^2\cos^2\beta}-\frac{1}{6}g_Z^2\sin^2\theta_W\sin(2\alpha) \tag{7.189}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{L,k}A^0A^0: \quad -\frac{g^2 m^2_{u_k}}{4m_W^2}\cot^2\beta+\frac{1}{4}g_Z^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)\cos(2\beta) \tag{7.190}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}^*_{R,k}A^0A^0: \quad -\frac{g^2 m^2_{u_k}}{4m_W^2}\cot^2\beta+\frac{1}{6}g_Z^2\sin^2\theta_W\cos(2\beta) \tag{7.191}$$

$$\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,k}A^0A^0: \quad -\frac{g^2 m^2_{d_k}}{4m_W^2}\tan^2\beta-\frac{1}{4}g_Z^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)\cos(2\beta) \tag{7.192}$$

$$\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,k}A^0A^0: \quad -\frac{g^2 m^2_{d_k}}{4m_W^2}\tan^2\beta-\frac{1}{12}g_Z^2\sin^2\theta_W\cos(2\beta) \tag{7.193}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{L,k}H^+H^-: \quad -\frac{g^2 m^2_{d_k}}{2m_W^2}\tan^2\beta-\frac{1}{2}g_Z^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)\cos(2\beta) \tag{7.194}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}^*_{R,k}H^+H^-: \quad -\frac{g^2 m^2_{u_k}}{2m_W^2}\cot^2\beta+\frac{1}{3}g_Z^2\sin^2\theta_W\cos(2\beta) \tag{7.195}$$

$$\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,k}H^+H^-: \quad -\frac{g^2 m^2_{u_k}}{2m_W^2}\cot^2\beta+\frac{1}{2}g_Z^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)\cos(2\beta) \tag{7.196}$$

$$\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,k}H^+H^-: \quad -\frac{g^2 m^2_{d_k}}{2m_W^2}\tan^2\beta-\frac{1}{6}g_Z^2\sin^2\theta_W\cos(2\beta) \tag{7.197}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,l}H^+H^0: \quad & \frac{g^2}{2\sqrt{2}m_W^2}V^{CKM}_{kl}\left(m^2_{d_l}\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta}+m^2_{u_k}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta}\right.\\ & \left.-m_W^2\sin(\alpha+\beta)\right)\end{aligned} \tag{7.198}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,l}H^-H^0: \quad & \frac{g^2}{2\sqrt{2}m_W^2}V^{CKM\,*}_{kl}\left(m^2_{d_l}\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta}+m^2_{u_k}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta}\right.\\ & \left.-m_W^2\sin(\alpha+\beta)\right)\end{aligned} \tag{7.199}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,l}H^+h^0: \quad -\frac{g^2}{2\sqrt{2}m_W^2}V^{CKM}_{kl}\Bigg(m^2_{d_l}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta}-m^2_{u_k}\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta} + m_W^2\cos(\alpha+\beta)\Bigg) \tag{7.200}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,l}H^-h^0: \quad -\frac{g^2}{2\sqrt{2}m_W^2}V^{CKM*}_{kl}\Bigg(m^2_{d_l}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta}-m^2_{u_k}\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta} + m_W^2\cos(\alpha+\beta)\Bigg) \tag{7.201}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,l}H^+A^0: \quad \mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m_W^2}V^{CKM}_{kl}\Bigg(m^2_{d_l}\tan^2\beta-m^2_{u_k}\cot^2\beta + m_W^2\cos(2\beta)\Bigg) \tag{7.202}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,l}H^-A^0: \quad -\mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m_W^2}V^{CKM*}_{kl}\Bigg(m^2_{d_l}\tan^2\beta-m^2_{u_k}\cot^2\beta + m_W^2\cos(2\beta)\Bigg) \tag{7.203}$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{d}_{R,l}H^+H^0: \quad g^2\frac{m_{u_k}m_{d_l}\cos(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}m_W^2\sin(2\beta)}V^{CKM}_{kl} \tag{7.204}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,l}H^-H^0: \quad g^2\frac{m_{u_k}m_{d_l}\cos(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}m_W^2\sin(2\beta)}V^{CKM*}_{kl} \tag{7.205}$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{d}_{R,l}H^+h^0: \quad -g^2\frac{m_{u_k}m_{d_l}\sin(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}m_W^2\sin(2\beta)}V^{CKM}_{kl} \tag{7.206}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,l}H^-h^0: \quad -g^2\frac{m_{u_k}m_{d_l}\sin(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}m_W^2\sin(2\beta)}V^{CKM*}_{kl} \tag{7.207}$$

3-Kopplungen an die Goldstone-Bosonen:

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{R,k}\phi^0: \quad \mathrm{i}\frac{gm_{u_k}}{2m_W}\left((\mu-C^{U*}_k)\cot\beta+A^{U*}_k\right) \tag{7.208}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{R,k}\phi^0: \quad -\mathrm{i}\frac{gm_{u_k}}{2m_W}\left((\mu^*-C^{U}_k)\cot\beta+A^{U}_k\right) \tag{7.209}$$

$$\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{R,k}\phi^0: \quad -\mathrm{i}\frac{gm_{d_k}}{2m_W}\left((\mu+C^{D*}_k)\tan\beta+A^{D*}_k\right) \tag{7.210}$$

$$\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{R,k}\phi^0: \quad \mathrm{i}\frac{gm_{d_k}}{2m_W}\left((\mu^*+C^{D}_k)\tan\beta+A^{D}_k\right) \tag{7.211}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,l}\phi^+: \quad -\frac{g}{\sqrt{2}m_W}V^{CKM}_{kl}\left(m_W^2\cos(2\beta)+m^2_{u_k}-m^2_{d_l}\right) \tag{7.212}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,l}\phi^- : \quad -\frac{g}{\sqrt{2}m_W}V^{CKM\,*}_{kl}\left(m_W^2\cos(2\beta)+m_{u_k}^2-m_{d_l}^2\right) \tag{7.213}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{d}_{R,l}\phi^+ : \quad -\frac{gm_{d_l}}{\sqrt{2}m_W}V^{CKM}_{kl}\left(A_l^{D\,*}+(\mu+C_l^{D\,*})\sin\beta\right) \tag{7.214}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{R,l}\phi^- : \quad -\frac{gm_{d_l}}{\sqrt{2}m_W}V^{CKM\,*}_{kl}\left(A_l^{D}+(\mu^*+C_l^{D})\sin\beta\right) \tag{7.215}$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{d}_{L,l}\phi^+ : \quad \frac{gm_{u_k}}{\sqrt{2}m_W}V^{CKM}_{kl}\left(A_k^{U}+(\mu^*-C_k^{U})\cot\beta\right) \tag{7.216}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{d}^*_{L,l}\phi^- : \quad \frac{gm_{u_k}}{\sqrt{2}m_W}V^{CKM\,*}_{kl}\left(A_k^{U\,*}+(\mu-C_k^{U\,*})\cot\beta\right) \tag{7.217}$$

4-Kopplungen an die Goldstone-Bosonen:

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{L,k}A^0\phi^0 : \quad \frac{g^2m_{u_k}^2}{2m_W^2}\cot\beta-\frac{1}{2}g_Z^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)\sin(2\beta) \tag{7.218}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}^*_{R,k}A^0\phi^0 : \quad \frac{g^2m_{u_k}^2}{2m_W^2}\cot\beta-\frac{1}{3}g_Z^2\sin^2\theta_W\sin(2\beta) \tag{7.219}$$

$$\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,k}A^0\phi^0 : \quad -\frac{g^2m_{d_k}^2}{2m_W^2}\tan\beta+\frac{1}{2}g_Z^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)\sin(2\beta) \tag{7.220}$$

$$\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,k}A^0\phi^0 : \quad -\frac{g^2m_{d_k}^2}{2m_W^2}\tan\beta+\frac{1}{6}g_Z^2\sin^2\theta_W\sin(2\beta) \tag{7.221}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{L,k}H^\pm\phi^\mp : \quad -\frac{g^2m_{d_k}^2}{2m_W^2}\tan\beta+\frac{1}{2}g_Z^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)\sin(2\beta) \tag{7.222}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}^*_{R,k}H^\pm\phi^\mp : \quad \frac{g^2m_{u_k}^2}{2m_W^2}\cot\beta-\frac{1}{3}g_Z^2\sin^2\theta_W\sin(2\beta) \tag{7.223}$$

$$\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,k}H^\pm\phi^\mp : \quad \frac{g^2m_{u_k}^2}{2m_W^2}\cot\beta-\frac{1}{2}g_Z^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)\sin(2\beta) \tag{7.224}$$

$$\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,k}H^\pm\phi^\mp : \quad -\frac{g^2m_{d_k}^2}{2m_W^2}\tan\beta+\frac{1}{6}g_Z^2\sin^2\theta_W\sin(2\beta) \tag{7.225}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{L,k}\phi^+\phi^- : \quad -\frac{g^2m_{d_k}^2}{2m_W^2}+\frac{1}{2}g_Z^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)\cos(2\beta) \tag{7.226}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}^*_{R,k}\phi^+\phi^- : \quad -\frac{g^2m_{u_k}^2}{2m_W^2}-\frac{1}{3}g_Z^2\sin^2\theta_W\cos(2\beta) \tag{7.227}$$

$$\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,k}\phi^+\phi^- : \quad -\frac{g^2m_{u_k}^2}{2m_W^2}-\frac{1}{2}g_Z^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)\cos(2\beta) \tag{7.228}$$

$$\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,k}\phi^+\phi^- : \quad -\frac{g^2m^2_{d_k}}{2m^2_W} + \frac{1}{6}g^2_Z\sin^2\theta_W\cos(2\beta) \tag{7.229}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{L,k}\phi^0\phi^0 : \quad -\frac{g^2m^2_{u_k}}{4m^2_W} - \frac{1}{4}g^2_Z\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)\cos(2\beta) \tag{7.230}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}^*_{R,k}\phi^0\phi^0 : \quad -\frac{g^2m^2_{u_k}}{4m^2_W} - \frac{1}{6}g^2_Z\sin^2\theta_W\cos(2\beta) \tag{7.231}$$

$$\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,k}\phi^0\phi^0 : \quad -\frac{g^2m^2_{d_k}}{4m^2_W} + \frac{1}{4}g^2_Z\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)\cos(2\beta) \tag{7.232}$$

$$\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,k}\phi^0\phi^0 : \quad -\frac{g^2m^2_{d_k}}{4m^2_W} + \frac{1}{12}g^2_Z\sin^2\theta_W\cos(2\beta) \tag{7.233}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,l}H^+\phi^0 : \quad -\mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}V^{CKM}_{kl}\left(m^2_W\sin(2\beta) - m^2_{d_l}\tan\beta - m^2_{u_k}\cot\beta\right) \tag{7.234}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,l}H^-\phi^0 : \quad \mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}V^{CKM*}_{kl}\left(m^2_W\sin(2\beta) - m^2_{d_l}\tan\beta - m^2_{u_k}\cot\beta\right) \tag{7.235}$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{d}_{R,l}H^+\phi^0 : \quad -\mathrm{i}\frac{g^2m_{u_k}m_{d_l}}{\sqrt{2}m^2_W\sin(2\beta)}V^{CKM}_{kl} \tag{7.236}$$

$$\tilde{u}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,l}H^-\phi^0 : \quad \mathrm{i}\frac{g^2m_{u_k}m_{d_l}}{\sqrt{2}m^2_W\sin(2\beta)}V^{CKM*}_{kl} \tag{7.237}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,l}H^0\phi^+ : \quad & \frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}V^{CKM}_{kl}\Bigg(m^2_{d_l}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} - m^2_{u_k}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ & - m^2_W\cos(\alpha+\beta)\Bigg)\end{aligned} \tag{7.238}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,l}H^0\phi^- : \quad & \frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}V^{CKM*}_{kl}\Bigg(m^2_{d_l}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} - m^2_{u_k}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ & - m^2_W\cos(\alpha+\beta)\Bigg)\end{aligned} \tag{7.239}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,l}h^0\phi^+ : \quad & -\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}V^{CKM}_{kl}\Bigg(m^2_{d_l}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} + m^2_{u_k}\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \\ & - m^2_W\sin(\alpha+\beta)\Bigg)\end{aligned} \tag{7.240}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,l}h^0\phi^- : \quad -\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}V^{CKM*}_{kl}\Bigg(m^2_{d_l}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} + m^2_{u_k}\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$- m_W^2 \sin(\alpha + \beta)\Big) \qquad (7.241)$$

$$\tilde{u}_{L,k}^* \tilde{d}_{L,l} A^0 \phi^+ : \quad \mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m_W^2} V_{kl}^{CKM} \Big(m_{d_l}^2 \tan\beta + m_{u_k}^2 \cot\beta - m_W^2 \sin(2\beta)\Big) \qquad (7.242)$$

$$\tilde{u}_{L,k} \tilde{d}_{L,l}^* A^0 \phi^- : \quad -\mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m_W^2} V_{kl}^{CKM*} \Big(m_{d_l}^2 \tan\beta + m_{u_k}^2 \cot\beta - m_W^2 \sin(2\beta)\Big) \qquad (7.243)$$

$$\tilde{u}_{R,k}^* \tilde{d}_{R,l} H^0 \phi^+ : \quad g^2 \frac{m_{u_k} m_{d_l} \sin(\alpha - \beta)}{\sqrt{2} m_W^2 \sin(2\beta)} V_{kl}^{CKM} \qquad (7.244)$$

$$\tilde{u}_{R,k} \tilde{d}_{R,l}^* H^0 \phi^- : \quad g^2 \frac{m_{u_k} m_{d_l} \sin(\alpha - \beta)}{\sqrt{2} m_W^2 \sin(2\beta)} V_{kl}^{CKM*} \qquad (7.245)$$

$$\tilde{u}_{R,k}^* \tilde{d}_{R,l} h^0 \phi^+ : \quad g^2 \frac{m_{u_k} m_{d_l} \cos(\alpha - \beta)}{\sqrt{2} m_W^2 \sin(2\beta)} V_{kl}^{CKM} \qquad (7.246)$$

$$\tilde{u}_{R,k}^* \tilde{d}_{R,l} h^0 \phi^- : \quad g^2 \frac{m_{u_k} m_{d_l} \cos(\alpha - \beta)}{\sqrt{2} m_W^2 \sin(2\beta)} V_{kl}^{CKM*} \qquad (7.247)$$

$$\tilde{u}_{R,k}^* \tilde{d}_{R,l} A^0 \phi^+ : \quad \mathrm{i}\frac{g^2 m_{u_k} m_{d_l}}{\sqrt{2} m_W^2 \sin(2\beta)} V_{kl}^{CKM} \qquad (7.248)$$

$$\tilde{u}_{R,k} \tilde{d}_{R,l}^* A^0 \phi^- : \quad -\mathrm{i}\frac{g^2 m_{u_k} m_{d_l}}{\sqrt{2} m_W^2 \sin(2\beta)} V_{kl}^{CKM*} \qquad (7.249)$$

$$\tilde{u}_{L,k}^* \tilde{d}_{L,l} \phi^+ \phi^0 : \quad \mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m_W^2} V_{kl}^{CKM} \left(m_{d_l}^2 - m_{u_k}^2 - m_W^2 \cos(2\beta)\right) \qquad (7.250)$$

$$\tilde{u}_{L,k} \tilde{d}_{L,l}^* \phi^- \phi^0 : \quad -\mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m_W^2} V_{kl}^{CKM*} \left(m_{d_l}^2 - m_{u_k}^2 - m_W^2 \cos(2\beta)\right) \qquad (7.251)$$

7.4.2 Higgs-Kopplungen der Sleptonen und Sneutrinos

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt über die Squark-Kopplungen an die Higgs-Bosonen erhalten wir Terme aus dem Superpotential, aus dem superrenormierbaren Anteil sowie aus den D-Termen. Aus dem Anteil der Kopplung mittels der Hyperladung stammt, wiederum für jede Generation einzeln:

$$-\frac{g'^2}{4}\Big(|\tilde{\ell}_L|^2 + |\tilde{\nu}_\ell|^2 - 2|\tilde{\ell}_R|^2 \Big)\Big(|H_1^0|^2 + |H_1^-|^2 - |H_2^+|^2 + |H_2^0|^2 \Big)$$

$$
\begin{aligned}
= & -\frac{g'^2}{4}\left(|\tilde{\ell}_L|^2+|\tilde{\nu}_\ell|^2-2|\tilde{\ell}_R|^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}(v_1^2-v_2^2)\right.\\
& \quad +(v_1\cos\alpha-v_2\sin\alpha)H^0-(v_1\sin\alpha+v_2\cos\alpha)h^0\\
& \quad +\frac{1}{2}(H^0)^2\cos(2\alpha)-\frac{1}{2}(h^0)^2\cos(2\alpha)-H^0h^0\sin(2\alpha)\\
& \quad -\frac{1}{2}(A^0)^2\cos(2\beta)+\frac{1}{2}(\phi^0)^2\cos(2\beta)+A^0\phi^0\sin(2\beta)\\
& \quad \left.-H^+H^-\cos(2\beta)+\phi^+\phi^-\cos(2\beta)+H^\pm\phi^\mp\sin(2\beta)\right)
\end{aligned}
\tag{7.252}
$$

Für die Terme der $SU(2)_L$-Eichgruppe findet man analog zum Fall der Squarks:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{g^2}{4}\left(2\sum_{b=1}^{3}|L_b^\dagger H_1|^2-\sum_{b=1}^{3}(L_b^\dagger L_b)(H_1^\dagger H_1)+2\sum_{b=1^3}|L_b^\dagger H_2|^2\right.\\
& \qquad \left.-\sum_{b=1}^{3}(L_b^\dagger L_b)(H_2^\dagger H_2)\right)\\
= & \frac{g^2}{4}\sum_{b=1}^{3}\left(|\tilde{\nu}_b|^2+|\tilde{\ell}_{L,b}|^2\right)\cdot\left[\frac{1}{2}(v_1^2+v_2^2)+\frac{1}{2}(H^0)^2+\frac{1}{2}(h^0)^2\right.\\
& \qquad +(v_1\cos\alpha+v_2\sin\alpha)H^0-(v_1\sin\alpha-v_2\cos\alpha)h^0+\frac{1}{2}(A^0)^2\\
& \qquad \left.+\frac{1}{2}(\phi^0)^2+H^+H^-+\phi^+\phi^-\right]\\
& -\frac{g^2}{4}\sum_{b=1}^{3}|\tilde{\nu}_b|^2\left(v_1^2+(H^0)^2\cos^2\alpha+(h^0)^2\sin^2\alpha+2v_1\cos\alpha H^0\right.\\
& \qquad -2v_1\sin\alpha h^0-H^0h^0\sin(2\alpha)+(A^0)^2\sin^2\beta+(\phi^0)^2\cos^2\beta\\
& \qquad \left.+A^0\phi^0\sin(2\beta)+2H^+H^-\cos^2\beta+2\phi^+\phi^-\sin^2\beta-H^\pm\phi^\mp\sin(2\beta)\right)\\
& -\frac{g^2}{4}\sum_{b=1}^{3}|\tilde{\ell}_{L,b}|^2\left(v_2^2+(H^0)^2\sin^2\alpha+(h^0)^2\cos^2\alpha+2v_2\sin\alpha H^0\right.\\
& \qquad +2v_2\cos\alpha h^0+H^0h^0\sin(2\alpha)+(A^0)^2\cos^2\beta+(\phi^0)^2\sin^2\beta\\
& \qquad \left.-A^0\phi^0\sin(2\beta)+2H^+H^-\sin^2\beta+2\phi^+\phi^-\cos^2\beta+H^\pm\phi^\mp\sin(2\beta)\right)\\
& -\frac{g^2}{2\sqrt{2}}\left[\sum_{b=1}^{3}\left(\tilde{\nu}_b^*\tilde{\ell}_{L,b}\right)\left(H^+\left[v_1\sin\beta+v_2\cos\beta+H^0\sin(\alpha+\beta)\right.\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ h^0\cos(\alpha+\beta) - \mathrm{i}A^0\cos(2\beta) + \mathrm{i}\phi^0\sin(2\beta)\Big] + \phi^+\Big[v_1\cos\beta \\
&- v_2\sin\beta + H^0\cos(\alpha+\beta) - h^0\sin(\alpha+\beta) + \mathrm{i}A^0\sin(2\beta) \\
&+ \mathrm{i}\phi^0\cos(2\beta)\Big]\Big) + \text{h.c.}\Bigg]
\end{aligned} \tag{7.253}
$$

Der Term aus dem Superpotential hat diese Gestalt:

$$
\begin{aligned}
&\sum_k \frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}\left(\mu\,\tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\ell}^-_{R,k}H^0_2 + \mu^*\,\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}H^{0\,*}_2\right) \\
&+ \sum_k \frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}\left(\mu\,\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{R,k}H^+_2 + \mu^*\,\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{R,k}(H^+_2)^*\right) \\
&- \sum_k \frac{2m^2_{\ell_k}}{v_1^2}|\tilde{\ell}_{R,k}|^2\left(|H^-_1|^2 + |H^0_1|^2\right) - \sum_k \frac{2m^2_{\ell_k}}{v_1^2}|\tilde{\nu}_k|^2|H^-_1|^2 \\
&- \sum_k \frac{2m^2_{\ell_k}}{v_1^2}|\tilde{\ell}_{L,k}|^2|H^0_1|^2 + \sum_k \frac{2m^2_{\ell_k}}{v_1^2}\left(\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{L,k}H^-_1(H^0_1)^* + \tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{L,k}(H^-_1)^*H^0_1\right)
\end{aligned} \tag{7.254}
$$

Bleiben wieder nur die superrenormierbaren Beiträge:

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{a=1}^3 A^E_a\frac{\sqrt{2}m_{\ell_a}}{v_1}\left(\tilde{\nu}_a\tilde{\ell}^+_{R,a}\right)H^-_1 + \sum_{a=1}^3 A^E_a\frac{\sqrt{2}m_{\ell_a}}{v_1}\left(\tilde{\ell}^-_{L,a}\tilde{\ell}^+_{R,a}\right)H^0_1 \\
&+ \sum_{a=1}^3 C^E_a\frac{\sqrt{2}m_{\ell_a}}{v_1}\left(\tilde{\nu}_a\tilde{\ell}^+_{R,a}\right)(H^+_2)^* + \sum_{a=1}^3 C^E_a\frac{\sqrt{2}m_{\ell_a}}{v_1}\left(\tilde{\ell}^-_{L,a}\tilde{\ell}^+_{R,a}\right)(H^0_2)^* + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{7.255}
$$

Auch hier gilt wieder, daß die Matrizen A^E, C^E diagonal gewählt wurden, um ein Übermaß an Rechenaufwand zu vermeiden, eine Spezialisierung! Es bleibt wieder nur, die Vertex-Terme Stück für Stück abzuarbeiten (in der nun folgenden Aufzählung stehen die Terme aus der Lagrangedichte, (noch) *nicht* die Vertizes; nur der Übersichtlichkeit halber sind die Felder auf der rechten Seite weggelassen):

3-Kopplungen an die Higgs-Felder:

$$
\nu_k\nu^*_kH^0: \qquad -\frac{g_Z}{2}m_Z\cos(\alpha+\beta) \tag{7.256}
$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k}H^0 : \quad -\left(\frac{gm^2_{\ell_k}\cos\alpha}{m_W\cos\beta} + g_Z m_Z\cos(\alpha+\beta)\Big(-\frac{1}{2}+\sin^2\theta_W\Big)\right)$$

$$\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}H^0 : \quad -\left(\frac{gm^2_{\ell_k}\cos\alpha}{m_W\cos\beta} - g_Z m_Z\cos(\alpha+\beta)\sin^2\theta_W\right) \tag{7.257}$$

$$\tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\ell}^-_{R,k}H^0 : \quad \frac{gm_{\ell_k}}{2m_W\cos\beta}\big((\mu+C^{E\,*}_k)\sin\alpha + A^{E\,*}_k\cos\alpha\big) \tag{7.258}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}H^0 : \quad \frac{gm_{\ell_k}}{2m_W\cos\beta}\big((\mu^*+C^{E}_k)\sin\alpha + A^{E}_k\cos\alpha\big) \tag{7.259}$$

$$\nu_k\nu^*_k h^0 : \quad \frac{g_Z}{2}m_Z\sin(\alpha+\beta) \tag{7.260}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k}h^0 : \quad \left(\frac{gm^2_{\ell_k}\sin\alpha}{m_W\cos\beta} + g_Z m_Z\sin(\alpha+\beta)\Big(-\frac{1}{2}+\sin^2\theta_W\Big)\right) \tag{7.261}$$

$$\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}h^0 : \quad \left(\frac{gm^2_{\ell_k}\sin\alpha}{m_W\cos\beta} - g_Z m_Z\sin(\alpha+\beta)\sin^2\theta_W\right) \tag{7.262}$$

$$\tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\ell}^-_{R,k}h^0 : \quad \frac{gm_{\ell_k}}{2m_W\cos\beta}\big((\mu+C^{E\,*}_k)\cos\alpha - A^{E\,*}_k\sin\alpha\big) \tag{7.263}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}h^0 : \quad \frac{gm_{\ell_k}}{2m_W\cos\beta}\big((\mu^*+C^{E}_k)\cos\alpha - A^{E}_k\sin\alpha\big) \tag{7.264}$$

$$\tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\ell}^-_{R,k}A^0 : \quad -\,\mathrm{i}\,\frac{gm_{\ell_k}}{2m_W}\big(A^{E\,*}_k\tan\beta - (\mu+C^{E\,*}_k)\big) \tag{7.265}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}A^0 : \quad \mathrm{i}\,\frac{gm_{\ell_k}}{2m_W}\big(A^{E}_k\tan\beta - (\mu^*+C^{E}_k)\big) \tag{7.266}$$

$$\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{L,k}H^+ : \quad -\,\frac{g}{\sqrt{2}m_W}\big(m^2_W\sin(2\beta) - m^2_{\ell_k}\tan\beta\big) \tag{7.267}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{L,k}H^- : \quad -\,\frac{g}{\sqrt{2}m_W}\big(m^2_W\sin(2\beta) - m^2_{\ell_k}\tan\beta\big) \tag{7.268}$$

$$\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{R,k}H^+ : \quad \frac{gm_{\ell_k}}{\sqrt{2}m_W}\big((\mu+C^{E\,*}_k) - A^{E\,*}_k\tan\beta\big) \tag{7.269}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{R,k}H^- : \quad \frac{gm_{\ell_k}}{\sqrt{2}m_W}\big((\mu^*+C^{E}_k) - A^{E}_k\tan\beta\big) \tag{7.270}$$

4-Kopplungen an die Higgs-Felder:

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k H^0H^0 : \quad -\,\frac{1}{8}g^2_Z\cos(2\alpha) \tag{7.271}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k}H^0H^0 : \quad -\,\frac{g^2m^2_{\ell_k}\cos^2\alpha}{4m^2_W\cos^2\beta} + \frac{1}{4}g^2_Z\left(\frac{1}{2}-\sin^2\theta_W\right)\cos(2\alpha) \tag{7.272}$$

$$\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}H^0H^0 : \quad -\,\frac{g^2m^2_{\ell_k}\cos^2\alpha}{4m^2_W\cos^2\beta} + \frac{1}{4}g^2_Z\sin^2\theta_W\cos(2\alpha) \tag{7.273}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k h^0h^0 : \quad \frac{1}{8}g^2_Z\cos(2\alpha) \tag{7.274}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k}h^0h^0: \quad -\frac{g^2 m^2_{\ell_k}\sin^2\alpha}{4m^2_W\cos^2\beta}-\frac{1}{4}g^2_Z\left(\frac{1}{2}-\sin^2\theta_W\right)\cos(2\alpha) \tag{7.275}$$

$$\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}h^0h^0: \quad -\frac{g^2 m^2_{\ell_k}\sin^2\alpha}{4m^2_W\cos^2\beta}-\frac{1}{4}g^2_Z\sin^2\theta_W\cos(2\alpha) \tag{7.276}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k H^0h^0: \quad \frac{1}{4}g^2_Z\sin(2\alpha) \tag{7.277}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k}H^0h^0: \quad \frac{g^2 m^2_{\ell_k}\sin(2\alpha)}{4m^2_W\cos^2\beta}-\frac{1}{4}g^2_Z\left(\frac{1}{2}-\sin^2\theta_W\right)\sin(2\alpha) \tag{7.278}$$

$$\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}H^0h^0: \quad \frac{g^2 m^2_{\ell_k}\sin(2\alpha)}{4m^2_W\cos^2\beta}-\frac{1}{2}g^2_Z\sin^2\theta_W\sin(2\alpha) \tag{7.279}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k A^0A^0: \quad \frac{1}{8}g^2_Z\cos(2\beta) \tag{7.280}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k}A^0A^0: \quad -\frac{g^2 m^2_{\ell_k}}{4m^2_W}\tan^2\beta-\frac{1}{4}g^2_Z\left(\frac{1}{2}-\sin^2\theta_W\right)\cos(2\beta) \tag{7.281}$$

$$\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}A^0A^0: \quad -\frac{g^2 m^2_{\ell_k}}{4m^2_W}\tan^2\beta-\frac{1}{4}g^2_Z\sin^2\theta_W\cos(2\beta) \tag{7.282}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k H^+H^-: \quad -\frac{g^2 m^2_{\ell_k}}{2m^2_W}\tan^2\beta-\frac{1}{2}g^2_Z\left(\frac{1}{2}-\sin^2\theta_W\right)\cos(2\beta) \tag{7.283}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k}H^+H^-: \quad \frac{1}{4}g^2_Z\cos(2\beta) \tag{7.284}$$

$$\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}H^+H^-: \quad -\frac{g^2 m^2_{\ell_k}}{2m^2_W}\tan^2\beta-\frac{1}{2}g^2_Z\sin^2\theta_W\cos(2\beta) \tag{7.285}$$

$$\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{L,k}H^+H^0: \quad \frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k}\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta}-m^2_W\sin(\alpha+\beta)\right) \tag{7.286}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{L,k}H^-H^0: \quad \frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k}\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta}-m^2_W\sin(\alpha+\beta)\right) \tag{7.287}$$

$$\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{L,k}H^+h^0: \quad -\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta}+m^2_W\cos(\alpha+\beta)\right) \tag{7.288}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{L,k}H^-h^0: \quad -\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta}+m^2_W\cos(\alpha+\beta)\right) \tag{7.289}$$

$$\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{L,k}H^+A^0: \quad \mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k}\tan^2\beta+m^2_W\cos(2\beta)\right) \tag{7.290}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{L,k}H^-A^0: \quad -\mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k}\tan^2\beta+m^2_W\cos(2\beta)\right) \tag{7.291}$$

3-Kopplungen an die Goldstone-Bosonen:

$$\tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\ell}^-_{R,k}\phi^0 : \quad -\,\mathrm{i}\,\frac{g m_{\ell_k}}{2m_W}\left(A_k^{E\,*} + (\mu + C_k^{E\,*})\tan\beta\right) \tag{7.292}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}\phi^0 : \quad \mathrm{i}\,\frac{g m_{\ell_k}}{2m_W}\left(A_k^{E} + (\mu^* + C_k^{E})\tan\beta\right) \tag{7.293}$$

$$\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{L,k}\phi^+ : \quad \frac{g}{\sqrt{2}m_W}\left(m^2_{\ell_k} - m_W^2\cos(2\beta)\right) \tag{7.294}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{L,k}\phi^- : \quad \frac{g}{\sqrt{2}m_W}\left(m^2_{\ell_k} - m_W^2\cos(2\beta)\right) \tag{7.295}$$

$$\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{R,k}\phi^+ : \quad -\,\frac{g m_{\ell_k}}{\sqrt{2}m_W}\left((\mu + C_k^{E\,*})\tan\beta + A_k^{E\,*}\right) \tag{7.296}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{R,k}\phi^- : \quad -\,\frac{g m_{\ell_k}}{\sqrt{2}m_W}\left((\mu^* + C_k^{E})\tan\beta + A_k^{E}\right) \tag{7.297}$$

4-Kopplungen an die Goldstone-Bosonen:

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k A^0\phi^0 : \quad \frac{1}{4}g_Z^2\sin(2\beta) \tag{7.298}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k} A^0\phi^0 : \quad -\,\frac{g^2 m^2_{\ell_k}}{2m_W^2}\tan\beta + \frac{1}{2}g_Z^2\left(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_W\right)\sin(2\beta) \tag{7.299}$$

$$\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k} A^0\phi^0 : \quad -\,\frac{g^2 m^2_{\ell_k}}{2m_W^2}\tan\beta + \frac{1}{2}g_Z^2\sin^2\theta_W\sin(2\beta) \tag{7.300}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k H^\pm\phi^\mp : \quad -\,\frac{g^2 m^2_{\ell_k}}{2m_W^2}\tan\beta + \frac{1}{2}g_Z^2\left(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_W\right)\sin(2\beta) \tag{7.301}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k} H^\pm\phi^\mp : \quad -\,\frac{1}{4}g_Z^2\sin(2\beta) \tag{7.302}$$

$$\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k} H^\pm\phi^\mp : \quad -\,\frac{g^2 m^2_{\ell_k}}{2m_W^2}\tan\beta + \frac{1}{2}g_Z^2\sin^2\theta_W\sin(2\beta) \tag{7.303}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k\phi^+\phi^- : \quad -\,\frac{g^2 m^2_{\ell_k}}{2m_W^2} + \frac{1}{2}g_Z^2\left(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_W\right)\cos(2\beta) \tag{7.304}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k}\phi^+\phi^- : \quad -\,\frac{1}{4}g_Z^2\cos(2\beta) \tag{7.305}$$

$$\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}\phi^+\phi^- : \quad -\,\frac{g^2 m^2_{\ell_k}}{2m_W^2} + \frac{1}{2}g_Z^2\sin^2\theta_W\cos(2\beta) \tag{7.306}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k\phi^0\phi^0 : \quad -\,\frac{1}{8}g_Z^2\cos(2\beta) \tag{7.307}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k}\phi^0\phi^0 : \quad -\,\frac{g^2 m^2_{\ell_k}}{2m_W^2} + \frac{1}{4}g_Z^2\left(\frac{1}{2} - \sin^2\theta_W\right)\cos(2\beta) \tag{7.308}$$

$$\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}\phi^0\phi^0: \qquad -\frac{g^2 m^2_{\ell_k}}{2m^2_W} + \frac{1}{4}g^2_Z \sin^2\theta_W \cos(2\beta) \tag{7.309}$$

$$\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{L,k}H^+\phi^0: \qquad \mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k}\tan\beta - m^2_W\sin(2\beta)\right) \tag{7.310}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{L,k}H^-\phi^0: \qquad -\mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k}\tan\beta - m^2_W\sin(2\beta)\right) \tag{7.311}$$

$$\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{L,k}H^0\phi^+: \qquad \frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} - m^2_W\cos(\alpha+\beta)\right) \tag{7.312}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{L,k}H^0\phi^-: \qquad \frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} - m^2_W\cos(\alpha+\beta)\right) \tag{7.313}$$

$$\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{L,k}h^0\phi^+: \qquad -\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} - m^2_W\sin(\alpha+\beta)\right) \tag{7.314}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{L,k}h^0\phi^-: \qquad -\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} - m^2_W\sin(\alpha+\beta)\right) \tag{7.315}$$

$$\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{L,k}A^0\phi^+: \qquad \mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k}\tan\beta - m^2_W\sin(2\beta)\right) \tag{7.316}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{L,k}A^0\phi^-: \qquad -\mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k}\tan\beta - m^2_W\sin(2\beta)\right) \tag{7.317}$$

$$\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{L,k}\phi^+\phi^0: \qquad \mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k} - m^2_W\cos(2\beta)\right) \tag{7.318}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{L,k}\phi^-\phi^0: \qquad -\mathrm{i}\frac{g^2}{2\sqrt{2}m^2_W}\left(m^2_{\ell_k} - m^2_W\cos(2\beta)\right) \tag{7.319}$$

7.5 Reine Slepton-Squark-Sneutrino-Terme

Die Terme, die vom rein skalaren Sektor verbleiben, sind die Wechselwirkungen der Squarks, Sleptonen und Sneutrinos untereinander. Dabei ist zu beachten, daß die Squarks untereinander natürlich Wechselwirkungen besitzen, die durch die starke Wechselwirkung zustande kommen, weshalb die Struktur dieser Terme am komplexesten ist. Im weiteren werden wir die Konstante

$$4T_F\left(1-\frac{1}{N}\right) \equiv K_F \xrightarrow{SU(3)} \frac{4}{3} \tag{7.320}$$

abkürzen. Vorsicht: Auch wenn für die $SU(3)$ der numerische Zufall $K_F = C_F = 4/3$ den gleichen Wert wie für den Casimir-Operator beschert, sind die Bildungen unterschiedlich!

Man beachte weiterhin, daß bei der von uns angenommenen Spezialisierung bezüglich der Gestalt der weichen, Supersymmetrie brechenden Terme keine Mischungen zwischen den Generationen auftreten können, es sei denn, bei einem Vertex, der up- und down-Squarks enthält. Dann tritt, wie bereits diskutiert, die CKM-Mischungsmatrix auf.

7.5.1 Reine Slepton-Sneutrino-Wechselwirkungen

Behandeln wir zunächst die reinen Slepton-Sneutrino-Wechselwirkungen. Aus dem Superpotential extrahiert man diese Terme:

$$\begin{aligned}
&-\sum_k \frac{2m_{\ell_k}^2}{v_1^2}|\tilde{\ell}_{L,k}|^2|\tilde{\ell}_{R,k}|^2 - \sum_{k\neq l}\frac{2m_{\ell_k}m_{\ell_l}}{v_1^2}\left(\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}\tilde{\ell}^+_{L,l}\tilde{\ell}^-_{R,l} + \tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^-_{L,l}\tilde{\ell}^+_{R,l}\right)\\
&-\sum_k \frac{2m_{\ell_k}^2}{v_1^2}|\tilde{\nu}_k|^2|\tilde{\ell}_{R,k}|^2 - \sum_{k\neq l}\frac{2m_{\ell_k}m_{\ell_l}}{v_1^2}\left(\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{R,k}\tilde{\nu}^*_l\tilde{\ell}^-_{R,l} + \tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\nu}_l\tilde{\ell}^+_{R,l}\right) \qquad (7.321)
\end{aligned}$$

Die Kopplung an die Eichgruppe der Hyperladung liefert:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8}g'^2\Bigg(&\sum_{k=1}|\tilde{\ell}_{L,k}|^4 + 4\sum_{k=1}|\tilde{\ell}_{R,k}|^4 + \sum_{k=1}|\tilde{\nu}_k|^4 + \sum_{k\neq l}|\tilde{\ell}_{L,k}|^2|\tilde{\ell}_{L,l}|^2\\
&-4\sum_{k,l}|\tilde{\ell}_{L,k}|^2|\tilde{\ell}_{R,l}|^2 + 2\sum_{k,l}|\tilde{\ell}_{L,k}|^2|\tilde{\nu}_l|^2 + 4\sum_{k\neq l}|\tilde{\ell}_{R,k}|^2|\tilde{\ell}_{R,l}|^2\\
&-4\sum_{k,l}|\tilde{\ell}_{R,k}|^2|\tilde{\nu}_l|^2 + \sum_{k\neq l}|\tilde{\nu}_k|^2|\tilde{\nu}_l|^2\Bigg) \qquad (7.322)
\end{aligned}$$

Über die $SU(2)_L$-Eichgruppe erhält man:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8}g^2\Bigg(&\sum_{k=1}^3|\tilde{\nu}_k|^4 + \sum_{k=1}^3|\tilde{\ell}_{L,k}|^4 + 2\sum_{k=1}^3|\tilde{\nu}_k|^2|\tilde{\ell}_{L,k}|^2 + \sum_{k\neq l}|\tilde{\nu}_k|^2|\tilde{\nu}_l|^2\\
&+\sum_{k\neq l}|\tilde{\ell}_{L,k}|^2|\tilde{\ell}_{L,l}|^2 - 2\sum_{k\neq l}|\tilde{\nu}_{L,k}|^2|\tilde{\ell}_{L,l}|^2\\
&+2\sum_{k\neq l}\left(\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_l\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,l} + \tilde{\nu}^*_k\tilde{\nu}_l\tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\ell}^-_{L,l}\right)\Bigg) \qquad (7.323)
\end{aligned}$$

Daraus gewinnt man zunächst die Terme mit den Wechselwirkungseigenzuständen. Für gleiche Generationen lauten die Ausdrücke in der Lagrangedichte:

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k: \qquad -\frac{g_Z^2}{8}|\tilde{\nu}_k|^4 \qquad (7.324)$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k}: \qquad -\frac{g_Z^2}{8}|\tilde{\ell}_{L,k}|^4 \tag{7.325}$$

$$\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}: \qquad -\frac{g_Z^2}{2}|\tilde{\ell}_{R,k}|^4 \tag{7.326}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k: \qquad -\frac{g_Z^2}{4}|\tilde{\ell}_{L,k}|^2|\tilde{\nu}_k|^2 \tag{7.327}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}: \qquad \left(\frac{1}{2}g_Z^2\sin^2\theta_W - \frac{g^2 m_{\ell_k}^2}{2m_W^2\cos^2\beta}\right)|\tilde{\ell}_{L,k}|^2|\tilde{\ell}_{R,k}|^2 \tag{7.328}$$

$$\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k: \qquad \left(\frac{1}{2}g_Z^2\sin^2\theta_W - \frac{g^2 m_{\ell_k}^2}{2m_W^2\cos^2\beta}\right)|\tilde{\ell}_{R,k}|^2|\tilde{\nu}_k|^2 \tag{7.329}$$

Hat man verschiedene Generationen, gilt also $k \neq l$, dann:

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k\tilde{\nu}_l\tilde{\nu}^*_l: \qquad -\frac{g_Z^2}{4}|\tilde{\nu}_k|^2|\tilde{\nu}_l|^2 \tag{7.330}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\ell}^-_{L,l}\tilde{\ell}^+_{L,l}: \qquad -\frac{g_Z^2}{4}|\tilde{\ell}_{L,k}|^2|\tilde{\ell}_{L,l}|^2 \tag{7.331}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_l\tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\ell}^-_{L,l}: \qquad -\frac{g_Z^2}{2}\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_l\tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\ell}^-_{L,l}\ (+\text{ h.c.}) \tag{7.332}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{R,l}\tilde{\ell}^+_{R,l}: \qquad \frac{g_Z^2}{2}\sin^2\theta_W|\tilde{\nu}_k|^2|\tilde{\ell}_{R,l}|^2 \tag{7.333}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\ell}^-_{R,l}\tilde{\ell}^+_{R,l}: \qquad \frac{g_Z^2}{2}\sin^2\theta_W|\tilde{\ell}_{L,k}|^2|\tilde{\ell}_{R,l}|^2 \tag{7.334}$$

$$\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}\tilde{\ell}^-_{R,l}\tilde{\ell}^+_{R,l}: \qquad -g_Z^2|\tilde{\ell}_{R,k}|^2|\tilde{\ell}_{R,l}|^2 \tag{7.335}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{L,l}\tilde{\ell}^+_{L,l}: \qquad g_Z^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin^2\theta_W\right)|\tilde{\nu}_k|^2|\tilde{\ell}_{L,l}|^2 \tag{7.336}$$

$$\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_l\tilde{\ell}^+_{R,k}\tilde{\ell}^-_{R,l}: \qquad -\frac{g^2 m_{\ell_k}m_{\ell_l}}{2m_W^2\cos^2\beta}\tilde{\nu}_k\tilde{\nu}^*_l\tilde{\ell}^+_{R,k}\tilde{\ell}^-_{R,l}\ (+\text{ h.c.}) \tag{7.337}$$

$$\tilde{\ell}^\mp_{L,k}\tilde{\ell}^\pm_{R,k}\tilde{\ell}^\pm_{L,l}\tilde{\ell}^\mp_{R,l}: \qquad -\frac{g^2 m_{\ell_k}m_{\ell_l}}{2m_W^2\cos^2\beta}\tilde{\ell}^\mp_{L,k}\tilde{\ell}^\pm_{R,k}\tilde{\ell}^\pm_{L,l}\tilde{\ell}^\mp_{R,l} \tag{7.338}$$

7.5.2 Reine Squark-Wechselwirkungen

Die Bestandteile des Stückes der MSSM-Lagrangedichte, die die reinen Squark-Wechselwirkungen beinhalten, sind die folgenden, die gleich durch die physikalischen Massen-Eigenzustände ausgedrückt werden sollen:

Der Anteil, der von der Kopplung durch die $U(1)_Y$-Eichgruppe herrührt, hat die Gestalt:

$$-\frac{1}{72}g'^2\left(\sum_{k=1}^{3}|\tilde{u}_{L,k}|^4 + \sum_{k=1}^{3}|\tilde{d}_{L,k}|^4 + 16\sum_{k=1}^{3}|\tilde{u}_{R,k}|^4 + 4\sum_{k=1}^{3}|\tilde{d}_{R,k}|^4\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{k\neq l} |\tilde{u}_{L,k}|^2 |\tilde{u}_{L,l}|^2 + \sum_{k\neq l} |\tilde{d}_{L,k}|^2 |\tilde{d}_{L,l}|^2 + 16 \sum_{k\neq l} |\tilde{u}_{R,k}|^2 |\tilde{u}_{R,l}|^2 \\
&+ 4 \sum_{k\neq l} |\tilde{d}_{R,k}|^2 |\tilde{d}_{R,l}|^2 + 2 \sum_{k,l} |\tilde{u}_{L,k}|^2 |\tilde{d}_{L,l}|^2 - 8 \sum_{k,l} |\tilde{u}_{L,k}|^2 |\tilde{u}_{R,l}|^2 \\
&+ 4 \sum_{k,l} |\tilde{u}_{L,k}|^2 |\tilde{d}_{R,l}|^2 - 8 \sum_{k,l} |\tilde{d}_{L,k}|^2 |\tilde{u}_{R,l}|^2 + 4 \sum_{k,l} |\tilde{d}_{L,k}|^2 |\tilde{d}_{R,l}|^2 \\
&- 16 \sum_{k,l} |\tilde{u}_{R,k}|^2 |\tilde{d}_{R,l}|^2 \Bigg) \qquad (7.339)
\end{aligned}
$$

Die Rechnung der $SU(2)_L$-Wechselwirkung ist aufwendig. Es gilt:

$$
Q_i^\dagger Q_i = |\tilde{u}_{L,i}|^2 + \sum_{a,b=1}^{3} V_{ia}^{CKM\,*} V_{ib}^{CKM} \tilde{d}_{L,a}^* \tilde{d}_{L,b} \qquad (7.340)
$$

$$
Q_i^\dagger Q_j = \tilde{u}_{L,i}^* \tilde{u}_{L,j} + \sum_{a,b=1}^{3} V_{ia}^{CKM\,*} V_{jb}^{CKM} \tilde{d}_{L,a}^* \tilde{d}_{L,b} \qquad (7.341)
$$

Führt man das Quadrat im D-Term der schwachen Wechselwirkung aus, dann stößt man auf eine große Zahl von Ausdrücken, die bis zu vier CKM-Matrizen beinhalten (die unterstrichenen Terme heben sich weg):

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{8} g^2 \left(\sum_i Q_i^\dagger \vec{\tau} Q_i \right) \left(\sum_k Q_k^\dagger \vec{\tau} Q_k \right) \\
=& -\frac{1}{8} g^2 \Bigg(\sum_{k=1}^{3} |\tilde{u}_{L,k}|^4 + \sum_{k=1}^{3} \sum_{a,b,c,d} V_{ka}^{CKM\,*} V_{kb}^{CKM} V_{kc}^{CKM\,*} V_{kd}^{CKM} \tilde{d}_{L,a}^* \tilde{d}_{L,b} \tilde{d}_{L,c}^* \tilde{d}_{L,d} \\
&+ 2 \sum_{k=1}^{3} \sum_{a,b} |\tilde{u}_{L,k}|^2 V_{ka}^{CKM\,*} V_{kb}^{CKM} \tilde{d}_{L,a}^* \tilde{d}_{L,b} - 2 \sum_{k<l} |\tilde{u}_{L,k}|^2 |\tilde{u}_{L,l}|^2 \\
&- 2 \sum_{k\neq l} \sum_{a,b} |\tilde{u}_{L,k}|^2 V_{la}^{CKM\,*} V_{lb}^{CKM} \tilde{d}_{L,a}^* \tilde{d}_{L,b} \\
&- 2 \sum_{k<l} \sum_{a,b,c,d} V_{ka}^{CKM\,*} V_{kb}^{CKM} V_{lc}^{CKM\,*} V_{ld}^{CKM} \tilde{d}_{L,a}^* \tilde{d}_{L,b} \tilde{d}_{L,c}^* \tilde{d}_{L,d} \\
&+ 4 \sum_{k<l} |\tilde{u}_{L,k}|^2 |\tilde{u}_{L,l}|^2 + 4 \sum_{k\neq l} \sum_{a,b} \tilde{u}_{L,k}^* \tilde{u}_{L,l} V_{la}^{CKM\,*} V_{kb}^{CKM} \tilde{d}_{L,a}^* \tilde{d}_{L,b} \\
&+ 4 \sum_{k<l} \sum_{a,b,c,d} V_{ka}^{CKM\,*} V_{lb}^{CKM} V_{lc}^{CKM\,*} V_{kd}^{CKM} \tilde{d}_{L,a}^* \tilde{d}_{L,b} \tilde{d}_{L,c}^* \tilde{d}_{L,d} \Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= &-\frac{1}{8}g^2\Bigg(\sum_{k=1}^{3}|\tilde{u}_{L,k}|^4 + 2\sum_{k<l}|\tilde{u}_{L,k}|^2|\tilde{u}_{L,l}|^2 - 2\sum_{k=1}^{3}|\tilde{u}_{L,k}|^2|\tilde{d}_{L,k}|^2 \\
&- 2\sum_{k<l}|\tilde{u}_{L,k}|^2|\tilde{d}_{L,l}|^2 + 4\sum_{a,b,c,d}(\tilde{u}^*_{L,a}V^{CKM}_{ab}\tilde{d}_{L,b})(\tilde{u}_{L,c}V^{CKM\,*}_{cd}\tilde{d}^*_{L,d}) \\
&+ \sum_{k=1}^{3}\sum_{a,b,c,d}V^{CKM\,*}_{ka}V^{CKM}_{kb}V^{CKM\,*}_{kc}V^{CKM}_{kd}\tilde{d}^*_{L,a}\tilde{d}_{L,b}\tilde{d}^*_{L,c}\tilde{d}_{L,d} \\
&+ 2\sum_{k<l}\sum_{a,b,c,d}V^{CKM\,*}_{ka}V^{CKM}_{kb}V^{CKM\,*}_{lc}V^{CKM}_{ld}\tilde{d}^*_{L,a}\tilde{d}_{L,b}\tilde{d}^*_{L,c}\tilde{d}_{L,d}\Bigg)
\end{aligned}
\tag{7.342}
$$

Die letzten beiden Zeilen kann man wie folgt zusammenfassen und umformen:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{3}\sum_{a,b,c,d}V^{CKM\,*}_{ka}V^{CKM}_{kb}V^{CKM\,*}_{kc}V^{CKM}_{kd}\tilde{d}^*_{L,a}\tilde{d}_{L,b}\tilde{d}^*_{L,c}\tilde{d}_{L,d} \\
&\quad + 2\sum_{k<l}\sum_{a,b,c,d}V^{CKM\,*}_{ka}V^{CKM}_{kb}V^{CKM\,*}_{lc}V^{CKM}_{ld}\tilde{d}^*_{L,a}\tilde{d}_{L,b}\tilde{d}^*_{L,c}\tilde{d}_{L,d} \\
= &\left(\sum_{a,b}\sum_{k=1}^{3}V^{CKM\,*}_{ka}V_{kb}\tilde{d}^*_{L,a}\tilde{d}_{L,b}\right)^2 = \left(\sum_{a,b}\delta_{ab}\tilde{d}^*_{L,a}\tilde{d}_{L,b}\right)^2 \\
= &\sum_{k=1}^{3}|\tilde{d}_{L,k}|^4 + 2\sum_{k<l}|\tilde{d}_{L,k}|^2|\tilde{d}_{L,l}|^2
\end{aligned}
\tag{7.343}
$$

Gleichung (6.41) kann man direkt übernehmen für den D-Term der $SU(3)_C$-Wechselwirkung (hier werden die jeweiligen Größen für die $SU(3)$ explizit eingesetzt, $T_F = 1/2$, $N = 3$):

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{6}g_s^2\Bigg[&\sum_{k}|\tilde{u}_{L,k}|^4 + \sum_{k}|\tilde{u}_{R,k}|^4 + \sum_{k}|\tilde{d}_{L,k}|^4 + \sum_{k}|\tilde{d}_{R,k}|^4 \\
&+ 2\sum_{k<l}|\tilde{u}_{L,k}|^2|\tilde{u}_{L,l}|^2 + 2\sum_{k<l}|\tilde{u}_{R,k}|^2|\tilde{u}_{R,l}|^2 + 2\sum_{k<l}|\tilde{d}_{L,k}|^2|\tilde{d}_{L,l}|^2 \\
&+ 2\sum_{k<l}|\tilde{d}_{R,k}|^2|\tilde{d}_{R,l}|^2 - 2\sum_{k,l}|\tilde{u}_{L,k}|^2|\tilde{u}_{R,l}|^2 - 2\sum_{k,l}|\tilde{d}_{L,k}|^2|\tilde{d}_{R,l}|^2 \\
&- 2\sum_{k,l}|\tilde{u}_{L,k}|^2|\tilde{d}_{R,l}|^2 - 2\sum_{k,l}|\tilde{u}_{R,k}|^2|\tilde{d}_{L,l}|^2 + 2\sum_{k,l}|\tilde{u}_{L,k}|^2|\tilde{d}_{L,l}|^2 \\
&+ 2\sum_{k,l}|\tilde{u}_{R,k}|^2|\tilde{d}_{R,l}|^2\Bigg]
\end{aligned}
\tag{7.344}
$$

Aus dem Superpotential gewinnt man die folgenden Terme:

$$
\begin{aligned}
&-\sum_k \frac{2m_{d_k}^2}{v_1^2}|\tilde{d}_{L,k}|^2|\tilde{d}_{R,k}|^2 - \sum_{k\neq l}\frac{2m_{d_k}m_{d_l}}{v_1^2}\left(\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{R,k}\tilde{d}^*_{L,l}\tilde{d}_{R,l} + \tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}_{L,l}\tilde{d}^*_{R,l}\right)\\
&-\sum_{k,l,m,n}\frac{2m_{d_k}m_{d_m}}{v_1^2}\left(V_{lk}^{CKM\,*}V_{nm}^{CKM}\tilde{u}_{L,l}\tilde{u}^*_{L,n}\tilde{d}^*_{R,k}\tilde{d}_{R,m}\right)\\
&-\sum_k \frac{2m_{u_k}^2}{v_2^2}|\tilde{u}_{L,k}|^2|\tilde{u}_{R,k}|^2 - \sum_{k\neq l}\frac{2m_{u_k}m_{u_l}}{v_2^2}\left(\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{u}^*_{L,l}\tilde{u}_{R,l} + \tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}_{L,l}\tilde{u}^*_{R,l}\right)\\
&-\sum_{k,l,m,n}\frac{2m_{u_k}m_{u_m}}{v_2^2}\left(V_{kl}^{CKM}V_{mn}^{CKM\,*}\tilde{d}_{L,l}\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{d}^*_{L,n}\tilde{u}_{R,m}\right) \qquad (7.345)
\end{aligned}
$$

Daraus ergeben sich die unten aufgelisteten Vertizes, vorläufig mit den Wechselwirkungseigenzuständen (auch hier handelt es sich nicht um Feynman-Regeln, sondern um die Terme aus der Lagrangedichte, wobei der Kürze auf der rechten Seite die Felder weggelassen wurden):

4-Squark-Vertizes (selbe Generation):

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,k}: \quad -\left(\frac{1}{6}g_s^2 + \frac{1}{2}g_Z^2\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{9}\sin^2\theta_W\right)\right) \qquad (7.346)$$

$$\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,k}: \quad -\left(\frac{1}{6}g_s^2 + \frac{1}{2}g_Z^2\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{9}\sin^2\theta_W\right)\right) \qquad (7.347)$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,k}: \quad & -\frac{1}{3}g_s^2 - \frac{1}{4}g_Z^2\left(\cos^2\theta_W\left(2|V_{kk}^{CKM}|^2-1\right)+\frac{1}{9}\sin^2\theta_W\right)\\
& \approx -\frac{1}{3}g_s^2 - g_Z^2\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{9}\sin^2\theta_W\right) \qquad (7.348)
\end{aligned}
$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{u}_{R,k}: \quad -\frac{1}{6}g_s^2 - \frac{2}{9}g_Z^2\sin^2\theta_W \qquad (7.349)$$

$$\tilde{d}^*_{R,k}\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,k}\tilde{d}_{R,k}: \quad -\frac{1}{6}g_s^2 - \frac{1}{18}g_Z^2\sin^2\theta_W \qquad (7.350)$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{u}_{R,k}: \quad \frac{1}{3}g_s^2 + \frac{1}{9}g_Z^2\sin^2\theta_W - \frac{g^2 m_{u_k}^2}{2m_W^2\sin^2\beta} \qquad (7.351)$$

$$\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{R,k}\tilde{d}_{R,k}: \quad \frac{1}{3}g_s^2 - \frac{1}{18}g_Z^2\sin^2\theta_W - \frac{g^2 m_{d_k}^2}{2m_W^2\cos^2\beta} \qquad (7.352)$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{R,k}\tilde{d}_{R,k}: \quad \frac{1}{3}g_s^2 - \frac{1}{18}g_Z^2\sin^2\theta_W - \frac{g^2 m_{d_k}^2}{2m_W^2\cos^2\beta}|V_{kk}^{CKM}|^2 \qquad (7.353)$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{u}_{R,k}\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,k}: \quad \frac{1}{3}g_s^2 + \frac{1}{9}g_Z^2 \sin^2\theta_W - \frac{g^2 m_{u_k}^2}{2m_W^2 \sin^2\beta}|V_{kk}^{CKM}|^2 \tag{7.354}$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{u}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,k}\tilde{d}_{R,k}: \quad -\frac{1}{3}g_s^2 + \frac{2}{9}g_Z^2 \sin^2\theta_W \tag{7.355}$$

4-Squark-Vertizes (verschiedene Generationen):
Im folgenden seien stets k und l verschieden, $k \neq l$.

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{L,l}\tilde{u}_{L,l}: \quad -\frac{1}{3}g_s^2 - g_Z^2\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{9}\sin^2\theta_W\right) \tag{7.356}$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}^*_{R,l}\tilde{u}_{R,l}: \quad -\frac{1}{3}g_s^2 - \frac{2}{9}g_Z^2 \sin^2\theta_W \tag{7.357}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,k}\tilde{u}^*_{R,l}\tilde{u}_{R,l}: \quad \frac{1}{3}g_s^2 + \frac{1}{9}g_Z^2 \sin^2\theta_W \tag{7.358}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{R,k}\tilde{u}^*_{R,l}\tilde{u}_{L,l}: \quad -\frac{g^2 m_{u_k} m_{u_l}}{2m_W^2 \sin^2\beta} \tag{7.359}$$

$$\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,l}\tilde{d}_{L,l}: \quad -\frac{1}{3}g_s^2 - g_Z^2\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{9}\sin^2\theta_W\right) \tag{7.360}$$

$$\tilde{d}^*_{R,k}\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,l}\tilde{d}_{R,l}: \quad -\frac{1}{3}g_s^2 - \frac{1}{9}g_Z^2 \sin^2\theta_W \tag{7.361}$$

$$\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,k}\tilde{d}^*_{R,l}\tilde{d}_{R,l}: \quad \frac{1}{3}g_s^2 - \frac{1}{18}g_Z^2 \sin^2\theta_W \tag{7.362}$$

$$\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,l}\tilde{d}_{L,l}: \quad -\frac{g^2 m_{d_k} m_{d_l}}{2m_W^2 \cos^2\beta} \tag{7.363}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,l}\tilde{d}_{L,l}: \quad -\frac{1}{3}g_s^2 + g_Z^2\left(\frac{1}{4} - \frac{5}{18}\sin^2\theta_W\right) - \frac{1}{2}g^2|V_{kl}^{CKM}|^2 \tag{7.364}$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{u}_{R,k}\tilde{d}^*_{R,l}\tilde{d}_{R,l}: \quad -\frac{1}{3}g_s^2 + \frac{2}{9}g_Z^2 \sin^2\theta_W \tag{7.365}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{R,l}\tilde{d}_{R,l}: \quad \frac{1}{3}g_s^2 - \frac{1}{18}g_Z^2 \sin^2\theta_W - \frac{g^2 m_{d_l}^2}{2m_W^2 \cos^2\beta}|V_{kl}^{CKM}|^2 \tag{7.366}$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{u}_{R,k}\tilde{d}^*_{L,l}\tilde{d}_{L,l}: \quad \frac{1}{3}g_s^2 + \frac{1}{9}g_Z^2 \sin^2\theta_W - \frac{g^2 m_{u_k}^2}{2m_W^2 \sin^2\beta}|V_{kl}^{CKM}|^2 \tag{7.367}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,l}\tilde{d}^*_{L,m}\tilde{d}_{L,n}: \quad & -\frac{1}{2}g^2 V_{kn}^{CKM} V_{lm}^{CKM*} \\ & \approx -\frac{1}{2}g^2 \quad ,k=n,l=m\end{aligned} \tag{7.368}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,l}\tilde{d}^*_{R,m}\tilde{d}_{R,n}: \qquad -\frac{g^2 m_{d_m} m_{d_n}}{2m_W^2\cos^2\beta}V^{CKM}_{kn}V^{CKM\,*}_{lm}$$

$$\approx -\frac{g^2 m_{d_k} m_{d_l}}{2m_W^2\cos^2\beta} \quad ,k=n,l=m \tag{7.369}$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{u}_{R,l}\tilde{d}^*_{L,m}\tilde{d}_{L,n}: \qquad -\frac{g^2 m_{u_k} m_{u_l}}{2m_W^2\sin^2\beta}V^{CKM}_{kn}V^{CKM\,*}_{lm}$$

$$\approx -\frac{g^2 m_{u_k} m_{u_l}}{2m_W^2\sin^2\beta} \quad ,k=n,l=m \tag{7.370}$$

7.5.3 Kopplungen der Squarks und Sleptonen

Wie bei den reinen Slepton- bzw. Squark-Kopplungen auch hat man hier einen D-Term der Hyperladung,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{12}g'^2\Bigg(&2\sum_{k,l}|\tilde{u}_{L,k}|^2|\tilde{\ell}_{R,l}|^2-\sum_{k,l}|\tilde{u}_{L,k}|^2|\tilde{\ell}_{L,l}|^2-\sum_{k,l}|\tilde{u}_{L,k}|^2|\tilde{\nu}_l|^2\\ &+2\sum_{k,l}|\tilde{d}_{L,k}|^2|\tilde{\ell}_{R,l}|^2-\sum_{k,l}|\tilde{d}_{L,k}|^2|\tilde{\ell}_{L,l}|^2-\sum_{k,l}|\tilde{d}_{L,k}|^2|\tilde{\nu}_l|^2\\ &-8\sum_{k,l}|\tilde{u}_{R,k}|^2|\tilde{\ell}_{R,l}|^2+4\sum_{k,l}|\tilde{u}_{R,k}|^2|\tilde{\ell}_{L,l}|^2+4\sum_{k,l}|\tilde{u}_{R,k}|^2|\tilde{\nu}_l|^2\\ &+4\sum_{k,l}|\tilde{d}_{R,k}|^2|\tilde{\ell}_{R,l}|^2-2\sum_{k,l}|\tilde{d}_{R,k}|^2|\tilde{\ell}_{L,l}|^2-2\sum_{k,l}|\tilde{d}_{R,k}|^2|\tilde{\nu}_l|^2\Bigg),\end{aligned} \tag{7.371}$$

einen D-Term der $SU(2)_L$,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}g^2\Bigg(&\sum_{k,l}|\tilde{u}_{L,k}|^2|\tilde{\nu}_l|^2+\sum_{k,l}|\tilde{d}_{L,k}|^2|\tilde{\ell}_{L,l}|^2-\sum_{k,l}|\tilde{u}_{L,k}|^2|\tilde{\ell}_{L,l}|^2-\sum_{k,l}|\tilde{d}_{L,k}|^2|\tilde{\nu}_l|^2\\ &+2\sum_{k,l,m}\left(\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{\nu}_l V^{CKM}_{km}\tilde{d}_{L,m}\tilde{\ell}^+_{L,l}+\tilde{u}_{L,k}\tilde{\nu}^*_l V^{CKM\,*}_{km}\tilde{d}^*_{L,m}\tilde{\ell}^-_{L,l}\right)\Bigg),\end{aligned} \tag{7.372}$$

sowie einen Beitrag aus dem Superpotential,

$$\begin{aligned}&-\sum_{k,l}\frac{2m_{\ell_k}m_{d_l}}{v_1^2}\left(\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}\tilde{d}^*_{L,l}\tilde{d}_{R,l}+\tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{d}_{L,l}\tilde{d}^*_{R,l}\right)\\ &-\sum_{k,l,m}\frac{2m_{\ell_k}m_{d_l}}{v_1^2}\left(V^{CKM}_{ml}\tilde{\nu}_k\tilde{\ell}^+_{R,k}\tilde{u}^*_{L,m}\tilde{d}_{R,l}+V^{CKM\,*}_{ml}\tilde{\nu}^*_k\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{u}_{L,m}\tilde{d}^*_{R,l}\right).\end{aligned} \tag{7.373}$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Terme, in welchen stets k, l, m auch gleich sein können (auch für die Squark-Slepton-Wechselwirkungen sind der Kürze halber die Felder auf der rechten Seite nicht aufgeführt).

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,k}\tilde{\nu}_l\tilde{\nu}^*_l : \quad -g_Z^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right) \tag{7.374}$$

$$\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,k}\tilde{\ell}^-_{L,l}\tilde{\ell}^+_{L,l} : \quad -g_Z^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right) \tag{7.375}$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{u}_{R,k}\tilde{\nu}^*_l\tilde{\nu}_l : \quad -\frac{1}{3}g_Z^2\sin^2\theta_W \tag{7.376}$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{u}_{R,k}\tilde{\ell}^-_{L,l}\tilde{\ell}^+_{L,l} : \quad -\frac{1}{3}g_Z^2\sin^2\theta_W \tag{7.377}$$

$$\tilde{u}^*_{R,k}\tilde{u}_{R,k}\tilde{\ell}^-_{R,l}\tilde{\ell}^+_{R,l} : \quad \frac{2}{3}g_Z^2\sin^2\theta_W \tag{7.378}$$

$$\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,k}\tilde{\nu}_l\tilde{\nu}^*_l : \quad g_Z^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\sin^2\theta_W\right) \tag{7.379}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,k}\tilde{\ell}_{L,l}\tilde{\ell}^*_{L,l} : \quad g_Z^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\sin^2\theta_W\right) \tag{7.380}$$

$$\tilde{d}^*_{R,k}\tilde{d}_{R,k}\tilde{\nu}^*_l\tilde{\nu}_l : \quad \frac{1}{6}g_Z^2\sin^2\theta_W \tag{7.381}$$

$$\tilde{d}^*_{R,k}\tilde{d}_{R,k}\tilde{\ell}^-_{L,l}\tilde{\ell}^+_{L,l} : \quad \frac{1}{6}g_Z^2\sin^2\theta_W \tag{7.382}$$

$$\tilde{d}^*_{R,k}\tilde{d}_{R,k}\tilde{\ell}^-_{R,l}\tilde{\ell}^+_{R,l} : \quad -\frac{1}{3}g_Z^2\sin^2\theta_W \tag{7.383}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{u}_{L,k}\tilde{\ell}^-_{R,l}\tilde{\ell}^+_{R,l} : \quad -\frac{1}{6}g_Z^2\sin^2\theta_W \tag{7.384}$$

$$\tilde{d}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,k}\tilde{\ell}^-_{R,l}\tilde{\ell}^+_{R,l} : \quad -\frac{1}{6}g_Z^2\sin^2\theta_W \tag{7.385}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{d}_{L,m}\tilde{\ell}^+_{L,l}\tilde{\nu}_l : \quad -\frac{1}{2}g^2V^{CKM}_{km} \tag{7.386}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{L,m}\tilde{\ell}^-_{L,l}\tilde{\nu}^*_l : \quad -\frac{1}{2}g^2V^{CKM*}_{km} \tag{7.387}$$

$$\tilde{\ell}^-_{L,k}\tilde{\ell}^+_{R,k}\tilde{d}^*_{L,l}\tilde{d}_{R,l} : \quad -\frac{g^2m_{\ell_k}m_{d_l}}{2m_W^2\cos^2\beta} \tag{7.388}$$

$$\tilde{\ell}^+_{L,k}\tilde{\ell}^-_{R,k}\tilde{d}_{L,l}\tilde{d}^*_{R,l} : \quad -\frac{g^2m_{\ell_k}m_{d_l}}{2m_W^2\cos^2\beta} \tag{7.389}$$

$$\tilde{u}^*_{L,k}\tilde{d}_{R,m}\tilde{\nu}_l\tilde{\ell}^+_{R,l} : \quad -\frac{g^2m_{\ell_l}m_{d_m}}{2m_W^2\cos^2\beta}V^{CKM}_{km} \tag{7.390}$$

$$\tilde{u}_{L,k}\tilde{d}^*_{R,m}\tilde{\nu}^*_l\tilde{\ell}^-_{R,l} : \qquad -\frac{g^2 m_{\ell_l} m_{d_m}}{2m_W^2\cos^2\beta}V^{CKM\,*}_{km} \tag{7.391}$$

7.5.4 Tabelle der Sfermion-Mischungen

In diesem Abschnitt sind Umrechnungsformeln zusammengetragen, die die Wechselwirkungs-Eigenzustände, die rechts- und linkshändigen Sfermionen auf die Masseneigenzustände umschreiben. Wegen der Häufigkeit des Auftretens von Sinus- und Cosinus-Funktionen benutzen wir hier die Abkürzungen

$$\cos\theta_f \equiv c_f, \qquad \sin\theta_f \equiv \sin_f\,. \tag{7.392}$$

Es gelten zunächst die elementaren Drehungen:

$$\tilde{f}_L = \tilde{f}_1 c_f - \tilde{f}_2 s_f, \tag{7.393}$$
$$\tilde{f}_R = \tilde{f}_1 s_f + \tilde{f}_2 c_f, \tag{7.394}$$

was für alle Sfermionen gilt. (In der Stufe der bisherigen Rechnung nicht für Sneutrinos, die als nur linkshändig vorkommend angenommen wurden.)

Daraus resultieren die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nu}^*\tilde{\ell}_L) &= c_\ell\tilde{\nu}^*\tilde{\ell}_1 - s_\ell\tilde{\nu}^*\tilde{\ell}_2,\\
(\tilde{\nu}^*\tilde{\ell}_R) &= s_\ell\tilde{\nu}^*\tilde{\ell}_1 + c_\ell\tilde{\nu}^*\tilde{\ell}_2,\\
(\tilde{u}^*_L\tilde{u}_L) &= c_u^2\tilde{u}^*_1\tilde{u}_1 - c_u s_u(\tilde{u}^*_1\tilde{u}_2 + \tilde{u}^*_2\tilde{u}_1) + s_u^2\tilde{u}^*_2\tilde{u}_2,\\
(\tilde{u}^*_R\tilde{u}_R) &= s_u^2\tilde{u}^*_1\tilde{u}_1 + c_u s_u(\tilde{u}^*_1\tilde{u}_2 + \tilde{u}^*_2\tilde{u}_1) + c_u^2\tilde{u}^*_2\tilde{u}_2,\\
(\tilde{u}^*_L\tilde{u}_R) &= c_u s_u\tilde{u}^*_1\tilde{u}_1 + c_u^2\tilde{u}^*_1\tilde{u}_2 - s_u^2\tilde{u}^*_2\tilde{u}_1 - c_u s_u\tilde{u}^*_2\tilde{u}_2,\\
(\tilde{u}_L\tilde{u}^*_R) &= c_u s_u\tilde{u}^*_1\tilde{u}_1 + c_u^2\tilde{u}_1\tilde{u}^*_2 - s_u^2\tilde{u}_2\tilde{u}^*_1 - c_u s_u\tilde{u}^*_2\tilde{u}_2, \qquad (7.395)\\
(\tilde{d}^*_L\tilde{u}_L) &= c_d c_u\tilde{d}^*_1\tilde{u}_1 - c_d s_u\tilde{d}^*_1\tilde{u}_2 - s_d c_u\tilde{d}^*_2\tilde{u}_1 + s_d s_u\tilde{d}^*_2\tilde{u}_2,\\
(\tilde{d}^*_R\tilde{u}_R) &= s_d s_u\tilde{d}^*_1\tilde{u}_1 + s_d c_u\tilde{d}^*_1\tilde{u}_2 + c_d s_u\tilde{d}^*_2\tilde{u}_1 + c_d c_u\tilde{d}^*_2\tilde{u}_2,\\
(\tilde{d}^*_L\tilde{u}_R) &= c_d s_u\tilde{d}^*_1\tilde{u}_1 + c_d c_u\tilde{d}^*_1\tilde{u}_2 - s_d s_u\tilde{d}^*_2\tilde{u}_1 - s_d c_u\tilde{d}^*_2\tilde{u}_2,\\
(\tilde{d}^*_R\tilde{u}_L) &= s_d c_u\tilde{d}^*_1\tilde{u}_1 - s_d s_u\tilde{d}^*_1\tilde{u}_2 + c_d c_u\tilde{d}^*_2\tilde{u}_1 - c_d s_u\tilde{d}^*_2\tilde{u}_2 \qquad (7.396)
\end{aligned}$$

Für die Vertizes mit vier Sfermionen benötigt man die Quadrate der obigen Ausdrücke (gleiche wie gemischte):

$$\begin{aligned}
(\tilde{u}^*_L\tilde{u}_L)^2 = {} & |\tilde{u}_1|^4\cos^4\theta_u + |\tilde{u}_2|^4\sin^4\theta_u\\
& - 2(\tilde{u}_1\tilde{u}^*_2 + \tilde{u}^*_1\tilde{u}_2)\left(|\tilde{u}_1|^2\cos^3\theta_u\sin\theta_u + |\tilde{u}_2|^2\cos\theta_u\sin^3\theta_u\right)\\
& + 4|\tilde{u}_1|^2|\tilde{u}_2|^2\cos^2\theta_u\sin^2\theta_u + (\tilde{u}_1^2\tilde{u}_2^{*\,2} + \tilde{u}_1^{*\,2}\tilde{u}_2^2)\cos^2\theta_u\sin^2\theta_u
\end{aligned} \tag{7.397}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{u}_R^*\tilde{u}_R)^2 = {} & |\tilde{u}_1|^4\sin^4\theta_u + |\tilde{u}_2|^4\cos^4\theta_u \\ & + 2(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^* + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2)\left(|\tilde{u}_1|^2\sin^3\theta_u\cos\theta_u + |\tilde{u}_2|^2\sin\theta_u\cos^3\theta_u\right) \\ & + 4|\tilde{u}_1|^2|\tilde{u}_2|^2\cos^2\theta_u\sin^2\theta_u + (\tilde{u}_1^2\tilde{u}_2^{*\,2} + \tilde{u}_1^{*\,2}\tilde{u}_2^2)\cos^2\theta_u\sin^2\theta_u\end{aligned} \tag{7.398}$$

$$\begin{aligned}|\tilde{u}_L^*\tilde{u}_R|^2 = {} & c_u^2 s_u^2|\tilde{u}_1|^4 + c_u^2 s_u^2|\tilde{u}_2|^4 \\ & + \left(c_u^3 s_u - c_u s_u^3\right)(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^* + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2)\left(|\tilde{u}_1|^2 - |\tilde{u}_2|^2\right) \\ & + \left(c_u^2 - s_u^2\right)|\tilde{u}_1|^2|\tilde{u}_2|^2 - c_u^2 s_u^2\left(\tilde{u}_1^2\tilde{u}_2^{*\,2} + \tilde{u}_1^{*\,2}\tilde{u}_2^2\right)\end{aligned} \tag{7.399}$$

$$\begin{aligned}|\tilde{u}_L^*\tilde{d}_L|^2 = {} & c_d^2 c_u^2|\tilde{d}_1|^2|\tilde{u}_1|^2 + c_d^2 s_u^2|\tilde{d}_1|^2|\tilde{u}_2|^2 + s_d^2 c_u^2|\tilde{d}_2|^2|\tilde{u}_1|^2 + s_d^2 s_u^2|\tilde{d}_2|^2|\tilde{u}_2|^2 \\ & - \left(c_d s_d c_u^2|\tilde{u}_1|^2 + c_d s_d s_u^2|\tilde{u}_2|^2\right)\left(\tilde{d}_1\tilde{d}_2^* + \tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\right) \\ & - \left(c_u s_u c_d^2|\tilde{d}_1|^2 + c_u s_u s_d^2|\tilde{d}_2|^2\right)(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^* + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2) \\ & + c_d s_d c_u s_u\left(\tilde{d}_1\tilde{d}_2^*\tilde{u}_1^*\tilde{u}_2 + \tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\tilde{u}_1\tilde{u}_2^*\right) \\ & + c_d s_d c_u s_u\left(\tilde{d}_1\tilde{d}_2^*\tilde{u}_1\tilde{u}_2^* + \tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\right)\end{aligned} \tag{7.400}$$

$$\begin{aligned}|\tilde{u}_R^*\tilde{d}_R|^2 = {} & s_d^2 s_u^2|\tilde{d}_1|^2|\tilde{u}_1|^2 + s_d^2 c_u^2|\tilde{d}_1|^2|\tilde{u}_2|^2 + c_d^2 s_u^2|\tilde{d}_2|^2|\tilde{u}_1|^2 + c_d^2 c_u^2|\tilde{d}_2|^2|\tilde{u}_2|^2 \\ & + \left(c_d s_d c_u^2|\tilde{u}_2|^2 + c_d s_d s_u^2|\tilde{u}_1|^2\right)\left(\tilde{d}_1\tilde{d}_2^* + \tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\right) \\ & + \left(c_u s_u c_d^2|\tilde{d}_2|^2 + c_u s_u s_d^2|\tilde{d}_1|^2\right)(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^* + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2) \\ & + c_d s_d c_u s_u\left(\tilde{d}_1\tilde{d}_2^*\tilde{u}_1^*\tilde{u}_2 + \tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\tilde{u}_1\tilde{u}_2^*\right) \\ & + c_d s_d c_u s_u\left(\tilde{d}_1\tilde{d}_2^*\tilde{u}_1\tilde{u}_2^* + \tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\right)\end{aligned} \tag{7.401}$$

$$\begin{aligned}|\tilde{u}_L^*\tilde{d}_R|^2 = {} & s_d^2 c_u^2|\tilde{d}_1|^2|\tilde{u}_1|^2 + s_d^2 s_u^2|\tilde{d}_1|^2|\tilde{u}_2|^2 + c_d^2 c_u^2|\tilde{d}_2|^2|\tilde{u}_1|^2 + c_d^2 s_u^2|\tilde{d}_2|^2|\tilde{u}_2|^2 \\ & + \left(c_d s_d c_u^2|\tilde{u}_1|^2 + c_d s_d s_u^2|\tilde{u}_2|^2\right)\left(\tilde{d}_1\tilde{d}_2^* + \tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\right) \\ & - \left(c_u s_u c_d^2|\tilde{d}_2|^2 + c_u s_u s_d^2|\tilde{d}_1|^2\right)(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^* + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2) \\ & - c_d s_d c_u s_u\left(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^*\tilde{d}_1\tilde{d}_2^* + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\right) \\ & - c_d s_d c_u s_u\left(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^*\tilde{d}_1^*\tilde{d}_2 + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\tilde{d}_1\tilde{d}_2^*\right)\end{aligned} \tag{7.402}$$

$$|\tilde{u}_R^*\tilde{d}_L|^2 = s_u^2 c_d^2|\tilde{d}_1|^2|\tilde{u}_1|^2 + s_d^2 s_u^2|\tilde{u}_1|^2|\tilde{d}_2|^2 + c_d^2 c_u^2|\tilde{u}_2|^2|\tilde{d}_1|^2 + c_u^2 s_d^2|\tilde{d}_2|^2|\tilde{u}_2|^2$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(c_u s_u c_d^2|\tilde{d}_1|^2 + c_u s_u s_d^2|\tilde{d}_2|^2\right)\left(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^* + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\right)\\
&-\left(c_d s_d c_u^2|\tilde{u}_2|^2 + c_d s_d s_u^2|\tilde{u}_1|^2\right)\left(\tilde{d}_1\tilde{d}_2^* + \tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\right)\\
&-c_d s_d c_u s_u\left(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^*\tilde{d}_1\tilde{d}_2^* + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\right)\\
&-c_d s_d c_u s_u\left(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^*\tilde{d}_1^*\tilde{d}_2 + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\tilde{d}_1\tilde{d}_2^*\right) \qquad (7.403)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\tilde{u}_L|^2|\tilde{d}_L|^2 = {} & c_u^2 c_d^2|\tilde{d}_1|^2|\tilde{u}_1|^2 + s_d^2 c_u^2|\tilde{u}_1|^2|\tilde{d}_2|^2 + c_d^2 s_u^2|\tilde{u}_2|^2|\tilde{d}_1|^2 + s_u^2 s_d^2|\tilde{d}_2|^2|\tilde{u}_2|^2\\
&-\left(c_u s_u c_d^2|\tilde{d}_1|^2 + c_u s_u s_d^2|\tilde{d}_2|^2\right)\left(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^* + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\right)\\
&-\left(c_d s_d c_u^2|\tilde{u}_1|^2 + c_d s_d s_u^2|\tilde{u}_2|^2\right)\left(\tilde{d}_1\tilde{d}_2^* + \tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\right)\\
&+c_d s_d c_u s_u\left(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^*\tilde{d}_1\tilde{d}_2^* + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\right)\\
&+c_d s_d c_u s_u\left(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^*\tilde{d}_1^*\tilde{d}_2 + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\tilde{d}_1\tilde{d}_2^*\right) \qquad (7.404)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\tilde{u}_R|^2|\tilde{d}_R|^2 = {} & s_u^2 s_d^2|\tilde{d}_1|^2|\tilde{u}_1|^2 + c_d^2 s_u^2|\tilde{u}_1|^2|\tilde{d}_2|^2 + s_d^2 c_u^2|\tilde{u}_2|^2|\tilde{d}_1|^2 + c_u^2 c_d^2|\tilde{d}_2|^2|\tilde{u}_2|^2\\
&+\left(c_u s_u c_d^2|\tilde{d}_2|^2 + c_u s_u s_d^2|\tilde{d}_1|^2\right)\left(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^* + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\right)\\
&+\left(c_d s_d c_u^2|\tilde{u}_2|^2 + c_d s_d s_u^2|\tilde{u}_1|^2\right)\left(\tilde{d}_1\tilde{d}_2^* + \tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\right)\\
&+c_d s_d c_u s_u\left(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^*\tilde{d}_1\tilde{d}_2^* + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\right)\\
&+c_d s_d c_u s_u\left(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^*\tilde{d}_1^*\tilde{d}_2 + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\tilde{d}_1\tilde{d}_2^*\right) \qquad (7.405)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\tilde{u}_L|^2|\tilde{d}_R|^2 = {} & c_u^2 s_d^2|\tilde{d}_1|^2|\tilde{u}_1|^2 + c_d^2 c_u^2|\tilde{u}_1|^2|\tilde{d}_2|^2 + s_d^2 s_u^2|\tilde{u}_2|^2|\tilde{d}_1|^2 + s_u^2 c_d^2|\tilde{d}_2|^2|\tilde{u}_2|^2\\
&-\left(c_u s_u c_d^2|\tilde{d}_2|^2 + c_u s_u s_d^2|\tilde{d}_1|^2\right)\left(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^* + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\right)\\
&+\left(c_d s_d c_u^2|\tilde{u}_1|^2 + c_d s_d s_u^2|\tilde{u}_2|^2\right)\left(\tilde{d}_1\tilde{d}_2^* + \tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\right)\\
&-c_d s_d c_u s_u\left(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^*\tilde{d}_1\tilde{d}_2^* + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\tilde{d}_1^*\tilde{d}_2\right)\\
&-c_d s_d c_u s_u\left(\tilde{u}_1\tilde{u}_2^*\tilde{d}_1^*\tilde{d}_2 + \tilde{u}_1^*\tilde{u}_2\tilde{d}_1\tilde{d}_2^*\right) \qquad (7.406)
\end{aligned}
$$

7.6 Eichkopplungen der Sfermionen

Die Kopplungen der Squarks, Sleptonen und Sneutrinos an die Eichbosonen der Eichgruppe $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ resultieren aus den Termen mit den kovarianten Ableitungen, d.h.

$$\sum_{i=1}^{3}(D_\mu Q)_i^\dagger(D^\mu Q)_i + \sum_{i=1}^{3}(D_\mu L)_i^\dagger(D^\mu L)_i + \sum_{i=1}^{3}(D_\mu \bar{U})_i^\dagger(D^\mu \bar{U})_i$$
$$+ \sum_{i=1}^{3}(D_\mu \bar{D})_i^\dagger(D^\mu \bar{D})_i + \sum_{i=1}^{3}(D_\mu \bar{E})_i^\dagger(D^\mu \bar{E})_i \tag{7.407}$$

Wir benötigen die eichkovariante Ableitung:

$$D_\mu = \begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} - \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} - \mathrm{i}\frac{g}{\cos\theta_W}Z_\mu^0\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$+ \mathrm{i}\frac{g\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}Z_\mu^0 Q_{el.} - \mathrm{i}eA_\mu Q_{el.} - \mathrm{i}g_s\sum_{i=1}^{8}G_\mu^c\frac{\lambda^c}{2} \tag{7.408}$$

Natürlich koppeln die Sleptonen und die Sneutrinos nicht an die Gluonen, während die rechtshändigen skalaren Felder nicht an den schwachen Isospin koppeln.

7.6.1 Eichkopplungen der Squarks

Betrachten wir auch hier wieder zuerst die Squarks, deren Kopplungen wiederum die größte Komplexität aufweisen. Wiederum ist zu beachten, daß in Termen, die sowohl up-Squarks als auch down-Squarks enthalten, die CKM-Mischungsmatrix einzusetzen ist. Die obere Komponente der eichkovarianten Ableitung, angewandt auf das Dublett der linkshändigen up-Squarks ist:

$$(\mathrm{D}_\mu Q)_{\tilde{u}_{L,k,i}} = \partial_\mu \tilde{u}_{L,k,i} - \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+ V_{kl}^{CKM}\tilde{d}_{L,l,i} - \mathrm{i}eA_\mu Q_{el.}\tilde{u}_{L,k,i}$$
$$- \mathrm{i}\frac{g}{2\cos\theta_W}\left(1 - 2\sin^2\theta_W Q_{el.}\right)Z_\mu^0\tilde{u}_{L,k,i} - \mathrm{i}\frac{g_s}{2}G_\mu^c(\lambda^c)_{ij}\tilde{u}_{L,k,j} \tag{7.409}$$

In diesem Ausdruck sind k und l Generationenindizes, während i und j Farbindizes sind. Die untere Komponente dagegen wird:

$$(\mathrm{D}_\mu Q)_{\tilde{d}_{L,k,i}} = V_{kl}^{CKM}\partial_\mu \tilde{d}_{L,l,i} - \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^- \tilde{u}_{L,k,i} - \mathrm{i}eA_\mu Q_{el.}V_{kl}^{CKM}\tilde{d}_{L,l,i}$$
$$+ \mathrm{i}\frac{g}{2\cos\theta_W}\left(1 + 2\sin^2\theta_W Q_{el.}\right)Z_\mu^0 V_{kl}^{CKM}\tilde{d}_{L,l,i}$$
$$- \mathrm{i}\frac{g_s}{2}G_\mu^c(\lambda^c)_{ij}V_{kl}^{CKM}\tilde{d}_{L,l,j} \tag{7.410}$$

Der Anteil von den rechtshändigen Feldkomponenten ist:

$$\mathrm{D}_\mu \tilde{u}_{R,k,i} = \partial_\mu \tilde{u}_{R,k,i} - \mathrm{i}eQ_{el.}A_\mu \tilde{u}_{R,k,i} + \mathrm{i}g' \sin\theta_W Q_{el.} Z^0_\mu \tilde{u}_{R,k,i} - \mathrm{i}\frac{g_s}{2} G^c_\mu (\lambda^c)_{ij} \tilde{u}_{R,k,j} \tag{7.411}$$

$$\mathrm{D}_\mu \tilde{d}_{R,k,i} = \partial_\mu \tilde{d}_{R,k,i} - \mathrm{i}eQ_{el.}A_\mu \tilde{d}_{R,k,i} + \mathrm{i}g' \sin\theta_W Q_{el.} Z^0_\mu \tilde{d}_{R,k,i} - \mathrm{i}\frac{g_s}{2} G^c_\mu (\lambda^c)_{ij} \tilde{d}_{R,k,j} \tag{7.412}$$

Die Betragsquadrate dieser Ausdrücke sind, worin eine Summation über den Generationenindex k zu verstehen ist,

$$
\begin{aligned}
&|(\mathrm{D}_\mu Q)_{\tilde{u}_{L,k,i}}|^2 = \\
&\quad \partial_\mu \tilde{u}^*_{L,k,i} \partial^\mu \tilde{u}_{L,k,i} - \mathrm{i}eA_\mu Q_{el.} \left(\tilde{u}_{L,k,i} \partial^\mu \tilde{u}^*_{L,k,i} - \tilde{u}^*_{L,k,i} \partial^\mu \tilde{u}_{L,k,i} \right) \\
&\quad - \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}} \left(W^+_\mu V^{CKM}_{kl} \tilde{d}_{L,l,i} \partial^\mu \tilde{u}^*_{L,k,i} - W^-_\mu V^{CKM\,*}_{kl} \tilde{d}^*_{L,l,i} \partial^\mu \tilde{u}_{L,k,i} \right) \\
&\quad - \mathrm{i}\frac{g}{2\cos\theta_W} \left(1 - 2\sin^2\theta_W Q_{el.}\right) Z^0_\mu \left(\tilde{u}_{L,k,i} \partial^\mu \tilde{u}^*_{L,k,i} - \tilde{u}^*_{L,k,i} \partial^\mu \tilde{u}_{L,k,i} \right) \\
&\quad - \mathrm{i}\frac{g_s}{2} G^c_\mu (\lambda^c)_{ij} \left(\tilde{u}_{L,k,j} \partial^\mu \tilde{u}^*_{L,k,i} - \tilde{u}^*_{L,k,i} \partial^\mu \tilde{u}^*_{L,k,i} \right) + \frac{g^2}{2} (W^+_\mu W^{-\,\mu}) |\tilde{d}_{L,k,i}|^2 \\
&\quad + \frac{eg}{\sqrt{2}} A_\mu Q_{el.,u} \left(\tilde{u}_{L,k,i} W^{-\,\mu} V^{CKM\,*}_{kl} \tilde{d}^*_{L,l,i} + \tilde{u}^*_{L,k,i} W^{+\,\mu} V^{CKM}_{kl} \tilde{d}_{L,l,i} \right) \\
&\quad + \frac{g^2}{2\sqrt{2}\cos\theta_W} \left(1 - 2\sin^2\theta_W Q_{el.,u}\right) Z^0_\mu \Big(\tilde{u}_{L,k,i} W^{-\,\mu} V^{CKM\,*}_{kl} \tilde{d}^*_{L,l,i} \\
&\qquad\qquad\qquad + \tilde{u}^*_{L,k,i} W^{+\,\mu} V^{CKM}_{kl} \tilde{d}_{L,l,i} \Big) \\
&\quad + \frac{gg_s}{2\sqrt{2}} G^c_\mu (\lambda^c)_{ij} \left(\tilde{u}_{L,k,j} W^{-\,\mu} V^{CKM\,*}_{kl} \tilde{d}^*_{L,l,i} + \tilde{u}^*_{L,k,j} W^{+\,\mu} V^{CKM}_{kl} \tilde{d}_{L,l,i} \right) \\
&\quad + e^2 Q^2_{el.} (A_\mu A^\mu) |\tilde{u}_{L,k,i}|^2 + \frac{eg}{\cos\theta_W} Q_{el.} \left(1 - 2\sin^2\theta_W Q_{el.}\right) (Z^0_\mu A^\mu) |\tilde{u}_{L,k,i}|^2 \\
&\quad + eg_s Q_{el.} (G^c_\mu A^\mu) \tilde{u}^*_{L,k,i} (\lambda^c)_{ij} \tilde{u}_{L,k,j} \\
&\quad + \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W} \left(1 - 2\sin^2\theta_W Q_{el.}\right)^2 (Z^0_\mu Z^{0\,\mu}) |\tilde{u}_{L,k,i}|^2 \\
&\quad + \frac{gg_s}{2\cos\theta_W} \left(1 - 2\sin^2\theta_W Q_{el.}\right) (Z^0_\mu G^{c\,\mu}) \tilde{u}^*_{L,k,i} (\lambda^c)_{ij} \tilde{u}_{L,k,j} \\
&\quad + \frac{g_s^2}{4} (G^c_\mu G^{d\,\mu}) (\lambda^d \lambda^c)_{ij} \tilde{u}^*_{L,k,i} \tilde{u}_{L,k,j},
\end{aligned} \tag{7.413}
$$

die untere Komponente ergibt

$$|(\mathrm{D}_\mu Q)_{\tilde{d}_{L,k,i}}|^2 =$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu \tilde{d}^*_{L,k,i}\partial^\mu \tilde{d}_{L,k,i} - \mathrm{i}eA_\mu Q_{el.}\left(\tilde{d}_{L,k,i}\partial^\mu \tilde{d}^*_{L,k,i} - \tilde{d}^*_{L,k,i}\partial^\mu \tilde{d}_{L,k,i}\right)\\
&+ \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}\left(W^+_\mu V^{CKM}_{kl}\tilde{u}^*_{L,k,i}\partial^\mu \tilde{d}_{L,l,i} - W^-_\mu V^{CKM\,*}_{kl}\tilde{u}_{L,k,i}\partial^\mu \tilde{d}^*_{L,l,i}\right)\\
&+ \mathrm{i}\frac{g}{2\cos\theta_W}\left(1+2\sin^2\theta_W Q_{el.}\right)Z^0_\mu\left(\tilde{d}_{L,k,i}\partial^\mu \tilde{d}^*_{L,k,i} - \tilde{d}^*_{L,k,i}\partial^\mu \tilde{d}_{L,k,i}\right)\\
&- \mathrm{i}\frac{g_s}{2}G^c_\mu(\lambda^c)_{ij}\left(\tilde{d}_{L,k,j}\partial^\mu \tilde{d}^*_{L,k,i} - \tilde{d}^*_{L,k,i}\partial^\mu \tilde{d}^*_{L,k,i}\right) + \frac{g^2}{2}(W^+_\mu W^{-\,\mu})|\tilde{u}_{L,k,i}|^2\\
&+ \frac{eg}{\sqrt{2}}A_\mu Q_{el.,d}\left(\tilde{u}_{L,k,i}W^{-\,\mu}V^{CKM\,*}_{kl}\tilde{d}^*_{L,l,i} + \tilde{u}^*_{L,k,i}W^{+\,\mu}V^{CKM}_{kl}\tilde{d}_{L,l,i}\right)\\
&- \frac{g^2}{2\sqrt{2}\cos\theta_W}\left(1+2\sin^2\theta_W Q_{el.,d}\right)Z^0_\mu\Big(\tilde{u}_{L,k,i}W^{-\,\mu}V^{CKM\,*}_{kl}\tilde{d}^*_{L,l,i}\\
&\qquad\qquad\qquad + \tilde{u}^*_{L,k,i}W^{+\,\mu}V^{CKM}_{kl}\tilde{d}_{L,l,i}\Big)\\
&+ \frac{gg_s}{2\sqrt{2}}G^c_\mu(\lambda^c)_{ij}\left(\tilde{u}_{L,k,j}W^{-\,\mu}V^{CKM\,*}_{kl}\tilde{d}^*_{L,l,i} + \tilde{u}^*_{L,k,j}W^{+\,\mu}V^{CKM}_{kl}\tilde{d}_{L,l,i}\right)\\
&+ e^2Q^2_{el.}(A_\mu A^\mu)|\tilde{d}_{L,k,i}|^2 - \frac{eg}{\cos\theta_W}Q_{el.}\left(1+2\sin^2\theta_W Q_{el.}\right)(Z^0_\mu A^\mu)|\tilde{d}_{L,k,i}|^2\\
&+ eg_sQ_{el.}(G^c_\mu A^\mu)\tilde{d}^*_{L,k,i}(\lambda^c)_{ij}\tilde{d}_{L,k,j}\\
&+ \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}\left(1+2\sin^2\theta_W Q_{el.}\right)^2(Z^0_\mu Z^{0\,\mu})|\tilde{d}_{L,k,i}|^2\\
&- \frac{gg_s}{2\cos\theta_W}\left(1+2\sin^2\theta_W Q_{el.}\right)(Z^0_\mu G^{c\,\mu})\tilde{d}^*_{L,k,i}(\lambda^c)_{ij}\tilde{d}_{L,k,j}\\
&+ \frac{g_s^2}{4}(G^c_\mu G^{d\,\mu})(\lambda^d\lambda^c)_{ij}\tilde{d}^*_{L,k,i}\tilde{d}_{L,k,j},
\end{aligned}
\tag{7.414}
$$

die rechtshändigen Felder ergeben

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{D}_\mu\tilde{u}_{R,k,i}|^2 = {}& \partial_\mu\tilde{u}^*_{R,k,i}\partial^\mu\tilde{u}_{R,k,i} - \mathrm{i}eQ_{el.}A^\mu\left(\tilde{u}_{R,k,i}\partial_\mu\tilde{u}^*_{R,k,i} - \tilde{u}^*_{R,k,i}\partial_\mu\tilde{u}_{R,k,i}\right)\\
&+ \mathrm{i}g\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}Q_{el.}Z^{0\,\mu}\left(\tilde{u}_{R,k,i}\partial_\mu\tilde{u}^*_{R,k,i} - \tilde{u}^*_{R,k,i}\partial_\mu\tilde{u}_{R,k,i}\right)\\
&- \mathrm{i}\frac{g_s}{2}G^c_\mu(\lambda^c)_{ij}\left(\tilde{u}_{R,k,j}\partial_\mu\tilde{u}^*_{R,k,i} - \tilde{u}^*_{R,k,i}\partial_\mu\tilde{u}_{R,k,j}\right)\\
&+ e^2Q^2_{el.}(A_\mu A^\mu)|\tilde{u}_{R,k,i}|^2 - 2eg\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}Q^2_{el.}(Z^0_\mu A^\mu)|\tilde{u}_{R,k,i}|^2\\
&+ eg_sQ_{el.}(G^c_\mu A^\mu)(\lambda^c)_{ij}\tilde{u}^*_{R,k,i}\tilde{u}_{R,k,j} + g^2\frac{\sin^4\theta_W}{\cos^2\theta_W}Q^2_{el.}(Z^0_\mu Z^{0\,\mu})|\tilde{u}_{R,k,i}|^2\\
&- gg_s\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}Q_{el.}(Z^0_\mu G^{c\,\mu})(\lambda^c)_{ij}\tilde{u}^*_{R,k,i}\tilde{u}_{R,k,j}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{g_s^2}{4}(G_\mu^c G^{d\,\mu})(\lambda^d\lambda^c)_{ij}\tilde{u}^*_{R,k,i}\tilde{u}_{R,k,j} \tag{7.415}$$

und

$$\begin{aligned}
|\mathrm{D}_\mu \tilde{d}_{R,k,i}|^2 &= \partial_\mu \tilde{d}^*_{R,k,i}\partial^\mu \tilde{d}_{R,k,i} - \mathrm{i}eQ_{el.}A^\mu\left(\tilde{d}_{R,k,i}\partial_\mu \tilde{d}^*_{R,k,i} - \tilde{d}^*_{R,k,i}\partial_\mu \tilde{d}_{R,k,i}\right)\\
&+ \mathrm{i}g\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}Q_{el.}Z^{0\,\mu}\left(\tilde{d}_{R,k,i}\partial_\mu \tilde{d}^*_{R,k,i} - \tilde{d}^*_{R,k,i}\partial_\mu \tilde{d}_{R,k,i}\right)\\
&- \mathrm{i}\frac{g_s}{2}G_\mu^c(\lambda^c)_{ij}\left(\tilde{d}_{R,k,j}\partial_\mu \tilde{d}^*_{R,k,i} - \tilde{d}^*_{R,k,i}\partial_\mu \tilde{d}_{R,k,j}\right)\\
&+ e^2Q_{el.}^2(A_\mu A^\mu)|\tilde{d}_{R,k,i}|^2 - 2eg\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}Q_{el.}^2(Z_\mu^0 A^\mu)|\tilde{d}_{R,k,i}|^2\\
&+ eg_sQ_{el.}(G_\mu^c A^\mu)(\lambda^c)_{ij}\tilde{d}^*_{R,k,i}\tilde{d}_{R,k,j} + g^2\frac{\sin^4\theta_W}{\cos^2\theta_W}Q_{el.}^2(Z_\mu^0 Z^{0\,\mu})|\tilde{d}_{R,k,i}|^2\\
&- gg_s\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}Q_{el.}(Z_\mu^0 G^{c\,\mu})(\lambda^c)_{ij}\tilde{d}^*_{R,k,i}\tilde{d}_{R,k,j}\\
&+ \frac{g_s^2}{4}(G_\mu^c G^{d\,\mu})(\lambda^d\lambda^c)_{ij}\tilde{d}^*_{R,k,i}\tilde{d}_{R,k,j}.
\end{aligned} \tag{7.416}$$

Bei diesen Rechnungen wurde die Hermitezität der Gell-Mann-Matrizen benutzt (s. Anhang), sowie folgende Rechnung für die Kopplung der Z^0-Bosonen:

$$\begin{aligned}
g'\sin\theta_W &= \frac{g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}} = \sqrt{g^2+g'^2} - \frac{g^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}\\
&= \sqrt{g^2+g'^2}\sin^2\theta_W = g\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}.
\end{aligned} \tag{7.417}$$

Aus den vier Beiträgen (7.413) - (7.416) kann man jetzt die kinetischen Squark-Terme und die Kopplungen an die Eichbosonen herausziehen. Die kinetischen Terme sind klar,

$$\partial_\mu \tilde{u}_1\partial^\mu \tilde{u}_1^* + \partial_\mu \tilde{u}_2\partial^\mu \tilde{u}_2^* + \partial_\mu \tilde{d}_1\partial^\mu \tilde{d}_1^* + \partial_\mu \tilde{d}_2\partial^\mu \tilde{d}_2^*, \tag{7.418}$$

summiert über alle Generationen und alle Farben. Die Kopplung an das elektromagnetische Eichfeld erfogt über die zwei Vertizes

$$\begin{aligned}
&- \mathrm{i}eA_\mu Q_{el.}\left(\tilde{u}_1\partial^\mu \tilde{u}_1^* - \tilde{u}_1^*\partial^\mu \tilde{u}_1\right) - \mathrm{i}eA_\mu Q_{el.}\left(\tilde{u}_2\partial^\mu \tilde{u}_2^* - \tilde{u}_2^*\partial^\mu \tilde{u}_2\right)\\
&- \mathrm{i}eA_\mu Q_{el.}\left(\tilde{d}_1\partial^\mu \tilde{d}_1^* - \tilde{d}_1^*\partial^\mu \tilde{d}_1\right) - \mathrm{i}eA_\mu Q_{el.}\left(\tilde{d}_2\partial^\mu \tilde{d}_2^* - \tilde{d}_2^*\partial^\mu \tilde{d}_2\right)
\end{aligned} \tag{7.419}$$

und

$$e^2Q_{el.}^2(A_\mu A^\mu)|\tilde{u}_1|^2 + e^2Q_{el.}^2(A_\mu A^\mu)|\tilde{u}_2|^2$$

$$+ e^2 Q_{el.}^2 (A_\mu A^\mu)|\tilde{d}_1|^2 + e^2 Q_{el.}^2 (A_\mu A^\mu)|\tilde{d}_2|^2 \tag{7.420}$$

Diese Ausdrücke sind natürlich diagonal in den Generationen und den Farben. Die Z-Kopplungen unterscheiden sich davon: Die Kopplung an die rechtshändigen Squark-Felder kommt nur durch die Weinberg-Drehung der $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$- Eichgruppe zustande. Man hat dann für $q \equiv u, d$

$$\begin{aligned}
& - \mathrm{i}\frac{g}{\cos\theta_W}\left(T_3 - \sin^2\theta_W Q_{el.}\right) Z_\mu^0 \left(\tilde{q}_L \partial^\mu \tilde{q}_L^* - \tilde{q}_L^* \partial^\mu \tilde{q}_L\right) \\
& + \mathrm{i}g\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W} Q_{el.} Z_\mu^0 \left(\tilde{q}_R \partial^\mu \tilde{q}_R^* - \tilde{q}_R^* \partial^\mu \tilde{q}_R\right) \\
= & - \mathrm{i}\frac{g}{\cos\theta_W}\left(\cos^2\theta_q T_3 - \sin^2\theta_W Q_{el.}\right) Z_\mu^0 \left(\tilde{q}_1 \partial^\mu \tilde{q}_1^* - \tilde{q}_1^* \partial^\mu \tilde{q}_1\right) \\
& - \mathrm{i}\frac{g}{\cos\theta_W}\left(\sin^2\theta_q T_3 - \sin^2\theta_W Q_{el.}\right) Z_\mu^0 \left(\tilde{q}_2 \partial^\mu \tilde{q}_2^* - \tilde{q}_2^* \partial^\mu \tilde{q}_2\right) \\
& + \left[\mathrm{i}\frac{g}{\cos\theta_W} \sin\theta_q \cos\theta_q T_3 Z_\mu^0 \left(\tilde{q}_1 \partial^\mu \tilde{q}_2^* - \tilde{q}_2^* \partial^\mu \tilde{q}_1\right) + \text{h.c.}\right]
\end{aligned} \tag{7.421}$$

Auch bei den Kopplungen an zwei Z-Bosonen hat man die unterschiedlichen Kopplungen an die rechts- und linkshändigen Komponenten zu berücksichtigen.

$$\begin{aligned}
& \frac{g^2}{\cos^2\theta_W}\left(T_3 - \sin^2\theta_W Q_{el.}\right)^2 (Z_\mu^0 Z^{0\,\mu})|\tilde{q}_L|^2 + \frac{g^2\sin^4\theta_W}{\cos^2\theta_W} Q_{el.}^2 (Z_\mu^0 Z^{0\,\mu})|\tilde{q}_R|^2 \\
= & \frac{g^2}{\cos^2\theta_W}\left[\left(T_3^2 - 2\sin^2\theta_W T_3 Q_{el.}\right)\cos^2\theta_q + \sin^4\theta_W Q_{el.}^2\right] (Z_\mu^0 Z^{0\,\mu})|\tilde{q}_1|^2 \\
& + \frac{g^2}{\cos^2\theta_W}\left[\left(T_3^2 - 2\sin^2\theta_W T_3 Q_{el.}\right)\sin^2\theta_q + \sin^4\theta_W Q_{el.}^2\right] (Z_\mu^0 Z^{0\,\mu})|\tilde{q}_2|^2 \\
& - \frac{g^2}{\cos^2\theta_W}\left(T_3^2 - 2\sin^2\theta_W T_3 Q_{el.}\right)\sin\theta_q\cos\theta_q (Z_\mu^0 Z^{0\,\mu})\left(\tilde{q}_1\tilde{q}_2^* + \tilde{q}_1^*\tilde{q}_2\right)
\end{aligned} \tag{7.422}$$

Entsprechend verfährt man mit den $Z\gamma$-Kopplungen:

$$\begin{aligned}
& \frac{2eg}{\cos\theta_W} Q_{el.}\left(T_3 - \sin^2\theta_W Q_{el.}\right)(Z_\mu^0 A^\mu)|\tilde{q}_L|^2 - \frac{2eg\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W} Q_{el.} (Z_\mu^0 A^\mu)|\tilde{q}_R|^2 \\
= & \frac{2eg}{\cos\theta_W} Q_{el.}\left(\cos^2\theta_q T_3 - \sin^2\theta_W Q_{el.}\right)(Z_\mu^0 A^\mu)|\tilde{q}_1|^2 \\
& + \frac{2eg}{\cos\theta_W} Q_{el.}\left(\sin^2\theta_q T_3 - \sin^2\theta_W Q_{el.}\right)(Z_\mu^0 A^\mu)|\tilde{q}_2|^2 \\
& - \frac{2eg}{\cos\theta_W} T_3 Q_{el.} \sin\theta_q\cos\theta_q (Z_\mu^0 A^\mu)\left(\tilde{q}_1\tilde{q}_2^* + \tilde{q}_1^*\tilde{q}_2\right)
\end{aligned} \tag{7.423}$$

Etwas komplizierter gestalten sich die Wechselwirkungen der W-Bosonen, weil jetzt Flavouränderungen stattfinden - vermittelt durch die CKM-Matrix - und damit verbunden unterschiedliche Mischungswinkel der Squarks auftreten. Außerdem liegt natürlich nur eine Kopplung an die linkshändigen Squarkkomponenten vor.

$$\begin{aligned}
&- \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ V_{kl}^{CKM} \left(\tilde{d}_{L,l} \partial^\mu \tilde{u}_{L,k}^* - \tilde{u}_{L,k}^* \partial^\mu \tilde{d}_{L,l} \right) + \text{h.c.} \\
= \; &- \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ V_{kl}^{CKM} \cdot \\
&\qquad \Big[\left(\tilde{d}_{1,l} \partial^\mu \tilde{u}_{1,k}^* - \tilde{u}_{1,k}^* \partial^\mu \tilde{d}_{1,l} \right) \cos\theta_{u_k} \cos\theta_{d,l} \\
&\qquad - \left(\tilde{d}_{2,l} \partial^\mu \tilde{u}_{1,k}^* - \tilde{u}_{1,k}^* \partial^\mu \tilde{d}_{2,l} \right) \cos\theta_{u_k} \sin\theta_{d,l} \\
&\qquad - \left(\tilde{d}_{1,l} \partial^\mu \tilde{u}_{2,k}^* - \tilde{u}_{2,k}^* \partial^\mu \tilde{d}_{1,l} \right) \sin\theta_{u_k} \cos\theta_{d,l} \\
&\qquad + \left(\tilde{d}_{2,l} \partial^\mu \tilde{u}_{2,k}^* - \tilde{u}_{2,k}^* \partial^\mu \tilde{d}_{2,l} \right) \sin\theta_{u_k} \sin\theta_{d,l} \Big] + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{7.424}$$

Die Kopplung an zwei W-Bosonen ist wieder einfacher:

$$\begin{aligned}
\frac{g^2}{2} (W_\mu^+ W^{\mu -}) |\tilde{q}_L|^2 = \; & \frac{g^2}{2} (W_\mu^+ W^{\mu -}) \cos^2\theta_q |\tilde{q}_1|^2 \\
&+ \frac{g^2}{2} (W_\mu^+ W^{\mu -}) \sin^2\theta_q |\tilde{q}_2|^2 \\
&- \frac{g^2}{2} (W_\mu^+ W^{\mu -}) \cos\theta_q \sin\theta_q \left(\tilde{q}_1 \tilde{q}_2^* + \tilde{q}_1^* \tilde{q}_2 \right)
\end{aligned} \tag{7.425}$$

Auch die Terme der Gestalt $W\gamma$ und WZ erhalten nur Beiträge von den linkshändigen Squarkkomponenten.

$$\begin{aligned}
&\frac{eg}{\sqrt{2}} \left(Q_{el.,u} + Q_{el.,d} \right) (A_\mu W^{+\mu}) V_{kl}^{CKM} \tilde{u}_{L,k}^* \tilde{d}_{L,l} + \text{h.c.} \\
= \; &\frac{eg}{\sqrt{2}} \left(Q_{el.,u} + Q_{el.,d} \right) (A_\mu W^{+\mu}) V_{kl}^{CKM} \cdot \\
&\qquad \Big[\cos\theta_{u_k} \cos\theta_{d,l} \tilde{u}_{1,k}^* \tilde{d}_{1,l} - \cos\theta_{u_k} \sin\theta_{d,l} \tilde{u}_{1,k}^* \tilde{d}_{2,l} \\
&\qquad - \sin\theta_{u_k} \cos\theta_{d,l} \tilde{u}_{2,k}^* \tilde{d}_{1,l} + \sin\theta_{u_k} \sin\theta_{d,l} \tilde{u}_{2,k}^* \tilde{d}_{2,l} \Big] + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{7.426}$$

$$- \frac{g^2}{\sqrt{2} \cos\theta_W} \sin^2\theta_W \left(Q_{el.,u} + Q_{el.,d} \right) (Z_\mu^0 W^{+\mu}) V_{kl}^{CKM} \tilde{u}_{L,k}^* \tilde{d}_{L,l} + \text{h.c.}$$

$$
\begin{aligned}
= &- \frac{g^2}{\sqrt{2}\cos\theta_W}\sin^2\theta_W\,(Q_{el.,u}+Q_{el.,d})\,(Z^0_\mu W^{+\mu})V^{CKM}_{kl}\cdot \\
&\qquad \Big[\cos\theta_{u_k}\cos\theta_{d,l}\tilde{u}^*_{1,k}\tilde{d}_{1,l} - \cos\theta_{u_k}\sin\theta_{d,l}\tilde{u}^*_{1,k}\tilde{d}_{2,l} \\
&\qquad - \sin\theta_{u_k}\cos\theta_{d,l}\tilde{u}^*_{2,k}\tilde{d}_{1,l} + \sin\theta_{u_k}\sin\theta_{d,l}\tilde{u}^*_{2,k}\tilde{d}_{2,l}\Big] + \text{h.c.}
\end{aligned}
\tag{7.427}
$$

Was fehlt, sind noch die Wechselwirkungen, die ein oder zwei Gluonen, möglicherweise mit elektroschwachen Eichbosonen zusammen enthalten, enthalten. Man erhält für die Kopplung an ein Gluon, die diagonal im Generationen-, aber nicht im Farbraum sind (i, j Farbindizes):

$$
\begin{aligned}
&- \mathrm{i}\frac{g_s}{2}G^c_\mu(\lambda^c)_{ij}\left(\tilde{q}_{L,j}\partial^\mu\tilde{q}^*_{L,i} - \tilde{q}^*_{L,i}\partial^\mu\tilde{q}_{L,j}\right) \\
&- \mathrm{i}\frac{g_s}{2}G^c_\mu(\lambda^c)_{ij}\left(\tilde{q}_{R,j}\partial^\mu\tilde{q}^*_{R,i} - \tilde{q}^*_{R,i}\partial^\mu\tilde{q}_{R,j}\right) \\
= &- \mathrm{i}\frac{g_s}{2}G^c_\mu(\lambda^c)_{ij}\left(\tilde{q}_{1,j}\partial^\mu\tilde{q}^*_{1,i} - \tilde{q}^*_{1,i}\partial^\mu\tilde{q}_{1,j}\right) \\
&- \mathrm{i}\frac{g_s}{2}G^c_\mu(\lambda^c)_{ij}\left(\tilde{q}_{2,j}\partial^\mu\tilde{q}^*_{2,i} - \tilde{q}^*_{2,i}\partial^\mu\tilde{q}_{2,j}\right)
\end{aligned}
\tag{7.428}
$$

Die Zwei-Gluonen-Kopplung enthält das Produkt zweier Gell-Mann-Matrizen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{g_s^2}{4}(G^c_\mu G^{d\,\mu})(\lambda^d\lambda^c)_{ij}\left(\tilde{q}^*_{L,k,i}\tilde{q}_{L,k,j} + \tilde{q}^*_{R,k,i}\tilde{q}_{R,k,j}\right) \\
= &\frac{g_s^2}{4}(G^c_\mu G^{d\,\mu})(\lambda^d\lambda^c)_{ij}\left(\tilde{q}^*_{1,k,i}\tilde{q}_{1,k,j} + \tilde{q}^*_{2,k,i}\tilde{q}_{2,k,j}\right)
\end{aligned}
\tag{7.429}
$$

Bei den Kopplungen an ein Photon und ein Gluon treten wiederum keine Mischungswinkel der Squarks auf:

$$
\begin{aligned}
&eg_sQ_{el.}(G^c_\mu A^\mu)\left[\tilde{q}^*_{L,k,i}(\lambda^c)_{ij}\tilde{q}_{L,k,j} + \tilde{q}^*_{R,k,i}(\lambda^c)_{ij}\tilde{q}_{R,k,j}\right] \\
= &eg_sQ_{el.}(G^c_\mu A^\mu)\left[\tilde{q}^*_{1,k,i}(\lambda^c)_{ij}\tilde{q}_{1,k,j} + \tilde{q}^*_{2,k,i}(\lambda^c)_{ij}\tilde{q}_{2,k,j}\right]
\end{aligned}
\tag{7.430}
$$

Bei dem Term mit Z-Boson und Gluon kommt wieder die unterschiedliche Kopplung an des Z-Bosons an die rechts- und linkshändigen Squark-Komponenten zum Tragen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{gg_s}{\cos\theta_W}\left(T_3 - \sin^2\theta_W Q_{el.}\right)(Z_\mu G^{c\,\mu})\tilde{q}^*_{L,k,i}(\lambda^c)_{ij}\tilde{q}_{L,k,j} \\
&\qquad - gg_s\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}Q_{el.}(Z_\mu G^{c\,\mu})\tilde{q}^*_{R,k,i}(\lambda^c)_{ij}\tilde{q}_{R,k,j} \\
= &\frac{gg_s}{\cos\theta_W}\left(\cos^2\theta_q T_3 - \sin^2\theta_W Q_{el.}\right)(Z_\mu G^{c\,\mu})\tilde{q}^*_{1,k,i}(\lambda^c)_{ij}\tilde{q}_{1,k,j}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{gg_s}{\cos\theta_W}\left(\sin^2\theta_q T_3 - \sin^2\theta_W Q_{el.}\right)(Z_\mu G^{c\,\mu})\tilde{q}^*_{2,k,i}(\lambda^c)_{ij}\tilde{q}_{2,k,j}$$
$$-\frac{gg_s}{\cos\theta_W}\sin\theta_q\cos\theta_q T_3 Q_{el.}(Z_\mu G^{c\,\mu})\left(\tilde{q}^*_{1,k,i}(\lambda^c)_{ij}\tilde{q}_{2,k,j}+\tilde{q}^*_{2,k,i}(\lambda^c)_{ij}\tilde{q}_{1,k,j}\right) \quad (7.431)$$

Schließlich fehlt nur noch der Vertex mit einem Gluon und einem W-Boson, der interessanteste, aber auch komplizierteste Vertex, da er über die CKM-Mischung die Generation ändert, die Farbindizes über die starke Wechselwirkung ändert sowie auch den Flavour mittels der schwachen Wechselwirkung.

$$\begin{aligned}
&\frac{gg_s}{\sqrt{2}}(G^c_\mu W^{+\,\mu})(\lambda^c)_{ij}V^{CKM}_{kl}\left(\tilde{u}^*_{L,k,j}\tilde{d}_{L,l,i}\right)+\text{h.c.}\\
=&\frac{gg_s}{\sqrt{2}}(G^c_\mu W^{+\,\mu})(\lambda^c)_{ij}V^{CKM}_{kl}\cdot\\
&\quad\Big[\cos\theta_{u_k}\cos\theta_{d_l}\tilde{u}^*_{1,k,j}\tilde{d}_{1,l,i}\\
&\quad-\cos\theta_{u_k}\sin\theta_{d_l}\tilde{u}^*_{1,k,j}\tilde{d}_{2,l,i}\\
&\quad-\sin\theta_{u_k}\cos\theta_{d_l}\tilde{u}^*_{2,k,j}\tilde{d}_{1,l,i}\\
&\quad+\sin\theta_{u_k}\sin\theta_{d_l}\tilde{u}^*_{2,k,j}\tilde{d}_{2,l,i}\Big]+\text{h.c.}
\end{aligned} \quad (7.432)$$

7.6.2 Eichkopplungen der Sleptonen und Sneutrinos

Nachdem wir nun die Squarks abgehandelt haben, bleiben noch die kovarianten Ableitungen der Sleptonen und Sneutrinos, die deutlich einfacher sind, da keine Generationenmischung auftritt, die Kopplungen an die Gluonen entfallen und die rechtshändigen Sneutrinos nicht existieren. Die kovarianten Ableitungen des Slepton-Dubletts und des Singletts sind:

$$\mathrm{D}_\mu L = \begin{pmatrix} \partial_\mu\tilde{\nu} - \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}W^+_\mu\tilde{\ell}^-_L - \mathrm{i}\frac{g}{2\cos\theta_W}Z^0_\mu\tilde{\nu} \\ \partial_\mu\tilde{\ell}^-_L - \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}W^-_\mu\tilde{\nu} + \mathrm{i}\frac{g}{2\cos\theta_W}Z^0_\mu\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\tilde{\ell}^-_L + \mathrm{i}eA_\mu\tilde{\ell}^-_L \end{pmatrix} \quad (7.433)$$

$$\mathrm{D}_\mu\bar{E} = \partial_\mu\tilde{\ell}^-_R - \mathrm{i}\frac{g\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}Z^0_\mu\tilde{\ell}^-_R + \mathrm{i}eA_\mu\tilde{\ell}^-_R \quad (7.434)$$

Durch Quadrieren dieser Ausdrücke erhält man hieraus zunächst wieder die kinetischen Terme der Sneutrinos und Sleptonen:

$$\partial_\mu\tilde{\nu}\partial^\mu\tilde{\nu}^* + \partial_\mu\tilde{\ell}^-_1\partial^\mu\tilde{\ell}^+_1 + \partial_\mu\tilde{\ell}^-_2\partial^\mu{\tilde{\ell}_2}^+ \quad (7.435)$$

Hier ist der überaus bemerkenswerte Tatbestand, daß das Sneutrino als neutrales skalares Teilchen eigentlich sein eigenes Antiteilchen sein müsste. Allerdings ist aufgrund der möglichen Wechselwirkungen eine Unterscheidung zwischen Sneutrino und Antisneutrino möglich, ebenso wie im fermionischen Sektor aufgrund der leptonischen Wechselwirkungen gesagt werden kann, der linkshändige Zustand sei das Neutrino, der rechtshändige das Antineutrino. Erst, wenn man ein rechtshändiges Neutrino-Sneutrino-Superfeld und entsprechende weiche Supersymmetrie brechende Terme für dieses Feld einführt, erhalten die Neutrinos Masse und es tritt eine Mischung von Sneutrino und Antisneutrino zu zwei neuen Masseneigenzuständen auf (s. **??**.

Die Kopplung der Sleptonen an das Photonenfeld erfolgt über die Terme

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}eA_\mu \left(\tilde{\ell}_L^- \partial^\mu \tilde{\ell}_L^+ + \tilde{\ell}_R^- \partial^\mu \tilde{\ell}_R^+\right) + \text{h.c.} \\
&= \mathrm{i}eA_\mu \left(\tilde{\ell}_1^- \partial^\mu \tilde{\ell}_1^+ + \tilde{\ell}_2^- \partial^\mu \tilde{\ell}_2^+\right) + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{7.436}$$

$$\begin{aligned}
&e^2 (A_\mu A^\mu) \tilde{\ell}_L^- \tilde{\ell}_L^+ + e^2 (A_\mu A^\mu) \tilde{\ell}_R^- \tilde{\ell}_R^+ \\
&= e^2 (A_\mu A^\mu) \tilde{\ell}_1^- \tilde{\ell}_1^+ + e^2 (A_\mu A^\mu) \tilde{\ell}_2^- \tilde{\ell}_2^+
\end{aligned} \tag{7.437}$$

Bei den Z-Bosonen hat man für die Sleptonen wieder die unterschiedliche Kopplung an rechts- und linkshändige Komponenten zu bedenken:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{i}g}{2\cos\theta_W}\left(1 - 2\sin^2\theta_W\right) Z^0_\mu \left(\tilde{\ell}_L^- \partial^\mu \tilde{\ell}_L^+ - \tilde{\ell}_L^+ \partial^\mu \tilde{\ell}_L^-\right) \\
&\qquad - \frac{\mathrm{i}g\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W} Z^0_\mu \left(\tilde{\ell}_R^- \partial^\mu \tilde{\ell}_R^+ - \tilde{\ell}_R^+ \partial^\mu \tilde{\ell}_R^-\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}g}{2\cos\theta_W} Z^0_\mu \left(\cos^2\theta_\ell - 2\sin^2\theta_W\right)\left(\tilde{\ell}_1^- \partial^\mu \tilde{\ell}_1^+ - \tilde{\ell}_1^+ \partial^\mu \tilde{\ell}_1^-\right) \\
&\quad + \frac{\mathrm{i}g}{2\cos\theta_W} Z^0_\mu \left(\sin^2\theta_\ell - 2\sin^2\theta_W\right)\left(\tilde{\ell}_2^- \partial^\mu \tilde{\ell}_2^+ - \tilde{\ell}_2^+ \partial^\mu \tilde{\ell}_2^-\right) \\
&\quad - \left[\frac{\mathrm{i}g}{2\cos\theta_W} Z^0_\mu \sin\theta_\ell\cos\theta_\ell \left(\tilde{\ell}_1^- \partial^\mu \tilde{\ell}_1^+ - \tilde{\ell}_1^+ \partial^\mu \tilde{\ell}_1^-\right) + \text{h.c.}\right]
\end{aligned} \tag{7.438}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}(Z^0_\mu Z^{0\,\mu})\left(1 - 2\sin^2\theta_W\right)^2 \tilde{\ell}_L^- \tilde{\ell}_L^+ + \frac{g^2\sin^4\theta_W}{\cos^2\theta_W}(Z^0_\mu Z^{0\,\mu})\tilde{\ell}_R^- \tilde{\ell}_R^+ \\
&= \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}(Z^0_\mu Z^{0\,\mu})\left[\left(1 - 4\sin^2\theta_W\right)\cos^2\theta_\ell + 4\sin^4\theta_W\right]\tilde{\ell}_1^- \tilde{\ell}_1^+ \\
&\quad + \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}(Z^0_\mu Z^{0\,\mu})\left[\left(1 - 4\sin^2\theta_W\right)\sin^2\theta_\ell + 4\sin^4\theta_W\right]\tilde{\ell}_2^- \tilde{\ell}_2^+
\end{aligned}$$

$$
- \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}(Z^0_\mu Z^{0\,\mu})\left(1 - 4\sin^2\theta_W\right)\sin\theta_\ell\cos\theta_\ell\left(\tilde{\ell}_1^-\tilde{\ell}_2^+ + \tilde{\ell}_1^+\tilde{\ell}_2^-\right) \qquad (7.439)
$$

In ähnlicher Weise verfährt man mit den Sneutrino-Z-Vertizes. Dabei beachte man, daß die Kopplung an ein Z-Boson verschwände, wenn das Sneutrino sein eigenes Antiteilchen wäre. Bei der Ermittlung der Feynmanregeln, denke man daran, daß diese Unterscheidbarkeit von Sneutrino und Antisneutrino keinen Symmetriefaktor 2 erlaubt! Die beiden Terme sind:

$$
-\mathrm{i}\frac{g}{2\cos\theta_W}Z^0_\mu\left(\tilde{\nu}\partial^\mu\tilde{\nu}^* - \tilde{\nu}^*\partial^\mu\tilde{\nu}\right) + \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}(Z^0_\mu Z^\mu)|\tilde{\nu}|^2 \qquad (7.440)
$$

Die Kopplung an ein Z-Boson und ein Photon gibt es nur für die Sleptonen, nicht für die neutralen Sneutrinos.

$$
\begin{aligned}
&\frac{eg}{\cos\theta_W}(Z^0_\mu A^\mu)\left(1 - 2\sin^2\theta_W\right)\tilde{\ell}_L^-\tilde{\ell}_L^+ - \frac{2eg\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}(Z^0_\mu A^\mu)\tilde{\ell}_R^-\tilde{\ell}_R^+ \\
= &\frac{eg}{\cos\theta_W}(Z^0_\mu A^\mu)\left(\cos^2\theta_\ell - 2\sin^2\theta_W\right)\tilde{\ell}_1^-\tilde{\ell}_1^+ \\
&+ \frac{eg}{\cos\theta_W}(Z^0_\mu A^\mu)\left(\sin^2\theta_\ell - 2\sin^2\theta_W\right)\tilde{\ell}_2^-\tilde{\ell}_2^+ \\
&- \frac{eg}{\cos\theta_W}(Z^0_\mu A^\mu)\sin\theta_\ell\cos\theta_\ell\left(\tilde{\ell}_1^-\tilde{\ell}_2^+ + \tilde{\ell}_2^-\tilde{\ell}_1^+\right) \qquad (7.441)
\end{aligned}
$$

Die Kopplungen an die W-Bosonen mischen wiederum die Flavours, d.h.verbinden Sleptonen und Sneutrinos miteinander.

$$
\begin{aligned}
&- \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}W^+_\mu\left(\tilde{\ell}_L^-\partial^\mu\tilde{\nu}^* - \tilde{\nu}^*\partial^\mu\tilde{\ell}_L^-\right) + \text{h.c.} \\
= &- \Bigg[\mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}W^+_\mu\cos\theta_\ell\left(\tilde{\ell}_1^-\partial^\mu\tilde{\nu}^* - \tilde{\nu}^*\partial^\mu\tilde{\ell}_1^-\right) \\
&\qquad - \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}W^+_\mu\sin\theta_\ell\left(\tilde{\ell}_2^-\partial^\mu\tilde{\nu}^* - \tilde{\nu}^*\partial^\mu\tilde{\ell}_2^-\right)\Bigg] + \text{h.c.} \qquad (7.442)
\end{aligned}
$$

Entsprechend mit einem weiteren Photon:

$$
\begin{aligned}
&- \frac{eg}{\sqrt{2}}(A_\mu W^{+\,\mu})\tilde{\ell}_L^-\tilde{\nu}^* + \text{h.c.} \\
= &- \frac{eg}{\sqrt{2}}\left[(A_\mu W^{+\,\mu})\cos\theta_\ell\tilde{\ell}_1^-\tilde{\nu}^* - (A_\mu W^{+\,\mu})\sin\theta_\ell\tilde{\ell}_L^-\tilde{\nu}^*\right] + \text{h.c.} \qquad (7.443)
\end{aligned}
$$

sowie mit einem Z:

$$
\frac{g^2\sin^2\theta_W}{\sqrt{2}\cos\theta_W}(Z^0_\mu W^{+\,\mu})\tilde{\ell}_L^-\tilde{\nu}^* + \text{h.c.}
$$

$$= \frac{g^2 \sin^2\theta_W}{\sqrt{2}\cos\theta_W}\left[(Z^0_\mu W^{+\,\mu})\cos\theta_\ell \tilde{\ell}_1^- \tilde{\nu}^* - (Z^0_\mu W^{+\,\mu})\sin\theta_\ell \tilde{\ell}_2^- \tilde{\nu}^*\right] + \text{h.c.} \qquad (7.444)$$

Zu guter letzt bleibt noch die Kopplung an zwei W-Bosonen:

$$\begin{aligned}
&\frac{g^2}{2}(W^+_\mu W^{-\,\mu})\tilde{\ell}_L^+\tilde{\ell}_L^- \\
=& \frac{g^2}{2}(W^+_\mu W^{-\,\mu})\cos^2\theta_\ell \tilde{\ell}_1^+\tilde{\ell}_1^- \\
&+ \frac{g^2}{2}(W^+_\mu W^{-\,\mu})\sin^2\theta_\ell \tilde{\ell}_2^+\tilde{\ell}_2^- \\
&- \frac{g^2}{2}(W^+_\mu W^{-\,\mu})\sin\theta_\ell\cos\theta_\ell\left(\tilde{\ell}_1^+\tilde{\ell}_2^- + \tilde{\ell}_2^+\tilde{\ell}_1^-\right) \qquad (7.445)
\end{aligned}$$

$$\frac{g^2}{2}(W^+_\mu W^{-\,\mu})|\tilde{\nu}|^2 \qquad (7.446)$$

7.7 Eichkopplungen der Gauginos und Higgsinos

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Eichkopplungen der Gauginos aufgrund des Termes

$$\mathcal{L}_{GG\tilde{G}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\tilde{B}}\not{D}\tilde{B}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{a=1}^{3}\left(\overline{\tilde{W}^a}(\not{D}\tilde{W})^a\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{8}\left(\overline{\tilde{G}^a}(\not{D}\tilde{G})^a\right) \qquad (7.447)$$

Da, wie in 6.10 diskutiert, Higgsinos und Gauginos zu Neutralinos und Charginos mischen, werden an dieser Stelle auch die kinetischen Terme und die Eichkopplungen der Higgsinos besprochen.

Da das Bino in bezug auf alle Eichgruppen in der trivialen Darstellung lebt, gilt:

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\tilde{B}}\not{D}\tilde{B}\right) = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\tilde{B}}\not{\partial}\tilde{B}\right) \qquad (7.448)$$

Das Wino ist ein $SU(2)$-Triplett, hat jedoch Hyperladung $Y = 0$ und ist ein Farbsinglett, woraus folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{a=1}^{3}\left(\overline{\tilde{W}^a}(\not{D}\tilde{W}^a)\right) &= \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{a=1}^{3}\left(\overline{\tilde{W}^a}\not{\partial}\tilde{W}^a\right) + \frac{g}{2}\sum_{a,b,c=1}^{3}\overline{\tilde{W}^a}(t^b_{\text{adj.}})_{ac}\not{W}^b\tilde{W}^c \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{a=1}^{3}\left(\overline{\tilde{W}^a}\not{\partial}\tilde{W}^a\right) + \frac{\mathrm{i}g}{2}\sum_{a,b,c=1}^{3}\overline{\tilde{W}^a}\epsilon_{abc}\not{W}^b\tilde{W}^c \qquad (7.449)
\end{aligned}$$

Die beiden Higgsinos sind $SU(2)_L$-Dubletts sowie Farbsingletts. Sie unterscheiden sich in ihrer Hyperladung. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\left(\overline{h_{1,L}}\not{D}h_{1,L}\right)+\mathrm{i}\left(\overline{h_{2,L}}\not{D}h_{2,L}\right)\\
&\quad=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\tilde{H}_1}\not{\partial}\tilde{H}_1\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\tilde{H}_2}\not{\partial}\tilde{H}_2\right)+\mathrm{i}\left(\overline{\tilde{H}^+}\not{\partial}\tilde{H}^+\right)+\frac{g}{\sqrt{2}}\left(\overline{h^0_{1,L}}\not{W}^+h^-_{1,L}\right)\\
&\qquad+\frac{g}{\sqrt{2}}\left(\overline{h^-_{1,L}}\not{W}^-h^0_{1,L}\right)+\frac{g}{\sqrt{2}}\left(\overline{h^+_{2,L}}\not{W}^+h^0_{2,L}\right)+\frac{g}{\sqrt{2}}\left(\overline{h^0_{2,L}}\not{W}^-h^-_{2,L}\right)\\
&\qquad+e\overline{h^+_{2,L}}\not{A}h^+_{2,L}-e\overline{h^-_{1,L}}\not{A}h^-_{1,L}+\frac{g}{2\cos\theta_W}\overline{h^0_{1,L}}\not{Z}^0h^0_{1,L}\\
&\qquad-\frac{g}{2\cos\theta_W}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{h^-_{1,L}}\not{Z}^0h^-_{1,L}\\
&\qquad+\frac{g}{2\cos\theta_W}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{h^+_{2,L}}\not{Z}^0h^+_{2,L}-\frac{g}{2\cos\theta_W}\overline{h^0_{2,L}}\not{Z}^0h^0_{2,L}
\end{aligned}\tag{7.450}$$

Schreibt man die Wechselwirkungsterme mit den W-Bosonen in zweikomponentiger Form aus, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{H}\tilde{H}W}&=\frac{g}{\sqrt{2}}\Big\{\bar{\psi}^1_{H_1}\bar{\sigma}^\mu W^+_\mu\psi^2_{H_1}+\bar{\psi}^2_{H_1}\bar{\sigma}^\mu W^-_\mu\psi^1_{H_1}+\bar{\psi}^1_{H_2}\bar{\sigma}^\mu W^+_\mu\psi^2_{H_2}\\
&\qquad+\bar{\psi}^2_{H_2}\bar{\sigma}^\mu W^-_\mu\psi^1_{H_2}\Big\}\\
&=\frac{g}{\sqrt{2}}\Big\{\overline{\tilde{H}_{1,L}}\not{W}^+\tilde{H}^-_L+\overline{\tilde{H}^-_L}\not{W}^-\tilde{H}_{1,L}+\overline{\tilde{H}^+_L}\not{W}^+\tilde{H}_{2,L}+\overline{\tilde{H}_{2,L}}\not{W}^-\tilde{H}^+_L\Big\}\\
&=\frac{g}{\sqrt{2}}\Big\{-\overline{\tilde{H}^+_R}\not{W}^+\tilde{H}_{1,R}-\overline{\tilde{H}_{1,R}}\not{W}^-\tilde{H}^+_R+\overline{\tilde{H}^+_L}\not{W}^+\tilde{H}_{2,L}+\overline{\tilde{H}_{2,L}}\not{W}^-\tilde{H}^+_L\Big\}\\
&=\frac{g}{\sqrt{2}}\Big\{\overline{\tilde{H}^+_L}\not{W}^+\tilde{H}_{2,L}-\overline{\tilde{H}^+_R}\not{W}^+\tilde{H}_{1,R}+\text{h.c.}\Big\}
\end{aligned}\tag{7.451}$$

Die Umformung in der vorletzten Zeile wurde durchgeführt, um einheitlich eine Wechselwirkung zwischen W^+-Bosonen und $\tilde{H}^+$-Higgsinos zu haben, während die Wechselwirkung der W^--Bosonen mit den $\tilde{H}^-$-Higgsinos dann durch hermitesche Adjunktion zu erhalten ist. Der Photon-Wechselwirkungsterm läßt sich leicht auf die Form

$$e\overline{h^+_{2,L}}\not{A}h^+_{2,L}-e\overline{h^-_{1,L}}\not{A}h^-_{1,L}=e\overline{\tilde{H}^+}\not{A}\tilde{H}^+\tag{7.452}$$

bringen. Der Anteil, der die Kopplung an die Z^0-Bosonen beschreibt, kann ebenfalls umgeformt werden, um die physikalischen Higgsino-Zustände zu erhalten.

$$\mathcal{L}_{\tilde{H}\tilde{H}Z^0}=\frac{g}{2\cos\theta_W}\left(\bar{\psi}^1_{H_1}\bar{\sigma}^\mu Z^0_\mu\psi^1_{H_1}\right)-\frac{g}{2\cos\theta_W}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\left(\bar{\psi}^2_{H_1}\bar{\sigma}^\mu Z^0_\mu\psi^2_{H_1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{g}{2\cos\theta_W}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\left(\bar{\psi}^1_{H_2}\bar{\sigma}^\mu Z^0_\mu\psi^1_{H_2}\right)-\frac{g}{2\cos\theta_W}\left(\bar{\psi}^2_{H_2}\bar{\sigma}^\mu Z^0_\mu\psi^2_{H_2}\right)\\
=&\frac{g}{4\cos\theta_W}\left(\overline{\tilde{H}_{1,L}}\not{Z}^0\tilde{H}_{1,L}-\overline{\tilde{H}_{1,R}}\not{Z}^0\tilde{H}_{1,R}\right)\\
&+\frac{g}{2\cos\theta_W}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{H}^+_R}\not{Z}^0\tilde{H}^+_R\\
&+\frac{g}{2\cos\theta_W}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{H}^+_L}\not{Z}^0\tilde{H}^+_L\\
&-\frac{g}{4\cos\theta_W}\left(\overline{\tilde{H}_{2,L}}\not{Z}^0\tilde{H}_{2,L}-\overline{\tilde{H}_{2,R}}\not{Z}^0\tilde{H}_{2,R}\right)\\
=&-\frac{g}{4\cos\theta_W}\overline{\tilde{H}_1}\not{Z}^0\gamma^5\tilde{H}_1+\frac{g}{4\cos\theta_W}\overline{\tilde{H}_2}\not{Z}^0\gamma^5\tilde{H}_2\\
&+\frac{g}{2\cos\theta_W}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{H}^+}\not{Z}^0\tilde{H}^+
\end{aligned}
\tag{7.453}
$$

Die kinetischen Anteile von (7.448) und (7.449) kann man auf das Photino, Zino und die geladenen Winos umschreiben:

$$
\mathcal{L}_{\text{kin.},\tilde{B}\tilde{W}}=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\tilde{A}}\not{\partial}\tilde{A}\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\tilde{Z}^0}\not{\partial}\tilde{Z}^0\right)+\mathrm{i}\left(\overline{\tilde{W}^+}\not{\partial}\tilde{W}^+\right)
\tag{7.454}
$$

Der Wechselwirkungsanteil der Winos mit dem W-Boson-Triplett läßt sich mit Hilfe von (5.32) in der Form

$$
\mathrm{i}g\left[\overline{\tilde{W}^1}\not{W}^2\tilde{W}^3+\overline{\tilde{W}^2}\not{W}^3\tilde{W}^1+\overline{\tilde{W}^3}\not{W}^1\tilde{W}^2\right]
\tag{7.455}
$$

schreiben. Der Anteil, in welchem die Wechselwirkung mit den W-Bosonen steckt, läßt sich so umformen:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}g\left[-\overline{\tilde{W}^2}\not{W}^1\tilde{W}^3+\overline{\tilde{W}^1}\not{W}^2\tilde{W}^3\right]\\
&\quad=\frac{g}{2}\left(\overline{\tilde{W}^-}-\overline{\tilde{W}^+}\right)\left(\not{W}^++\not{W}^-\right)\tilde{W}^3+\frac{g}{2}\left(\overline{\tilde{W}^+}+\overline{\tilde{W}^-}\right)\left(\not{W}^--\not{W}^+\right)\tilde{W}^3\\
&\quad=g\overline{\tilde{W}^-}\not{W}^-\tilde{W}^3-g\overline{\tilde{W}^+}\not{W}^+\tilde{W}^3\\
&\quad=e\overline{\tilde{W}^-}\not{W}^-\tilde{A}-e\overline{\tilde{W}^+}\not{W}^+\tilde{A}+g\cos\theta_W\overline{\tilde{W}^-}\not{W}^-\tilde{Z}^0-g\cos\theta_W\overline{\tilde{W}^+}\not{W}^+\tilde{Z}^0
\end{aligned}
\tag{7.456}
$$

Die Kopplung der Winos an Photon und Z^0-Boson erhält folgende Gestalt:

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{i}g\overline{\tilde{W}^1}\not{W}^3\tilde{W}^2\\
&\quad=\frac{g}{2}\left(\overline{\tilde{W}^-}+\overline{\tilde{W}^+}\right)\not{W}^3\left(\tilde{W}^+-\tilde{W}^-\right)\\
&\quad=-g\left[\overline{\tilde{W}^+}\not{W}^3\tilde{W}^-+\frac{1}{2}\overline{\tilde{W}^-}\not{W}^3\tilde{W}^--\frac{1}{2}\overline{\tilde{W}^+}\not{W}^3\tilde{W}^+\right]
\end{aligned}
\tag{7.457}
$$

Der erste Term verschwindet, wie man sich durch eine Entwicklung in die zweikomponentigen Spinoren überzeugen kann. Die beiden hinteren Terme sind aus gleichem Grunde identisch.

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}g\overline{\tilde{W}^1}\not{W}^3\tilde{W}^2 & \\ &= g\overline{\tilde{W}^+}\not{W}^3\tilde{W}^+ \\ &= e\overline{\tilde{W}^+}\not{A}\tilde{W}^+ + g\cos\theta_W\overline{\tilde{W}^+}\not{Z}^0\tilde{W}^+ \end{aligned} \tag{7.458}$$

Jetzt bleibt nur noch, die Neutralino- und Chargino-Zustände in diese Ausdrücke einzusetzen. Da die Wechselwirkungsterme die Gestalt von Vektorströmen aufweisen, ist stets linkshändige Feldkomponente mit linkshändiger und rechtshändige mit rechtshändiger Feldkomponente verbunden. Die kinetischen Terme ergeben sich in richtiger Weise aus der Unitarität der Transformationsmatrizen, die Gluinos sind hier der Vollständigkeit halber aufgeführt.

$$\mathcal{L}_{\text{Gaugino,kin.}} = \sum_{i=1}^{4}\left(\overline{\tilde{\chi}_i^0}\not{\partial}\tilde{\chi}_i^0\right) + \sum_{i=1}^{2}\left(\overline{\tilde{\chi}_i^+}\not{\partial}\tilde{\chi}_i^+\right) + \sum_{i=1}^{8}\left(\overline{\tilde{G}_i}\not{\partial}\tilde{G}_i\right) \tag{7.459}$$

Eine Kopplung der Photonen an die Neutralinos existiert natürlich nicht, die Kopplung der Z^0-Bosonen erfolgt nur über die Higgsinos, da das Bino ein reines Singlett ist und die 3-Komponente des W-Boson-Tripletts nur an die geladenen Winos koppelt wegen der Antisymmetrie der Strukturkonstanten. Mit Hilfe der Relationen (6.175) und der Abkürzungen $P_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ und $P_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma^5)$ für die Projektoren auf die links- und rechtshändigen Spinorkomponenten kann man dies dann weiter massieren. Dabei hat man zu berücksichtigen, daß man einen Majorana-Wechselwirkungsterm in einer Lagrangedichte in eine bestimmte Gestalt bringen muß, um deutlich zu machen, welche Kopplungen von Null verschieden bzw. identisch sind. Bedeutet gemäß den Feynman-Regeln für Majorana-Fermionen in [28] die Matrix $\Gamma' \equiv C\Gamma C^{-1}$ (für die gestrichenen Größen gilt die Relation

$$C\cdot\left\{1,\gamma^5,\gamma^\mu,\gamma^\mu\gamma^5,[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\right\}\cdot C^{-1} = \left\{1,\gamma^5,-\gamma^\mu,\gamma^\mu\gamma^5,-[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\right\}, \tag{7.460}$$

dies sich leicht mit den Formeln aus dem Anhang beweisen läßt. Mit der Umschreibung

$$\overline{\tilde{\chi}_i^0}\Gamma\tilde{\chi}_j^0 = \overline{\tilde{\chi}_j^0}\Gamma'\tilde{\chi}_i^0$$

bekommen die Wechselwirkungsanteile der Neutralinos die Gestalt

$$\sum_{i,j}\overline{\tilde{\chi}_i^0}\Gamma_{ij}\tilde{\chi}_j^0 = \sum_i \overline{\tilde{\chi}_i^0}\Gamma_i\tilde{\chi}_i^0 + \sum_{i<j}\overline{\tilde{\chi}_i^0}\left(\Gamma_{ij}+\Gamma'_{ji}\right)\tilde{\chi}_j^0. \tag{7.461}$$

Damit hat man

$$
\begin{aligned}
&\frac{g}{4\cos\theta_W}\left(\overline{\tilde{H}_2}\not{Z}^0\gamma^5\tilde{H}_2-\overline{\tilde{H}_1}\not{Z}^0\gamma^5\tilde{H}_1\right)\\
&\quad=-\frac{g}{4\cos\theta_W}\sum_{i,j=1}^{4}\Big(\overline{\tilde{\chi}^0_{i,L}}\not{Z}^0\eta_i\eta_j^*N_{i4}N_{j4}^*\tilde{\chi}^0_{j,L}-\overline{\tilde{\chi}^0_{i,R}}\not{Z}^0\eta_i^*\eta_jN_{i4}^*N_{j4}\tilde{\chi}^0_{j,R}\\
&\qquad\qquad-\overline{\tilde{\chi}^0_{i,L}}\not{Z}^0\eta_i\eta_j^*N_{i3}N_{j3}^*\tilde{\chi}^0_{j,L}+\overline{\tilde{\chi}^0_{i,R}}\not{Z}^0\eta_i^*\eta_jN_{i3}^*N_{j3}\tilde{\chi}^0_{j,R}\Big)\\
&\quad=\frac{g_Z}{4}\sum_{i,j=1}^{4}\Big(\overline{\tilde{\chi}^0_i}\not{Z}^0\left(-\eta_i\eta_j^*(N_{i4}N_{j4}^*-N_{i3}N_{j3}^*)-\text{ c.c.}\right)\tilde{\chi}^0_j\\
&\quad+\overline{\tilde{\chi}^0_i}\not{Z}^0\gamma^5\left(\eta_i\eta_j^*(N_{i4}N_{j4}^*-N_{i3}N_{j3}^*)+\text{ c.c.}\right)\tilde{\chi}^0_j\Big)\\
&\quad=\frac{g_Z}{2}\sum_i\overline{\tilde{\chi}^0_i}a^0_{ii}\not{Z}^0\gamma^5\tilde{\chi}^0_i-g_Z\sum_{i<j}\overline{\tilde{\chi}^0_i}\not{Z}^0\left(v^0_{ij}-a^0_{ij}\gamma^5\right)\tilde{\chi}^0_j
\end{aligned}
\tag{7.462}
$$

Wir halten uns hier an die Konventionen in [30] und definieren die Matrizen:

$$
v^0_{ij}=\frac{\mathrm{i}}{2}\Im\Big[\eta_i\eta_j^*\left(N_{i4}N_{j4}^*-N_{i3}N_{j3}^*\right)\Big],\qquad a^0_{ij}=\frac{1}{2}\Re\Big[\eta_i\eta_j^*\left(N_{i4}N_{j4}^*-N_{i3}N_{j3}^*\right)\Big]
\tag{7.463}
$$

Bei der Herleitung der Feynman-Regel für diesen Vertex hat man zu beachten, daß für Majorana-Spinoren die Wechselwirkungsoperatoren mit einem Vorfaktor 1/2 definiert werden, der dann als Symmetriefaktor wegfällt, da die Feldoperatoren von Majorana-Spinoren zwei Kontraktionsmöglichkeiten erlauben (sie enthalten Erzeuger und Vernichter *desselben* Teilchens), die denselben diagrammatischen Ausdruck darstellen (s. [28]). Für zwei unterschiedliche Neutralinos wurden die Symmetriefaktoren schon eliminiert, im Falle zweier identischer Neutralinos fällt der Vorfaktor 1/2 gegen den Symmetriefaktor bei der Vertexbildung weg.

Die Kopplung der Photonen an die Charginos erfolgt durch je einen Term, der das Photonfeld mit den geladenen Higgsinos und den geladenen Winos verbindet. Mit den Gleichungen (6.163) und (6.164) kann man dies wieder in die physikalischen Zustände umformen:

$$
\begin{aligned}
&e\overline{\tilde{W}^+}\not{A}\tilde{W}^++e\overline{\tilde{H}^+}\not{A}\tilde{H}^+\\
&\quad=e\overline{\tilde{W}^+_L}\not{A}\tilde{W}^+_L+e\overline{\tilde{W}^+_R}\not{A}\tilde{W}^+_R+e\overline{\tilde{H}^+_L}\not{A}\tilde{H}^+_L+e\overline{\tilde{H}^+_R}\not{A}\tilde{H}^+_R\\
&\quad=e\sum_{i,j=1}^{2}\Big(\overline{\tilde{\chi}^+_{i,L}}V_{i1}\not{A}V_{j1}^*\tilde{\chi}^+_{j,L}+\overline{\tilde{\chi}^+_{i,R}}U_{i1}^*\not{A}U_{j1}\tilde{\chi}^+_{j,R}+\overline{\tilde{\chi}^+_{i,L}}V_{i2}\not{A}V_{j2}^*\tilde{\chi}^+_{j,L}
\end{aligned}
$$

$$+ \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^{+}} U_{i2}^{*} \not{A} U_{j2} \tilde{\chi}_{j,R}^{+} \Big)$$
$$= e\overline{\tilde{\chi}_1^{+}} \not{A} \tilde{\chi}_1^{+} + e\overline{\tilde{\chi}_2^{+}} \not{A} \tilde{\chi}_2^{+} \tag{7.464}$$

Die letzte Zeile folgt aus der Unitarität der Matrizen U und V. Man beachte, daß hier mit dem Higgsino- und Wino-Term alle benötigten Terme vorkommen, so daß die für die Unitarität erforderliche Summe über die Indizes vollständig ist, während bei der Kopplung der Neutralinos an die Z^0-Bosonen nur zwei der vier erforderlichen Terme vorhanden waren, so daß die Mischungsmatrizen dort nicht wegfielen.

Etwas komplizierter ist die Kopplung der Z^0-Bosonen an die Charginos. Hier treten wie bei den Photonen zwei Terme auf, eine Kopplung an das Higgsino, eine an das Wino, aber mit unterschiedlichen Vorfaktoren:

$$\begin{aligned}
&\frac{g}{\cos\theta_W}\left(\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{H}^{+}}\not{Z}^0\tilde{H}^{+} + \cos^2\theta_W\overline{\tilde{W}^{+}}\not{Z}^0\tilde{W}^{+}\right) \\
&\quad = g_Z\left(\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\left(\overline{\tilde{\chi}_{i,L}^{+}}\not{Z}^0 V_{i2}V_{j2}^{*}\tilde{\chi}_{j,L}^{+} + \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^{+}}\not{Z}^0 U_{i2}^{*}U_{j2}\tilde{\chi}_{j,R}^{+}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \cos^2\theta_W\left(\overline{\tilde{\chi}_{i,L}^{+}}\not{Z}^0 V_{i1}V_{j1}^{*}\tilde{\chi}_{j,L}^{+} + \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^{+}}\not{Z}^0 U_{i1}^{*}U_{j1}\tilde{\chi}_{j,R}^{+}\right)\right) \\
&\quad = g_Z\sum_{ij}\overline{\tilde{\chi}_i^{+}}\not{Z}^0\left(v_{ij}^{+} - a_{ij}^{+}\gamma^5\right)\tilde{\chi}_j^{+}
\end{aligned} \tag{7.465}$$

Hierbei wurden als Abkürzungen

$$v_{ij}^{+} = \frac{1}{4}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\left[V_{i2}V_{j2}^{*} + U_{i2}^{*}U_{j2}\right] + \frac{1}{2}\cos^2\theta_W\left[V_{i1}V_{j1}^{*} + U_{i1}^{*}U_{j1}\right] \tag{7.466}$$

$$a_{ij}^{+} = \frac{1}{4}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\left[V_{i2}V_{j2}^{*} - U_{i2}^{*}U_{j2}\right] + \frac{1}{2}\cos^2\theta_W\left[V_{i1}V_{j1}^{*} - U_{i1}^{*}U_{j1}\right] \tag{7.467}$$

eingeführt. Sind die Parameter m_{Wino} und μ, und damit auch die Mischungsmatrizen U und V reell,

$$V = \begin{pmatrix} \cos\phi_{+} & \sin\phi_{+} \\ -\epsilon_{\tilde{\chi}^{\pm}}\sin\phi_{+} & \epsilon_{\tilde{\chi}^{\pm}}\cos\phi_{+} \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} \cos\phi_{-} & \sin\phi_{-} \\ -\sin\phi_{-} & \cos\phi_{-} \end{pmatrix}, \tag{7.468}$$

worin der Faktor $\epsilon_{\tilde{\chi}^{\pm}}$ durch Gleichung (6.154) gegeben ist, kann man die Matrixelemente des Vektor- und Axialvektorstromes direkt angeben:

$$v_{11}^{+} = \cos^2\theta_W - \frac{1}{4}\left(\sin^2\phi_{+} + \sin^2\phi_{-}\right)$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{+} &= \frac{1}{4}\left(\sin^2\phi_- - \sin^2\phi_+\right) \\
v_{22}^{+} &= \cos^2\theta_W - \frac{1}{4}\left(\cos^2\phi_+ + \cos^2\phi_-\right) \\
a_{22}^{+} &= \frac{1}{4}\left(\cos^2\phi_- - \cos^2\phi_+\right) \\
v_{12}^{+} &= v_{21}^{+} = -\frac{1}{4}\left(\cos\phi_- \sin\phi_- + \epsilon_{\tilde{\chi}^\pm}\cos\phi_+ \sin\phi^+\right) \\
a_{12}^{+} &= a_{21}^{+} = \frac{1}{4}\left(\cos\phi_- \sin\phi_- - \epsilon_{\tilde{\chi}^\pm}\cos\phi_+ \sin\phi_+\right)
\end{aligned}
\tag{7.469}
$$

Es verbleiben noch die Wechselwirkungsterme der Art Neutralino, Chargino und W-Boson, die folgendermaßen aussehen:

$$
\mathcal{L}_{W\tilde{\chi}^+\tilde{\chi}^0} = \frac{g}{\sqrt{2}}\left[\overline{\tilde{H}_L^+}\not{W}^+\tilde{H}_{2,L} - \overline{\tilde{H}_R^+}\not{W}^+\tilde{H}_{1,R}\right] - g\overline{\tilde{W}^+}\not{W}^+\tilde{W}^3 + \text{h.c.} \tag{7.470}
$$

Wieder finden die Gleichungen (6.163), (6.164) und (6.175) Verwendung, um diesen Anteil der Lagrangedichte auf die physikalischen Chargino- und Neutralino-Zustände umzuschreiben.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W\tilde{\chi}^+\tilde{\chi}^0} = {} & \frac{g}{\sqrt{2}}\left[\overline{\tilde{\chi}_{i,L}^+}\not{W}^+ V_{i2}\eta_j^* N_{j4}^*\tilde{\chi}_{j,L}^0 - \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^+}\not{W}^+ U_{i2}^*\eta_j N_{j3}\tilde{\chi}_{j,R}^0\right] \\
& - g\overline{\tilde{\chi}_{i,L}^+}\not{W}^+ V_{i1}\eta_j^* N_{j2}^*\tilde{\chi}_{j,L}^0 - g\overline{\tilde{\chi}_{i,R}^+}\not{W}^+ U_{i1}^*\eta_j N_{j2}\tilde{\chi}_{j,R}^0 + \text{h.c.}
\end{aligned}
\tag{7.471}
$$

Führt man die Matrizen

$$
L_{ij}^{+0} = \eta_j^*\left[\frac{1}{\sqrt{2}}V_{i2}N_{j4}^* - V_{i1}N_{j2}^*\right], \tag{7.472}
$$

$$
R_{ij}^{+0} = -\eta_j\left[\frac{1}{\sqrt{2}}U_{i2}^*N_{j3} + U_{i1}^*N_{j2}\right], \tag{7.473}
$$

$$
L_{ij}^{0+} = (L_{ji}^{+0})^*, \qquad R_{ij}^{0+} = (R_{ji}^{+0})^* \tag{7.474}
$$

so hat man für diesen Wechselwirkungsterm

$$
\mathcal{L}_{W\tilde{\chi}^+\tilde{\chi}^0} = g\,\overline{\tilde{\chi}_i^+}\not{W}^+\left(L_{ij}^{+0}P_L + R_{ij}^{+0}P_R\right)\tilde{\chi}_j^0 + g\,\overline{\tilde{\chi}_i^0}\not{W}^-\left(L_{ij}^{0+}P_L + R_{ij}^{0+}P_R\right)\tilde{\chi}_j^+. \tag{7.475}
$$

P_L und P_R sind wie üblich die Projektoren auf die links- und rechtshändigen Komponenten. Für reelle Parameter und Mischungsmatrizen (bis auf die Phasen in der Mischungsmatrix der neutralen Fermionen) gelten folgende Spezialfälle:

$$
L_{1j}^{+0} = \eta_j^*\left[\frac{1}{\sqrt{2}}N_{j4}\sin\phi_+ - N_{j2}\cos\phi_+\right]
$$

$$L_{2j}^{+0} = \epsilon_{\tilde{\chi}^\pm} \eta_j^* \left[\frac{1}{\sqrt{2}} N_{j4} \cos\phi^+ + N_{j2} \sin\phi_+ \right]$$

$$R_{1j}^{+0} = -\eta_j \left[\frac{1}{\sqrt{2}} N_{j3} \sin\phi_- + N_{j2} \cos\phi_- \right] \tag{7.476}$$

$$R_{2j}^{+0} = -\eta_j \left[\frac{1}{\sqrt{2}} N_{j3} \cos\phi_- - N_{j2} \sin\phi_- \right]. \tag{7.477}$$

Als einzig farbige Majorana-Fermionen im MSSM können die Gluinos weder mit anderen Gauginos noch mit den Higgsinos mischen. Mit der adjungierten Darstellung der Generatoren der Eichgruppe $SU(3)_C$

$$\left(t^b_{\text{adj.}}\right)_{ac} = \mathrm{i} f_{abc} \tag{7.478}$$

läßt sich die gesamte kovariante Ableitung leicht umschreiben.

$$\frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{a=1}^{8} \overline{\tilde{G}^a} (\not{D} \tilde{G})^a = \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{a=1}^{8} \overline{\tilde{G}^a} \not{\partial} \tilde{G}^a + \frac{\mathrm{i} g_s}{2} \sum_{a,b,c=1}^{8} \overline{\tilde{G}^a} f_{abc} \not{G}^b \tilde{G}^c \tag{7.479}$$

Auch hier muß man beim Herleiten der Feynman-Regeln daran denken, daß für Majorana-Fermionen ein Symmetriefaktor zwei auftritt.

7.8 Higgs-Neutralino-Chargino-Kopplungen

Die Wechselwirkungsterme, die die Kopplungen der Higgs-Bosonen an die Neutralinos und Charginos beschreiben, wurden bereits bei der Diskussion der Mischung der Gauginos und Higgsinos in Abschnitt 6.10 hergeleitet. Dort hatte man gefunden (die bilinearen Terme, die zu den Massen und Mischungen beitragen, sind hier weggelassen):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{H\tilde{\chi}\tilde{\chi}} + \mathcal{L}_{\phi\tilde{\chi}\tilde{\chi}} \\
&\quad = g \overline{\tilde{H}_{1,L}} \tilde{W}_R^+ \left(H^- \sin\beta + \phi^- \cos\beta\right) - \sqrt{2}\, e \overline{\tilde{H}_L^-} \tilde{A}_R \left(H^- \sin\beta + \phi^- \cos\beta\right) \\
&\qquad + \frac{g_Z}{2} \overline{\tilde{H}_{1,L}} \tilde{Z}_R^0 \left(H^0 \cos\alpha - h^0 \sin\alpha + \mathrm{i}(A^0 \sin\beta + \phi^0 \cos\beta\right) \\
&\qquad - \frac{g_Z}{\sqrt{2}} \left(1 - 2\sin^2\theta_W\right) \overline{\tilde{H}_L^-} \tilde{Z}_R^0 \left(H^- \sin\beta + \phi^- \cos\beta\right) \\
&\qquad + \frac{1}{\sqrt{2}} g \overline{\tilde{H}_L^-} \tilde{W}_R^- \left(H^0 \cos\alpha - h^0 \sin\alpha + \mathrm{i}(A^0 \sin\beta + \phi^0 \cos\beta\right) \\
&\qquad + \sqrt{2} e \overline{\tilde{H}_L^+} \tilde{A}_R \left(H^+ \cos\beta - \phi^+ \sin\beta\right) \\
&\qquad + \frac{g_Z}{\sqrt{2}} \left(1 - 2\sin^2\theta_W\right) \overline{\tilde{H}_L^+} \tilde{Z}_R^0 \left(H^+ \cos\beta - \phi^+ \sin\beta\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{g_Z}{2} \overline{\tilde{H}_{2,L}} \tilde{Z}^0_R \left(H^0 \sin\alpha + h^0 \cos\alpha + \mathrm{i}(A^0 \cos\beta - \phi^0 \sin\beta)\right) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} g \overline{\tilde{H}^+_L} \tilde{W}^+_R \left(H^0 \sin\alpha + h^0 \cos\alpha + \mathrm{i}(A^0 \cos\beta - \phi^0 \sin\beta)\right) \\
&+ g \overline{\tilde{H}_{2,L}} \tilde{W}^-_R \left(H^+ \cos\beta - \phi^+ \sin\beta\right) + \text{h.c.} \qquad (7.480)
\end{aligned}
$$

Die Kopplung zweier Neutralinos an die skalaren Higgs-Bosonen H^0 und h^0 und das pseudoskalare Higgs-Boson A^0 lauten:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^0\tilde{\chi}^0 H^0} &= \frac{g_Z}{2} \left[\cos\alpha \overline{\tilde{H}_1} \tilde{Z}^0 - \sin\alpha \overline{\tilde{H}_2} \tilde{Z}^0 \right] H^0 \\
&= \frac{g}{2} \sum_{i,j} \Big[\overline{\tilde{\chi}^0_{i,L}} \tilde{\chi}^0_{j,R} \cdot \eta_i \eta_j \left(N_{j2} - \tan\theta_W N_{j1}\right) \left(\cos\alpha N_{i3} - \sin\alpha N_{i4}\right) \\
&\qquad + \overline{\tilde{\chi}^0_{i,R}} \tilde{\chi}^0_{j,L} \cdot \eta_i^* \eta_j^* \left(N^*_{j2} - \tan\theta_W N^*_{j1}\right) \left(\cos\alpha N^*_{i3} - \sin\alpha N^*_{i4}\right) \Big] H^0 \\
&= \frac{g}{4} \sum_i \overline{\tilde{\chi}^0_i} \left(s^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{ii} + \mathrm{i}\gamma^5 p^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{ii} \right) \tilde{\chi}^0_i H^0 \\
&\qquad + \frac{g}{2} \sum_{i<j} \overline{\tilde{\chi}^0_i} \left(s^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{ij} + \mathrm{i}\gamma^5 p^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{ij} \right) \tilde{\chi}^0_j H^0 \qquad (7.481)
\end{aligned}
$$

Hierbei wurden folgende Definitionen gemacht:

$$
\begin{aligned}
s^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{ij} &= \Re\Big[\eta_i \eta_j \left(N_{i2} - \tan\theta_W N_{i1}\right) \left(\cos\alpha N_{j3} - \sin\alpha N_{j4}\right) + (i \leftrightarrow j) \Big] \\
p^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{ij} &= \Im\Big[\eta_i \eta_j \left(N_{i2} - \tan\theta_W N_{i1}\right) \left(\cos\alpha N_{j3} - \sin\alpha N_{j4}\right) + (i \leftrightarrow j) \Big] \qquad (7.482)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Sind die Parameter m_{Wino}, m_{Bino} und μ reell, dann verschwindet der pseudoskalare Anteil bei der Kopplung an zwei identische Neutralinos. Durch die Ersetzung $\cos\alpha \to -\sin\alpha$, $\sin\alpha \to \cos\alpha$ läßt sich der Vertex $h^0\tilde{\chi}^0\tilde{\chi}^0$ gewinnen:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^0\tilde{\chi}^0 h} &= \frac{g}{4} \sum_i \overline{\tilde{\chi}^0_i} \left(s^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h}_{ii} + \mathrm{i}\gamma^5 p^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h}_{ii} \right) \tilde{\chi}^0_i h^0 \\
&\qquad + \frac{g}{2} \sum_{i<j} \overline{\tilde{\chi}^0_i} \left(s^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h}_{ij} + \mathrm{i}\gamma^5 p^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h}_{ij} \right) \tilde{\chi}^0_j h^0 \qquad (7.483)
\end{aligned}
$$

mit den neuen Kopplungskonstanten

$$
\begin{aligned}
s^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h}_{ij} &= -\Re\Big[\eta_i \eta_j \left(N_{i2} - \tan\theta_W N_{i1}\right) \left(\sin\alpha N_{j3} + \cos\alpha N_{j4}\right) + (i \leftrightarrow j) \Big] \\
p^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h}_{ij} &= -\Im\Big[\eta_i \eta_j \left(N_{i2} - \tan\theta_W N_{i1}\right) \left(\sin\alpha N_{j3} + \cos\alpha N_{j4}\right) + (i \leftrightarrow j) \Big] \\
&\qquad (7.484)
\end{aligned}
$$

Die Rechnung für die Kopplung an das A^0-Boson wird wieder vollständig durchgeführt.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^0\tilde{\chi}^0 A^0} &= \frac{\mathrm{i}g_Z}{2}\left[\sin\beta\left(\overline{\tilde{H}_{1,L}}\tilde{Z}^0_R - \overline{\tilde{H}_{1,R}}\tilde{Z}^0_L\right) - \cos\beta\left(\overline{\tilde{H}_{2,L}}\tilde{Z}^0_R - \overline{\tilde{H}_{2,R}}\tilde{Z}^0_L\right)\right]A^0 \\
&= \sum_{i,j}\frac{\mathrm{i}g}{2}\,\overline{\tilde{\chi}^0_{i,L}}\tilde{\chi}^0_{j,R}A^0\cdot\eta_i\eta_j\left(N_{i3}\sin\beta - N_{i4}\cos\beta\right)\left(N_{j2} - N_{j1}\tan\theta_W\right) \\
&\quad - \sum_{i,j}\frac{\mathrm{i}g}{2}\,\overline{\tilde{\chi}^0_{i,R}}\tilde{\chi}^0_{j,L}A^0\cdot\eta_i^*\eta_j^*\left(N^*_{i3}\sin\beta - N^*_{i4}\cos\beta\right)\left(N^*_{j2} - N^*_{j1}\tan\theta_W\right) \\
&= \frac{g}{4}\sum_i\overline{\tilde{\chi}^0_i}\left(s^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A}_{ii} + p^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A}_{ii}\mathrm{i}\gamma^5\right)\tilde{\chi}^0_i A^0 \\
&\qquad + \frac{g}{2}\sum_{i<j}\overline{\tilde{\chi}^0_i}\left(s^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A}_{ij} + p^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A}_{ij}\mathrm{i}\gamma^5\right)\tilde{\chi}^0_i A^0
\end{aligned} \tag{7.485}$$

mit den Kopplungskonstanten

$$\begin{aligned}
s^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A}_{ij} &= -\Im\Big[\eta_i\eta_j\left(N_{i2} - N_{i1}\tan\theta_W\right)\left(N_{j3}\sin\beta - N_{j4}\cos\beta\right) + (i\leftrightarrow j)\Big] \\
p^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A}_{ij} &= \Re\Big[\eta_i\eta_j\left(N_{i2} - N_{i1}\tan\theta_W\right)\left(N_{j3}\sin\beta - N_{j4}\cos\beta\right) + (i\leftrightarrow j)\Big].
\end{aligned} \tag{7.486}$$

Hier fällt bei der Kopplung an zwei identische Neutralinos im Falle reeller Mischungsparameter der skalare Anteil weg!

Durch die Ersetzungen $\sin\beta \to \cos\beta$ und $\cos\beta \to -\sin\beta$ lassen sich sofort die Kopplungen der Neutralinos an das neutrale Goldstone-Boson ϕ^0 gewinnen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^0\tilde{\chi}^0\phi^0} &= \frac{g}{4}\sum_i\overline{\tilde{\chi}^0_i}\left(s^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi}_{ii} + p^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi}_{ii}\mathrm{i}\gamma^5\right)\tilde{\chi}^0_i\phi^0 \\
&\qquad + \frac{g}{2}\sum_{i<j}\overline{\tilde{\chi}^0_i}\left(s^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi}_{ij} + p^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi}_{ij}\mathrm{i}\gamma^5\right)\tilde{\chi}^0_i\phi^0.
\end{aligned} \tag{7.487}$$

Hier lauten die Kopplungskonstanten

$$\begin{aligned}
s^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi}_{ij} &= -\Im\Big[\eta_i\eta_j\left(N_{i2} - N_{i1}\tan\theta_W\right)\left(N_{j3}\cos\beta + N_{j4}\sin\beta\right) + (i\leftrightarrow j)\Big] \\
p^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi}_{ij} &= \Re\Big[\eta_i\eta_j\left(N_{i2} - N_{i1}\tan\theta_W\right)\left(N_{j3}\cos\beta + N_{j4}\sin\beta\right) + (i\leftrightarrow j)\Big].
\end{aligned} \tag{7.488}$$

Die Kopplungen der (geladenen) Winos an die geladenen Higgsinos und neutralen Higgs-Bosonen resultieren aus den folgenden Termen:

$$\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^\pm H} = \frac{g}{\sqrt{2}}\left[\left(\overline{\tilde{H}^-_L}\tilde{W}^-_R + \overline{\tilde{H}^+_R}\tilde{W}^+_L\right)\cos\alpha + \left(\overline{\tilde{H}^+_L}\tilde{W}^+_R + \overline{\tilde{H}^-_R}\tilde{W}^-_L\right)\sin\alpha\right]H^0$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i,j} \Big[\Big(\overline{\tilde{\chi}^-_{i,L}} U_{i2} V_{j1} \tilde{\chi}^-_{j,R} + \overline{\tilde{\chi}^+_{i,R}} U^*_{i2} V^*_{j1} \tilde{\chi}^+_{j,L} \Big) \cos\alpha \\
&\qquad + \Big(\overline{\tilde{\chi}^+_{i,L}} V_{i2} U_{j1} \tilde{\chi}^-_{j,R} + \overline{\tilde{\chi}^-_{i,R}} V^*_{i2} U^*_{j1} \tilde{\chi}^-_{j,L} \Big) \sin\alpha \Big] H^0 \\
&= \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i,j} \Big[\Big(\overline{\tilde{\chi}^+_{j,L}} U_{i2} V_{j1} \tilde{\chi}^+_{i,R} + \overline{\tilde{\chi}^+_{i,R}} U^*_{i2} V^*_{j1} \tilde{\chi}^+_{j,L} \Big) \cos\alpha \\
&\qquad + \Big(\overline{\tilde{\chi}^+_{i,L}} V_{i2} U_{j1} \tilde{\chi}^+_{j,R} + \overline{\tilde{\chi}^+_{j,R}} V^*_{i2} U^*_{j1} \tilde{\chi}^+_{i,L} \Big) \sin\alpha \Big] H^0 \\
&= \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i,j} \Big[\Big(\overline{\tilde{\chi}^+_{i,L}} U_{j2} V_{i1} \tilde{\chi}^+_{j,R} + \overline{\tilde{\chi}^+_{i,R}} U^*_{i2} V^*_{j1} \tilde{\chi}^+_{j,L} \Big) \cos\alpha \\
&\qquad + \Big(\overline{\tilde{\chi}^+_{i,L}} V_{i2} U_{j1} \tilde{\chi}^+_{j,R} + \overline{\tilde{\chi}^+_{i,R}} V^*_{j2} U^*_{i1} \tilde{\chi}^+_{j,L} \Big) \sin\alpha \Big] H^0 \\
&= \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i,j} \overline{\tilde{\chi}^+_i} \left(L^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{ij} P_L + R^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{ij} P_R \right) \tilde{\chi}^+_j H^0
\end{aligned}
\tag{7.489}
$$

mit den Projektoren auf rechts- und linkshändige Komponenten sowie den Kopplungskonstanten

$$
\begin{aligned}
R^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{ij} &= V_{i1} U_{j2} \cos\alpha + V_{i2} U_{j1} \sin\alpha \\
L^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{ij} &= U^*_{i2} V^*_{j1} \cos\alpha + U^*_{i1} V^*_{j2} \sin\alpha
\end{aligned}
\tag{7.490}
$$

Auch hier kann man auf reelle Mischungsparameter der Charginos spezialisieren und gelangt dann zu folgenden Kopplungskonstanten:

$$
\begin{aligned}
L^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{11} &= R^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{11} = \cos\alpha\cos\phi_+\sin\phi_- + \sin\alpha\sin\phi_+\cos\phi_- \\
L^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{22} &= R^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{22} = -\epsilon_{\tilde{\chi}} \left(\cos\alpha\sin\phi_+\cos\phi_- + \sin\alpha\cos\phi_+\sin\phi_- \right) \\
R^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{12} &= L^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{21} = \cos\alpha\cos\phi_+\cos\phi_- - \sin\alpha\sin\phi_+\sin\phi_- \\
L^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{12} &= R^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}_{21} = \epsilon_{\tilde{\chi}} \left(-\cos\alpha\sin\phi_+\sin\phi_- + \sin\alpha\cos\phi_+\cos\phi_- \right)
\end{aligned}
\tag{7.491}
$$

In diesem Fall werden die Kopplungen an zwei identische Charginos also rein skalar.

Wiederum kann die Kopplung an die h^0-Bosonen durch die Ersetzung $\cos\alpha \to -\sin\alpha$, $\sin\alpha \to \cos\alpha$ erhalten werden.

$$
\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^\pm h} = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i,j} \overline{\tilde{\chi}^+_i} \left(L^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h}_{ij} P_L + R^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h}_{ij} P_R \right) \tilde{\chi}^+_j h^0
\tag{7.492}
$$

mit

$$
R^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h}_{ij} = -V_{i1} U_{j2} \sin\alpha + V_{i2} U_{j1} \cos\alpha
$$

$$L_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h} = -U_{i2}^* V_{j1}^* \sin\alpha + U_{i1}^* V_{j2}^* \cos\alpha \tag{7.493}$$

Im reellen Fall gilt:

$$\begin{aligned}
L_{11}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h} &= R_{11}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h} = -\sin\alpha\cos\phi_+\sin\phi_- + \cos\alpha\sin\phi_+\cos\phi_- \\
L_{22}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h} &= R_{22}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h} = \epsilon_{\tilde{\chi}}\left(\sin\alpha\sin\phi_+\cos\phi_- - \cos\alpha\cos\phi_+\sin\phi_-\right) \\
R_{12}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h} &= L_{21}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h} = -\sin\alpha\cos\phi_+\cos\phi_- - \cos\alpha\sin\phi_+\sin\phi_- \\
L_{12}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h} &= R_{21}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h} = \epsilon_{\tilde{\chi}}\left(\sin\alpha\sin\phi_+\sin\phi_- + \cos\alpha\cos\phi_+\cos\phi_-\right)
\end{aligned} \tag{7.494}$$

Die Kopplung an das pseudoskalare Higgs lautet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^\pm A} &= \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}\left[\left(\overline{\tilde{H}_L^-}\tilde{W}_R^- - \overline{\tilde{H}_R^+}\tilde{W}_L^+\right)\sin\beta + \left(\overline{\tilde{H}_L^+}\tilde{W}_R^+ - \overline{\tilde{H}_R^-}\tilde{W}_L^-\right)\cos\beta\right]A^0 \\
&= \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}\sum_{i,j}\left[\left(\overline{\tilde{\chi}_{i,L}^-}U_{i2}V_{j1}\tilde{\chi}_{j,R}^- - \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^+}U_{i2}^*V_{j1}^*\tilde{\chi}_{j,L}^+\right)\sin\beta\right. \\
&\qquad \left. + \left(\overline{\tilde{\chi}_{i,L}^+}V_{i2}U_{j1}\tilde{\chi}_{j,R}^- - \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^-}V_{i2}^*U_{j1}^*\tilde{\chi}_{j,L}^-\right)\cos\beta\right]A^0 \\
&= \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}\sum_{i,j}\left[\left(\overline{\tilde{\chi}_{i,L}^+}U_{j2}V_{i1}\tilde{\chi}_{j,R}^+ - \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^+}U_{i2}^*V_{j1}^*\tilde{\chi}_{j,L}^+\right)\sin\beta\right. \\
&\qquad \left. + \left(\overline{\tilde{\chi}_{i,L}^+}V_{i2}U_{j1}\tilde{\chi}_{j,R}^+ - \overline{\tilde{\chi}_{i,R}^+}V_{j2}^*U_{i1}^*\tilde{\chi}_{j,L}^+\right)\cos\beta\right]A^0 \\
&= \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}\sum_{i,j}\overline{\tilde{\chi}_i^+}\left(L_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A}P_L + R_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A}P_R\right)\tilde{\chi}_j^+ A^0
\end{aligned} \tag{7.495}$$

mit den weiteren Matrizen

$$\begin{aligned}
R_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A} &= V_{i1}U_{j2}\sin\beta + V_{i2}U_{j1}\cos\beta \\
L_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A} &= -U_{i2}^*V_{j1}^*\sin\beta - U_{i1}^*V_{j2}^*\cos\beta
\end{aligned} \tag{7.496}$$

Die Kopplungskonstanten für reelle Mischungsparameter lauten:

$$\begin{aligned}
R_{11}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A} &= -L_{11}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A} = \sin\beta\cos\phi_+\sin\phi_- + \cos\beta\sin\phi_+\cos\phi_- \\
R_{22}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A} &= -L_{22}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A} = -\epsilon_{\tilde{\chi}}\left(\sin\beta\sin\phi_+\cos\phi_- + \cos\beta\cos\phi_+\sin\phi_-\right) \\
R_{12}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A} &= -L_{21}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A} = \sin\beta\cos\phi_+\cos\phi_- - \cos\beta\sin\phi_+\sin\phi_- \\
L_{12}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A} &= -R_{21}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A} = -\epsilon_{\tilde{\chi}}\left(-\sin\beta\sin\phi_+\sin\phi_- + \cos\beta\cos\phi_+\cos\phi_-\right)
\end{aligned} \tag{7.497}$$

Hier bleibt dann natürlich nur der pseudoskalare Anteil übrig, wenn die Kopplung an zwei identische Neutralinos betrachtet wird.

Durch die Ersetzung $\cos\beta \to -\sin\beta$ und $\sin\beta \to \cos\beta$ gelagt man zu den Kopplungen an das neutrale Goldstone-Boson:

$$\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^\pm\phi} = \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}\sum_{i,j}\overline{\tilde{\chi}_i^+}\left(L_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi}P_L + R_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi}P_R\right)\tilde{\chi}_j^+\phi^0 \tag{7.498}$$

Nun besitzen die Kopplungskonstanten die Gestalt

$$\begin{aligned} R_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi} &= V_{i1}U_{j2}\cos\beta - V_{i2}U_{j1}\sin\beta \\ L_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi} &= -U_{i2}^*V_{j1}^*\cos\beta + U_{i1}^*V_{j2}^*\sin\beta, \end{aligned} \tag{7.499}$$

und im Falle reeller Parameter

$$\begin{aligned} R_{11}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi} &= -L_{11}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi} = \cos\beta\cos\phi_+\sin\phi_- - \sin\beta\sin\phi_+\cos\phi_- \\ R_{22}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi} &= -L_{22}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi} = -\epsilon_{\tilde{\chi}}\left(\cos\beta\sin\phi_+\cos\phi_- - \sin\beta\cos\phi_+\sin\phi_-\right) \\ R_{12}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi} &= -L_{21}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi} = \cos\beta\cos\phi_+\cos\phi_- + \sin\beta\sin\phi_+\sin\phi_- \\ L_{12}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi} &= -R_{21}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi} = \epsilon_{\tilde{\chi}}\left(\cos\beta\sin\phi_+\sin\phi_- + \sin\beta\cos\phi_+\cos\phi_-\right) \end{aligned} \tag{7.500}$$

Es bleiben noch die Vertizes der Form Chargino - Neutralino - geladenes Higgs-Boson übrig. Der Wechselwirkungsterm ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\chi}^0\tilde{\chi}^\pm H^\mp} = & -\sqrt{2}e\overline{\tilde{H}_L^-}\tilde{A}_R H^-\sin\beta + g\overline{\tilde{H}_{1,L}}\tilde{W}_R^+H^-\sin\beta \\ & -\frac{g_Z}{\sqrt{2}}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{H}_L^-}\tilde{Z}_R^0H^-\sin\beta + \sqrt{2}e\overline{\tilde{H}_L^+}\tilde{A}_RH^+\cos\beta \\ & +\frac{g_Z}{\sqrt{2}}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{H}_L^+}\tilde{Z}_R^0H^+\cos\beta \\ & + g\overline{\tilde{H}_{2,L}}\tilde{W}_R^-H^+\cos\beta + \text{h.c.} \\ = & -\sqrt{2}\,\overline{\tilde{A}_L}\tilde{H}_R^+H^-\sin\beta + g\overline{\tilde{H}_{1,L}}\tilde{W}_R^+H^-\sin\beta \\ & -\frac{g_Z}{\sqrt{2}}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{Z}_L^0}\tilde{H}_R^+H^-\sin\beta + \sqrt{2}e\overline{\tilde{A}_R}\tilde{H}_L^+H^-\cos\beta \\ & +\frac{g}{\sqrt{2}}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{Z}_R^0}\tilde{H}_L^+H^-\cos\beta + g\overline{\tilde{H}_{2,R}}\tilde{W}_L^+H^-\cos\beta \\ & -\sqrt{2}\,\overline{\tilde{H}_R^+}\tilde{A}_LH^+\sin\beta + g\overline{\tilde{W}_R^+}\tilde{H}_{1,L}H^+\sin\beta \\ & -\frac{g_Z}{\sqrt{2}}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{H}_R^+}\tilde{Z}_L^0H^+\sin\beta + \sqrt{2}e\overline{\tilde{H}_L^+}\tilde{A}_RH^+\cos\beta \\ & +\frac{g_Z}{\sqrt{2}}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{H}_L^+}\tilde{Z}_R^0H^+\cos\beta + g\overline{\tilde{W}_L^+}\tilde{H}_{2,R}H^+\cos\beta \\ = & \sum_{i,j}\left\{-\sqrt{2}e\overline{\tilde{\chi}_{i,L}^0}\eta_iN_{i2}U_{j2}\tilde{\chi}_{j,R}^+H^-\sin\beta\sin\theta_W\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \sqrt{2}e\overline{\tilde{\chi}^0_{i,L}}\eta_i N_{i1} U_{j2} \tilde{\chi}^+_{j,R} H^- \sin\beta\cos\theta_W \\
&+ g\overline{\tilde{\chi}^0_{i,L}}\eta_i N_{i3} U_{j1} \tilde{\chi}^+_{j,R} H^- \sin\beta \\
&- \frac{g_Z}{\sqrt{2}}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{\chi}^0_{i,L}}\eta_i N_{i2} U_{j2} \tilde{\chi}^+_{j,R} H^- \sin\beta\cos\theta_W \\
&+ \frac{g_Z}{\sqrt{2}}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{\chi}^0_{i,L}}\eta_i N_{i1} U_{j2} \tilde{\chi}^+_{j,R} H^- \sin\beta\sin\theta_W \\
&+ \sqrt{2}e\overline{\tilde{\chi}^0_{i,R}}\eta_i^* N_{i2}^* V_{j2}^* \tilde{\chi}^+_{j,L} H^- \cos\beta\sin\theta_W \\
&+ \sqrt{2}e\overline{\tilde{\chi}^0_{i,R}}\eta_i^* N_{i1}^* V_{j2}^* \tilde{\chi}^+_{j,L} H^- \cos\beta\cos\theta_W \\
&+ \frac{g_Z}{\sqrt{2}}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{\chi}^0_{i,R}}\eta_i^* N_{i2}^* V_{j2}^* \tilde{\chi}^+_{j,L} H^- \cos\beta\cos\theta_W \\
&- \frac{g_Z}{\sqrt{2}}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{\chi}^0_{i,R}}\eta_i^* N_{i1}^* V_{j2}^* \tilde{\chi}^+_{j,L} H^- \cos\beta\sin\theta_W \\
&+ g\overline{\tilde{\chi}^0_{i,R}}\eta_i^* N_{i4}^* V_{j1}^* \tilde{\chi}^+_{j,L} H^- \cos\beta \\
&- \sqrt{2}e\overline{\tilde{\chi}^+_{i,R}}U_{i2}^*\eta_j^* N_{j2}^* \tilde{\chi}^0_{j,L} H^+ \sin\beta\sin\theta_W \\
&- \sqrt{2}e\overline{\tilde{\chi}^+_{i,R}}U_{i2}^*\eta_j^* N_{j1}^* \tilde{\chi}^0_{j,L} H^+ \sin\beta\cos\theta_W \\
&+ g\overline{\tilde{\chi}^+_{i,R}}U_{i1}^*\eta_j^* N_{j3}^* \tilde{\chi}^0_{j,L} H^+ \sin\beta \\
&- \frac{g_Z}{\sqrt{2}}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{\chi}^+_{i,R}}U_{i2}^*\eta_j^* N_{j2}^* \tilde{\chi}^0_{j,L} H^+ \sin\beta\cos\theta_W \\
&+ \frac{g_Z}{\sqrt{2}}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{\chi}^+_{i,R}}U_{i2}^*\eta_j^* N_{j1}^* \tilde{\chi}^0_{j,L} H^+ \sin\beta\sin\theta_W \\
&+ \sqrt{2}e\overline{\tilde{\chi}^+_{i,L}}V_{i2}\eta_j N_{j2} \tilde{\chi}^0_{j,R} H^+ \cos\beta\sin\theta_W \\
&+ \sqrt{2}e\overline{\tilde{\chi}^+_{i,L}}V_{i2}\eta_j N_{j1} \tilde{\chi}^0_{j,R} H^+ \cos\beta\cos\theta_W \\
&+ \frac{g_Z}{\sqrt{2}}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{\chi}^+_{i,L}}V_{i2}\eta_j N_{j2} \tilde{\chi}^0_{j,R} H^+ \cos\beta\cos\theta_W \\
&- \frac{g_Z}{\sqrt{2}}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\overline{\tilde{\chi}^+_{i,L}}V_{i2}\eta_j N_{j1} \tilde{\chi}^0_{j,R} H^+ \cos\beta\sin\theta_W \\
&\left.+ g\overline{\tilde{\chi}^+_{i,L}}V_{i1}\eta_j N_{j4} \tilde{\chi}^0_{j,R} H^+ \cos\beta\right\} \\
= {}& g\sum_{i,j}\overline{\tilde{\chi}^0_i}\left(L_{ij}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0 H^\mp}P_L + R_{ij}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0 H^\mp}P_R\right)\tilde{\chi}^+_j H^- \\
&+ g\sum_{i,j}\overline{\tilde{\chi}^+_i}\left((R_{ji}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0 H^\mp})^* P_L + (L_{ji}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0 H^\mp})^* P_R\right)\tilde{\chi}^0_j H^+
\end{aligned}
\tag{7.501}
$$

mit den Kopplungskonstanten

$$
L_{ij}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0 H^\mp} = \cos\beta\,\eta_i^*\left[N_{i4}^* V_{j1}^* + \frac{1}{\sqrt{2}}V_{j2}^*\left(N_{i2}^* + \tan\theta_W N_{i1}^*\right)\right]
$$

$$R_{ij}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0 H^\mp} = \sin\beta\eta_i \left[N_{i3}U_{j1} - \frac{1}{\sqrt{2}}U_{j2}\left(N_{i2} + \tan\theta_W N_{i1}\right)\right] \tag{7.502}$$

Damit kann man bei reellen Mischungsparametern spezialisieren auf

$$\begin{aligned}
L_{i1}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0 H^\mp} &= \cos\beta\eta_i^* \left[N_{i4}\cos\phi_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\phi_+\left(N_{i2} + \tan\theta_W N_{i1}\right)\right] \\
R_{i1}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0 H^\mp} &= \sin\beta\eta_i \left[N_{i3}\cos\phi_- - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\phi_-\left(N_{i2} + \tan\theta_W N_{i1}\right)\right] \\
L_{i2}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0 H^\mp} &= \cos\beta\eta_i^*\epsilon_{\tilde{\chi}^\pm} \left[-N_{i4}\sin\phi_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi_+\left(N_{i2} + \tan\theta_W N_{i1}\right)\right] \\
R_{i2}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0 H^\mp} &= \sin\beta\eta_i \left[-N_{i3}\sin\phi_- - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi_-\left(N_{i2} + \tan\theta_W N_{i1}\right)\right].
\end{aligned} \tag{7.503}$$

Die entsprechenden Terme mit den geladenen Goldstone-Bosonen erhält man durch die übliche Ersetzung $\cos\beta \to \sin\beta$ und $\sin\beta \to \cos\beta$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^0\tilde{\chi}^\pm\phi^\mp} = g\sum_{i,j} \overline{\tilde{\chi}_i^0}\left(L_{ij}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0\phi^\mp}P_L + R_{ij}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0\phi^\mp}P_R\right)\tilde{\chi}_j^+\phi^- \\
+ g\sum_{i,j} \overline{\tilde{\chi}_i^+}\left((R_{ji}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0\phi^\mp})^* P_L + (L_{ji}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0\phi^\mp})^* P_R\right)\tilde{\chi}_j^0\phi^+,
\end{aligned} \tag{7.504}$$

die Kopplungskonstanten sind

$$\begin{aligned}
L_{ij}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0\phi^\mp} &= -\sin\beta\eta_i^* \left[N_{i4}^* V_{j1}^* + \frac{1}{\sqrt{2}}V_{j2}^*\left(N_{i2}^* + \tan\theta_W N_{i1}^*\right)\right] \\
R_{ij}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0\phi^\mp} &= \cos\beta\eta_i \left[N_{i3}U_{j1} - \frac{1}{\sqrt{2}}U_{j2}\left(N_{i2} + \tan\theta_W N_{i1}\right)\right]
\end{aligned} \tag{7.505}$$

sowie in der reellen Spezialisierung

$$\begin{aligned}
L_{i1}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0\phi^\mp} &= -\sin\beta\eta_i^* \left[N_{i4}\cos\phi_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\phi_+\left(N_{i2} + \tan\theta_W N_{i1}\right)\right] \\
R_{i1}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0\phi^\mp} &= \cos\beta\eta_i \left[N_{i3}\cos\phi_- - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\phi_-\left(N_{i2} + \tan\theta_W N_{i1}\right)\right] \\
L_{i2}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0\phi^\mp} &= -\sin\beta\eta_i^*\epsilon_{\tilde{\chi}^\pm} \left[-N_{i4}\sin\phi_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi_+\left(N_{i2} + \tan\theta_W N_{i1}\right)\right] \\
R_{i2}^{\tilde{\chi}^\pm\tilde{\chi}^0\phi^\mp} &= \cos\beta\eta_i \left[-N_{i3}\sin\phi_- - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi_-\left(N_{i2} + \tan\theta_W N_{i1}\right)\right].
\end{aligned} \tag{7.506}$$

7.9 Weitere Wechselwirkungen der Gauginos

7.9.1 Wechselwirkungen der Gluinos

An erster Stelle sollen hier die (weiteren) Wechselwirkungen der Gluinos diskutiert werden, da diese nicht mit den anderen Gauginos oder Higgsinos mischen und somit leicht separiert werden können. Die Vertizes sind vom Typ Gluino - Quark - Squark. Aus (**??**) schreibt man ab:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\tilde{g}\tilde{q}q} = &\ 2\sqrt{2}g_s \sum_{i=1}^{3}\sum_{a=1}^{8}\sum_{kl} \Re\Big[(\overline{q_{L,i,k}}\, T^a_{kl}\, \tilde{G}^a)\, Q_{i,l}\Big] \\ &+ 2\sqrt{2}g_s \sum_{i=1}^{3}\sum_{a=1}^{8}\sum_{kl} \Re\Big[(\overline{u^c_{L,i,k}}\,(-T^a_{kl})^*\, \tilde{G}^a)\, \bar{U}_{i,l}\Big] \\ &+ 2\sqrt{2}g_s \sum_{i=1}^{3}\sum_{a=1}^{8}\sum_{kl} \Re\Big[(\overline{d^c_{L,i,k}}\,(-T^a_{kl})^*\, \tilde{G}^a)\, \bar{D}_{i,l}\Big] \end{aligned} \tag{7.507}$$

Nun kann man die Terme, die die ladungskonjugierten Spinoren enthalten, umschreiben, wenn man bedenkt, daß für ein allgemeines Quarkfeld der Spinor

$$q = \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} \tag{7.508}$$

ist, während er für das Antiquarkfeld

$$q^c = \begin{pmatrix} \eta \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} \tag{7.509}$$

lautet. Das Gluino ist ein Majorana-Fermion mit dem Bispinor

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \lambda_s \\ \bar{\lambda}_s \end{pmatrix}. \tag{7.510}$$

Damit gilt also

$$\overline{q^c_L}\tilde{G}^a = \overline{q^c_L}\tilde{G}^a_R = \bar{\eta}\bar{\lambda}_s = \overline{\tilde{G}^a_L}q_R = \overline{\tilde{G}^a}q_R \tag{7.511}$$

Da der gesamte Ausdruck diagonal in den Generationen ist, können wir hier die Generationen ignorieren. Insgesamt gewinnt man den folgenden Ausdruck für die Wechselwirkungsterme:

$$\mathcal{L}_{\tilde{g}\tilde{q}q} = \sqrt{2}g_s\Big[\Big(\overline{u_{L,k}}T^a_{kl}\tilde{G}^a_R\Big)\,\tilde{u}_{L,l} + \Big(\overline{d_{L,k}}T^a_{kl}\tilde{G}^a_R\Big)\,\tilde{d}_{L,l}$$

$$- \left(\overline{u_{R,k}} T^a_{kl} \tilde{G}^a_L\right) \tilde{u}_{R,l} - \left(\overline{d_{R,k}} T^a_{kl} \tilde{G}^a_L\right) \tilde{d}_{R,l}\Big] \qquad (7.512)$$

Man sieht, daß sich die Kopplungen der up- und down-Quarks völlig identisch verhalten, so daß wir von nun an nur noch Quarks betrachten, damit aber sowohl unterschiedliche Flavours wie up- und down-Typen meinen.

Damit erhält man

$$\mathcal{L}_{q\tilde{q}\tilde{g}} = \sqrt{2} g_s \left[(\overline{q_{L,k}} T^a_{kl} \tilde{G}^a_R) \tilde{q}_{L,l} - (\overline{q_{R,k}} T^a_{kl} \tilde{G}^a_L) \tilde{q}_{R,l} \right] + \text{h.c.} \qquad (7.513)$$

Nun muß man noch die Drehungen der links- und rechtshändigen Squarkfelder in die physikalischen Squarkfelder (6.110), (6.102) einsetzen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{q\tilde{q}\tilde{g}} =& \sqrt{2} g_s \Bigg[\tilde{q}_{1,l} \Big((\overline{q_{k,L}} T^a_{kl} \tilde{G}^a_R) \cos\theta_q - (\overline{q_{R,k}} T^a_{kl} \tilde{G}^a_L) \sin\theta \Big) \\ & - \tilde{q}_{2,l} \Big((\overline{\tilde{q}_{k,L}} T^a_{kl} \tilde{G}^a_R) \sin\theta + (\overline{q_{k,R}} T^a_{kl} \tilde{G}^a_L) \cos\theta \Big) \Bigg] + \text{h.c.}\end{aligned} \qquad (7.514)$$

7.9.2 Elektroschwache Gaugino-Wechselwirkungen

Für die Diskussion der letzten (!) verbleibenden Vertizes erweist es sich als sinnvoll, als Basiszustände der Neutralino-Diagonalisierung das Bino und neutrale Wino und nicht Photino und Zino gewählt zu haben. Hier kann man aus (6.17) wiederum die sieben relevanten Terme zusammenfassen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Gaugino-ew.}} =& 2\sqrt{2} g' \sum_{i=1}^{3} \Re\Big[(\overline{q_{L,i}} \frac{Y}{2} \tilde{B}) Q_i \Big] + 2\sqrt{2} g' \sum_{i=1}^{3} \Re\Big[(\overline{\ell_{L,i}} \frac{Y}{2} \tilde{B}) L_i \Big] \\ & + 2\sqrt{2} g' \sum_{i=1}^{3} \Re\Big[(\overline{u^c_{L,i}} \frac{Y}{2} \tilde{B}) \bar{U}_i \Big] + 2\sqrt{2} g' \sum_{i=1}^{3} \Re\Big[(\overline{d^c_{L,i}} \frac{Y}{2} \tilde{B}) \bar{D}_i \Big] \\ & + 2\sqrt{2} g' \sum_{i=1}^{3} \Re\Big[(\overline{e^c_{L,i}} \frac{Y}{2} \tilde{B}) \bar{E}_i \Big] \\ & + 2\sqrt{2} g \sum_{i=1}^{3} \sum_{a=1}^{3} \sum_{kl} \Re\Big[(\overline{q_{L,i,k}} T^a_{kl} \tilde{W}^a) Q_{i,l} \Big] \\ & + 2\sqrt{2} g \sum_{i=1}^{3} \sum_{a=1}^{3} \sum_{kl} \Re\Big[(\overline{\ell_{L,i,k}} T^a_{kl} \tilde{W}^a) L_{i,l} \Big]\end{aligned} \qquad (7.515)$$

Zudem hat man noch zwölf Terme aus dem Superpotential übrig:

$$
\begin{aligned}
&-\sum_k \frac{\sqrt{2}m_{l_k}}{v_1}\left(\overline{h^0_{1,R}}\ell^-_{k,L}\right)\tilde{\ell}^+_{R,k} - \sum_k \frac{\sqrt{2}m_{l_k}}{v_1}\left(\overline{h^0_{1,L}}\ell^-_{k,R}\right)\tilde{\ell}^+_{L,k}\\
&-\sum_k \frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}\left(\overline{h^0_{1,R}}d_{k,L}\right)\tilde{d}^*_{R,k} - \sum_k \frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}\left(\overline{h^0_{1,L}}d_{k,R}\right)\tilde{d}^*_{L,k}\\
&+\sum_k \frac{\sqrt{2}m_{l_k}}{v_1}\left(\overline{h^-_{1,R}}\nu_k\right)\tilde{\ell}^+_{R,k} + \sum_k \frac{\sqrt{2}m_{l_k}}{v_1}\left(\overline{h^-_{1,L}}\ell^-_{k,R}\right)\tilde{\nu}^*_k\\
&+\sum_{k,l} \frac{\sqrt{2}m_{d_l}}{v_1}\left(\overline{h^-_{1,R}}u_{k,L}\right)V^{CKM\,*}_{kl}\tilde{d}^*_{R,l} + \sum_{k,l} \frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}\left(\overline{h^-_{1,L}}d_{k,R}\right)V^{CKM}_{lk}\tilde{u}^*_{L,l}\\
&-\sum_k \frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\left(\overline{h^0_{2,R}}u_{k,L}\right)\tilde{u}^*_{R,k} - \sum_k \frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\left(\overline{h^0_{2,L}}u_{k,R}\right)\tilde{u}^*_{L,k}\\
&+\sum_{k,l} \frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\left(\overline{h^+_{2,L}}u_{k,R}\right)V^{CKM\,*}_{kl}\tilde{d}^*_{L,l} + \sum_{k,l} \frac{\sqrt{2}m_{u_l}}{v_2}\left(\overline{h^+_{2,R}}d_{k,L}\right)V^{CKM}_{lk}\tilde{u}^*_{R,l}\\
&+\text{h.c.}
\end{aligned}
\tag{7.516}
$$

Gewinnen wir daraus zunächst die Kopplungen an die Charginos. Man sammelt die folgenden Terme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^\pm f\tilde{f}} &= g\sum_{k,l}\overline{\tilde{W}^+}u_{L,k}V^{CKM\,*}_{kl}\tilde{d}^*_{L,l} + g\sum_{k,l}\overline{\tilde{W}^-}d_{k,L}V^{CKM}_{lk}\tilde{u}^*_{L,l}\\
&\quad + g\sum_k\overline{\tilde{W}^+}\nu_k\tilde{\ell}^+_{L,k} + g\sum_k\overline{\tilde{W}^-}\ell^-_{k,L}\tilde{\nu}^*_k + \sum_k\frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}\overline{\tilde{H}^+}\nu_k\tilde{\ell}^+_{R,k}\\
&\quad + \sum_k\frac{\sqrt{2}m_{\ell_k}}{v_1}\overline{\tilde{H}^-}\tilde{\ell}^-_{k,R}\tilde{\nu}^*_k + \sum_{k,l}\frac{\sqrt{2}m_{d_l}}{v_1}\overline{\tilde{H}^+}u_{k,L}V^{CKM\,*}_{kl}\tilde{d}^*_{R,l}\\
&\quad + \sum_{k,l}\frac{\sqrt{2}m_{d_k}}{v_1}\overline{\tilde{H}^-}d_{k,R}V^{CKM}_{lk}\tilde{u}^*_{L,l} + \sum_{k,l}\frac{\sqrt{2}m_{u_k}}{v_2}\overline{\tilde{H}^+}u_{k,R}V^{CKM\,*}_{kl}\tilde{d}^*_{L,l}\\
&\quad + \sum_{k,l}\frac{\sqrt{2}m_{u_l}}{v_2}\overline{\tilde{H}^-}d_{k,L}V^{CKM}_{lk}\tilde{u}^*_{R,l} + \text{h.c.}\\
&= g\sum_i\sum_k\overline{\tilde{\chi}^-_i}\left(V^*_{i1}P_L + \frac{m_{\ell_k}}{\sqrt{2}m_W\cos\beta}U_{i2}P_R\right)\ell^-_k\tilde{\nu}^*_k\\
&\quad + g\sum_i\sum_k\overline{\tilde{\chi}^+_i}U^*_{i1}P_L\nu_k\tilde{\ell}^+_{L,k} + g\sum_i\sum_k\overline{\tilde{\chi}^+_i}\frac{m_{\ell_k}}{\sqrt{2}m_W\cos\beta}U^*_{i2}P_L\nu_k\tilde{\ell}^+_{R,k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ g \sum_i \sum_{k,l} \overline{\tilde{\chi}_i^+} \left(U_{i1}^* P_L + \frac{m_{u_k}}{\sqrt{2} m_W \sin\beta} V_{i2} P_R \right) u_k V_{kl}^{CKM\,*} \tilde{d}_{L,l}^* \\
&+ g \sum_i \sum_{k,l} \overline{\tilde{\chi}_i^+} \frac{m_{d_l}}{\sqrt{2} m_W \cos\beta} U_{i2}^* V_{kl}^{CKM\,*} P_L u_k \tilde{d}_{R,l}^* \\
&+ g \sum_i \sum_{k,l} \overline{\tilde{\chi}_i^-} \left(V_{i1}^* P_L + \frac{m_{d_k}}{\sqrt{2} m_W \cos\beta} U_{i2} P_R \right) d_k V_{lk}^{CKM} \tilde{u}_{L,l}^* \\
&+ g \sum_i \sum_{k,l} \overline{\tilde{\chi}_i^-} \frac{m_{u_l}}{\sqrt{2} m_W \sin\beta} V_{i2}^* P_L d_k V_{lk}^{CKM} \tilde{u}_{R,l}^* + \text{h.c.}
\end{aligned}
\tag{7.517}
$$

Für den Fall reeller Mischungsparameter der Fermionen (μ, m_{Wino}, m_{Bino}) notieren wir die Kopplungen noch einmal explizit für die jeweiligen Charginos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^\pm f \tilde{f}} = {} & g \sum_k \overline{\tilde{\chi}_1^-} \left(\cos\phi_+ P_L + \frac{m_{\ell_k}}{\sqrt{2} m_W \cos\beta} \sin\phi_- P_R \right) \ell_k^- \tilde{\nu}_k^* \\
&+ g \sum_k \overline{\tilde{\chi}_2^-} \left(-\epsilon_{\tilde{\chi}^\pm} \sin\phi_+ P_L + \frac{m_{\ell_k}}{\sqrt{2} m_W \cos\beta} \cos\phi_- P_R \right) \ell_k^- \tilde{\nu}_k^* \\
&+ g \sum_k \overline{\tilde{\chi}_1^+} \cos\phi_- P_L \nu_k \tilde{\ell}_{L,k}^+ - g \sum_k \overline{\tilde{\chi}_2^+} \sin\phi_- P_L \nu_k \tilde{\ell}_{L,k}^+ \\
&+ g \sum_k \overline{\tilde{\chi}_1^+} \frac{m_{\ell_k}}{\sqrt{2} m_W \cos\beta} \sin\phi_- P_L \nu_k \tilde{\ell}_{R,k}^+ \\
&+ g \sum_k \overline{\tilde{\chi}_2^+} \frac{m_{\ell_k}}{\sqrt{2} m_W \cos\beta} \cos\phi_- P_L \nu_k \tilde{\ell}_{R,k}^+ \\
&+ g \sum_{k,l} \overline{\tilde{\chi}_1^+} \left(\cos\phi_- P_L + \frac{m_{u_k}}{\sqrt{2} m_W \sin\beta} \sin\phi_+ P_R \right) u_k V_{kl}^{CKM\,*} \tilde{d}_{L,l}^* \\
&+ g \sum_{k,l} \overline{\tilde{\chi}_2^+} \left(-\sin\phi_- P_L + \frac{m_{u_k}}{\sqrt{2} m_W \sin\beta} \epsilon_{\tilde{\chi}^\pm} \cos\phi_+ P_R \right) u_k V_{kl}^{CKM\,*} \tilde{d}_{L,l}^* \\
&+ g \sum_{k,l} \overline{\tilde{\chi}_1^+} \frac{m_{d_l}}{\sqrt{2} m_W \cos\beta} \sin\phi_- V_{kl}^{CKM\,*} P_L u_k \tilde{d}_{R,l}^* \\
&+ g \sum_{k,l} \overline{\tilde{\chi}_2^+} \frac{m_{d_l}}{\sqrt{2} m_W \cos\beta} \cos\phi_- V_{kl}^{CKM\,*} P_L u_k \tilde{d}_{R,l}^* \\
&+ g \sum_{k,l} \overline{\tilde{\chi}_1^-} \left(\cos\phi_+ P_L + \frac{m_{d_k}}{\sqrt{2} m_W \cos\beta} \sin\phi_- P_R \right) d_k V_{lk}^{CKM} \tilde{u}_{L,l}^* \\
&+ g \sum_{k,l} \overline{\tilde{\chi}_2^-} \left(-\epsilon_{\tilde{\chi}^\pm} \sin\phi_+ P_L + \frac{m_{d_k}}{\sqrt{2} m_W \cos\beta} \cos\phi_- P_R \right) d_k V_{lk}^{CKM} \tilde{u}_{L,l}^*
\end{aligned}
$$

$$+ g \sum_{k,l} \overline{\tilde{\chi}_1^-} \frac{m_{u_l}}{\sqrt{2} m_W \sin\beta} \sin\phi_+ P_L d_k V_{lk}^{CKM} \tilde{u}_{R,l}^*$$
$$+ g \sum_{k,l} \overline{\tilde{\chi}_2^-} \frac{m_{u_l}}{\sqrt{2} m_W \sin\beta} \cos\phi_+ P_L d_k V_{lk}^{CKM} \tilde{u}_{R,l}^* + \text{h.c.} \tag{7.518}$$

Es verbleiben noch die Kopplungen an die Neutralinos.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^0 f\tilde{f}} = {} & \frac{1}{3\sqrt{2}} g' \sum_{k=1}^{3} \overline{\tilde{B}} u_{L,k} \tilde{u}_{L,k}^* + \frac{1}{3\sqrt{2}} g' \sum_{k=1}^{3} \overline{\tilde{B}} d_{L,k} \tilde{d}_{L,k}^* \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} g' \sum_{k=1}^{3} \overline{\tilde{B}} \ell_{k,L}^- \tilde{\ell}_{L,k}^+ - \frac{1}{\sqrt{2}} g' \sum_{k=1}^{3} \overline{\tilde{B}} \nu_k \tilde{\nu}_k^* \\
& - \frac{2\sqrt{2}}{3} g' \sum_{k=1}^{3} \overline{\tilde{B}} u_{k,R} \tilde{u}_{R,k}^* + \frac{\sqrt{2}}{3} g' \sum_{k=1}^{3} \overline{\tilde{B}} d_{k,R} \tilde{d}_{R,k}^* \\
& + \sqrt{2} g' \sum_{k=1}^{3} \overline{\tilde{B}} \ell_{k,R}^- \tilde{\ell}_{R,k}^+ \\
& + \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{3} \overline{\tilde{W}^3} u_{k,L} \tilde{u}_{L,k}^* - \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{3} \overline{\tilde{W}^3} d_{k,L} \tilde{d}_{L,k}^* \\
& + \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{3} \overline{\tilde{W}^3} \nu_k \tilde{\nu}_k^* - \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{3} \overline{\tilde{W}^3} \ell_{k,L}^- \tilde{\ell}_{L,k}^+ \\
& - \sum_{k=1}^{3} \frac{\sqrt{2} m_{l_k}}{v_1} \overline{\tilde{H}_1} \ell_{k,L}^- \tilde{\ell}_{R,k}^+ - \sum_{k=1}^{3} \frac{\sqrt{2} m_{l_k}}{v_1} \overline{\tilde{H}_1} \ell_{k,R}^- \tilde{\ell}_{L,k}^+ \\
& - \sum_{k=1}^{3} \frac{\sqrt{2} m_{d_k}}{v_1} \overline{\tilde{H}_1} d_{k,L} \tilde{d}_{R,k}^* - \sum_{k} \frac{\sqrt{2} m_{d_k}}{v_1} \overline{\tilde{H}_1} d_{k,R} \tilde{d}_{L,k}^* \\
& - \sum_{k=1}^{3} \frac{\sqrt{2} m_{u_k}}{v_2} \overline{\tilde{H}_2} u_{k,L} \tilde{u}_{R,k}^* - \sum_{k=1}^{3} \frac{\sqrt{2} m_{u_k}}{v_2} \overline{\tilde{H}_2} u_{k,R} \tilde{u}_{L,k}^* \\
& + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{7.519}$$

Da alle Terme diagonal in den Generationen sind, werden deren Indizes von nun an unterdrückt. Summationen laufen jetzt über die vier verschiedenen Neutralinos.

$$\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^0 f\tilde{f}} = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_i \overline{\tilde{\chi}_i^0} \eta_i^* \left(N_{i2}^* - \tan\theta_W N_{i1}^*\right) P_L\, \nu\tilde{\nu}^*$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_i \overline{\tilde{\chi}_i^0} \left[\eta_i^* \left(N_{i2}^* + \tan\theta_W N_{i1}^* \right) P_L + \eta_i \frac{m_\ell}{m_W \cos\beta} N_{i3} P_R \right] \ell^- \tilde{\ell}_L^+ \\
& -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_i \overline{\tilde{\chi}_i^0} \left[\eta_i^* N_{i3}^* \frac{m_\ell}{m_W \cos\beta} P_L - 2\eta_i N_{i1} \tan\theta_W P_R \right] \ell^- \tilde{\ell}_R^+ \\
& +\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_i \overline{\tilde{\chi}_i^0} \left[\eta_i^* \left(N_{i2}^* + \frac{1}{3} \tan\theta_W N_{i1}^* \right) P_L - \eta_i N_{i4} \frac{m_u}{m_W \sin\beta} P_R \right] u \tilde{u}_L^* \\
& -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_i \overline{\tilde{\chi}_i^0} \left[\eta_i^* N_{i4}^* \frac{m_u}{m_W \sin\beta} P_L + \frac{4}{3} \tan\theta_W \eta_i N_{i1} P_R \right] u \tilde{u}_R^* \\
& +\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_i \overline{\tilde{\chi}_i^0} \left[\eta_i^* \left(-N_{i2}^* + \frac{1}{3} \tan\theta_W N_{i1}^* \right) P_L - \eta_i N_{i3} \frac{m_d}{m_W \cos\beta} P_R \right] d \tilde{d}_L^* \\
& -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_i \overline{\tilde{\chi}_i^0} \left[\eta_i^* N_{i3}^* \frac{m_d}{m_W \cos\beta} P_L - \frac{2}{3} \tan\theta_W \eta_i N_{i1} P_R \right] d \tilde{d}_R^* \\
& + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{7.520}
$$

Da noch die Transformation auf die Masseneigenzustände (1/2 statt L/R) durchgeführt werden muß, entstehen längere Kopplungskonstanten, die hier explizit aufgeführt werden sollen. Man hat die Wechselwirkungsterme dann in der Gestalt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^0 f \tilde{f}} = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_i \overline{\tilde{\chi}_i^0} \Big[& \left(L_i^{\tilde{\chi} f \tilde{f}_1} P_L + R_i^{\tilde{\chi} f \tilde{f}_1} P_R \right) f \tilde{f}_1^* + \left(L_i^{\tilde{\chi} f \tilde{f}_2} P_L + R_i^{\tilde{\chi} f \tilde{f}_2} P_R \right) f \tilde{f}_2^* \Big] \\
& + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{7.521}
$$

Die Kopplungskonstanten sind

$$L_i^{\tilde{\chi}\nu\tilde{\nu}} = \eta_i^* \left(N_{i2}^* - \tan\theta_W N_{i1}^* \right) \tag{7.522}$$

$$L_i^{\tilde{\chi}\ell\tilde{\ell}_1} = -\eta_i^* \left[\left(N_{i2}^* + \tan\theta_W N_{i1}^* \right) \cos\theta_{\ell_k} + N_{i3}^* \frac{m_{\ell_k}}{m_W \cos\beta} \sin\theta_{\ell_k} \right] \tag{7.523}$$

$$R_i^{\tilde{\chi}\ell\tilde{\ell}_1} = \eta_i \left(-N_{i3} \frac{m_{\ell_k}}{m_W \cos\beta} \cos\theta_{\ell_k} + 2N_{i1} \tan\theta_W \sin\theta_{\ell_k} \right) \tag{7.524}$$

$$L_i^{\tilde{\chi}\ell\tilde{\ell}_2} = \eta_i^* \left[\left(N_{i2}^* + \tan\theta_W N_{i1}^* \right) \sin\theta_{\ell_k} - N_{i3}^* \frac{m_{\ell_k}}{m_W \cos\beta} \cos\theta_{\ell_k} \right] \tag{7.525}$$

$$R_i^{\tilde{\chi}\ell\tilde{\ell}_2} = \eta_i \left(N_{i3} \frac{m_{\ell_k}}{m_W \cos\beta} \sin\theta_{\ell_k} + 2N_{i1} \tan\theta_W \cos\theta_{\ell_k} \right) \tag{7.526}$$

$$L_i^{\tilde{\chi}u\tilde{u}_1} = \eta_i^* \left[\left(N_{i2}^* + \frac{1}{3} \tan\theta_W N_{i1}^* \right) \cos\theta_{u_k} - N_{i4}^* \frac{m_{u_k}}{m_W \sin\beta} \sin\theta_{u_k} \right] \tag{7.527}$$

$$R_i^{\tilde{\chi}u\tilde{u}_1} = -\eta_i \left(N_{i4} \frac{m_{u_k}}{m_W \sin\beta} \cos\theta_{u_k} + \frac{4}{3} \tan\theta_W N_{i1} \sin\theta_{u_k} \right) \tag{7.528}$$

$$L_i^{\tilde{\chi}u\tilde{u}_2} = -\eta_i^* \left[\left(N_{i2}^* + \frac{1}{3}\tan\theta_W N_{i1}^*\right)\sin\theta_{u_k} + N_{i4}^*\frac{m_{u_k}}{m_W \sin\beta}\cos\theta_{u_k}\right] \quad (7.529)$$

$$R_i^{\tilde{\chi}u\tilde{u}_2} = \eta_i \left(N_{i4}\frac{m_{u_k}}{m_W \sin\beta}\sin\theta_{u_k} - \frac{4}{3}\tan\theta_W N_{i1}\cos\theta_{u_k}\right) \quad (7.530)$$

$$L_i^{\tilde{\chi}d\tilde{d}_1} = -\eta_i^* \left[\left(N_{i2}^* - \frac{1}{3}\tan\theta_W N_{i1}^*\right)\cos\theta_{d_k} + N_{i3}^*\frac{m_{d_k}}{m_W \cos\beta}\sin\theta_{d_k}\right] \quad (7.531)$$

$$R_i^{\tilde{\chi}d\tilde{d}_1} = \eta_i \left(-N_{i3}\frac{m_{d_k}}{m_W \cos\beta}\cos\theta_{d_k} + \frac{2}{3}\tan\theta_W N_{i1}\sin\theta_{d_k}\right) \quad (7.532)$$

$$L_i^{\tilde{\chi}d\tilde{d}_2} = \eta_i^* \left[\left(N_{i2}^* - \frac{1}{3}\tan\theta_W N_{i1}^*\right)\sin\theta_{d_k} - N_{i3}^*\frac{m_{d_k}}{m_W \cos\beta}\cos\theta_{d_k}\right] \quad (7.533)$$

$$R_i^{\tilde{\chi}d\tilde{d}_2} = \eta_i \left(N_{i3}\frac{m_{d_k}}{m_W \cos\beta}\sin\theta_{d_k} + \frac{2}{3}\tan\theta_W N_{i1}\cos\theta_{d_k}\right). \quad (7.534)$$

7.10 Der Geistanteil

Kapitel 8

Feynmanregeln des MSSM

8.1 Konventionen

$$m_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{8.1}$$

$$m_W = \frac{g}{2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{8.2}$$

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{8.3}$$

$$\sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{8.4}$$

$$\cos\beta = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \tag{8.5}$$

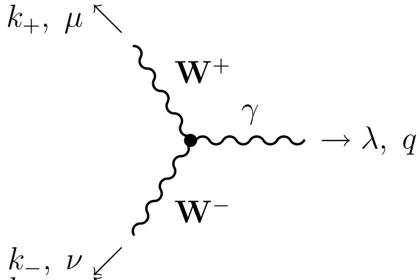
$$\sin\beta = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \tag{8.6}$$

$$g_Z \equiv \frac{g}{\cos\theta_W} \tag{8.7}$$

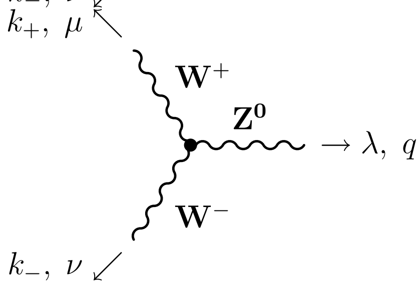
$$g^2 + g'^2 = g_Z^2 \tag{8.8}$$

8.2 Selbstkopplungen der Eichbosonen

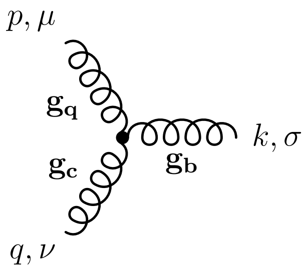
Diese sind identisch zu denjenigen im (nicht-supersymmetrischen) Standardmodell und werden hier nur der Vollständigkeit wegen noch einmal aufgeführt.



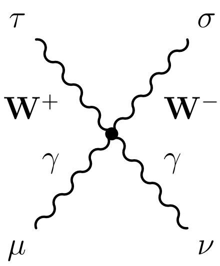
$$\mathrm{i}e\big[(k_- - k_+)^\lambda g^{\mu\nu} + (q - k_-)^\mu g^{\nu\lambda}$$
$$+(k_+ - q)^\nu\big]$$



$$\mathrm{i}g\cos\theta_W\big[(k_- - k_+)^\lambda g^{\mu\nu} + (q - k_-)^\mu g^{\nu\lambda}$$
$$+(k_+ - q)^\nu\big]$$

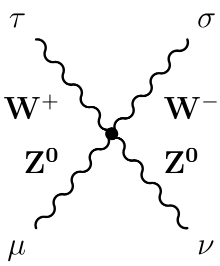


$$-g_s f^{abc}\big[(p-k)^\nu g^{\mu\sigma} + (q-p)^\sigma g^{\mu\nu}$$
$$(k-q)^\mu g^{\nu\sigma}\big]$$



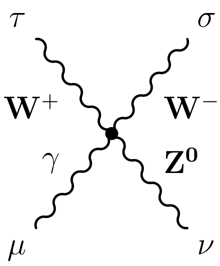
$$-\mathrm{i}e^2\big[2g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau} - g^{\mu\tau}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\big]$$

Beachte die möglichen Kontraktionen!

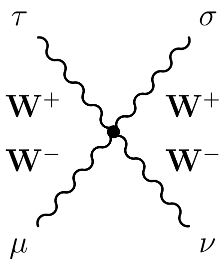


$$-\mathrm{i}g\cos^2\theta_W\big[2g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau} - g^{\mu\tau}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\big]$$

Beachte die möglichen Kontraktionen!

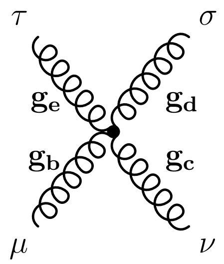


$$-\mathrm{i}g^2\cos\theta_W\sin\theta_W\big[2g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau} - g^{\mu\tau}g^{\nu\sigma}$$
$$-g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\big]$$



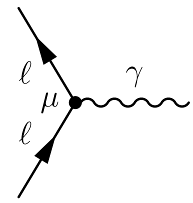
$$\mathrm{i}g^2\big[2g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau} - g^{\mu\tau}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\big]$$

Vier mögliche Kontraktionen beim ersten Term, zwei beim zweiten Term der Lagrangedichte!

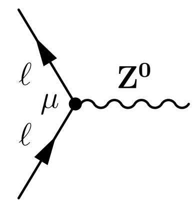


$$\begin{aligned}&-\mathrm{i}g_s^2\big[f^{abc}f^{ade}(g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau} - g^{\mu\tau}g^{\nu\sigma})\\ &+f^{abd}f^{ace}(g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau} - g^{\mu\tau}g^{\nu\sigma})\\ &+f^{abe}f^{acd}(g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau})\big]\end{aligned}$$

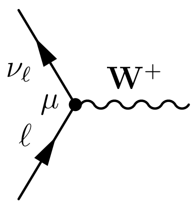
8.3 Kopplungen der Leptonen und Quarks



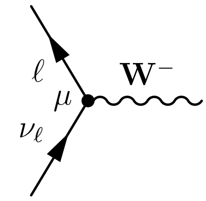
$$-\mathrm{i}e\gamma^\mu$$



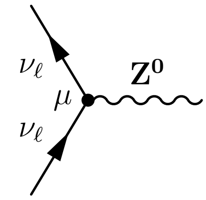
$$-\mathrm{i}\,\frac{g}{4\cos\theta_W}\,\gamma^\mu(1 - 4\sin^2\theta_W - \gamma^5)$$



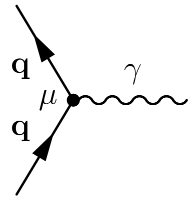
$$\mathrm{i}\,\frac{g}{2\sqrt{2}}\,\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$$



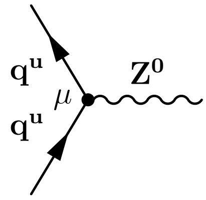
$$\mathrm{i}\,\frac{g}{2\sqrt{2}}\,\gamma^\mu(1-\gamma^5)$$



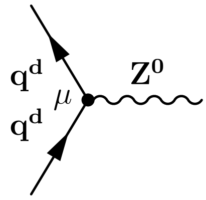
$$\mathrm{i}\,\frac{g}{4\cos\theta_W}\,\gamma^\mu(1-\gamma^5)$$



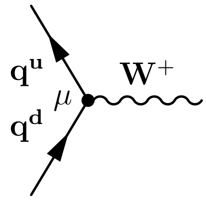
$$\mathrm{i}eQ_q\gamma^\mu$$



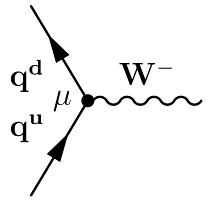
$$\mathrm{i}\,\frac{g}{4\cos\theta_W}\,\gamma^\mu(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_W-\gamma^5)$$



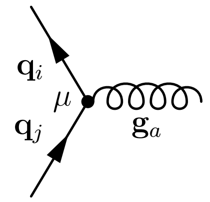
$$-\mathrm{i}\,\frac{g}{4\cos\theta_W}\,\gamma^\mu(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W-\gamma^5)$$



$$\mathrm{i}\,\frac{g}{2\sqrt{2}}\;\cdot V_{q^uq^d}\cdot\gamma^\mu(1-\gamma^5)$$

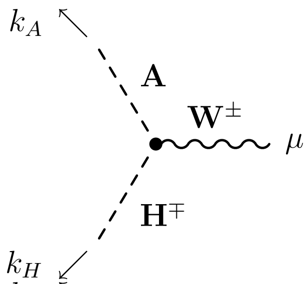


$$\mathrm{i}\,\frac{g}{2\sqrt{2}}\cdot V^*_{q^u q^d}\cdot\gamma^\mu(1-\gamma^5)$$

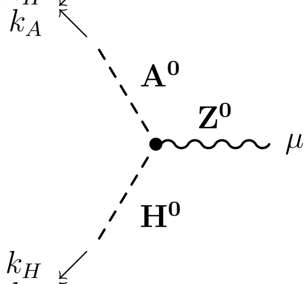


$$\mathrm{i}\,g_s\gamma^\mu(T^a)_{ij}$$

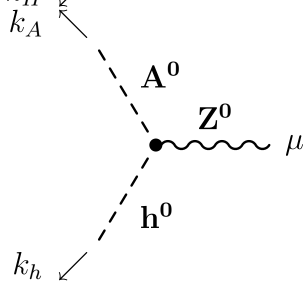
8.4 Elektroschwache Wechselwirkungen der Higgs-Bosonen



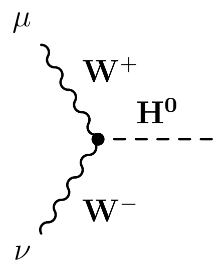
$$-\frac{g}{2}\,(k_H-k_A)^\mu$$



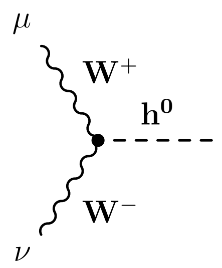
$$-\tfrac{g}{2\cos\theta_W}\sin(\alpha-\beta)\,(k_A-k_H)^\mu$$



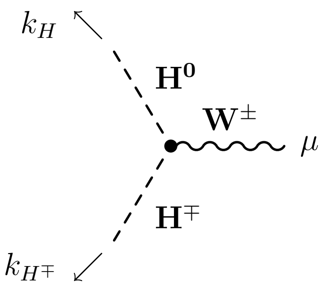
$$-\tfrac{g}{2\cos\theta_W}\cos(\alpha-\beta)\,(k_A-k_h)^\mu$$



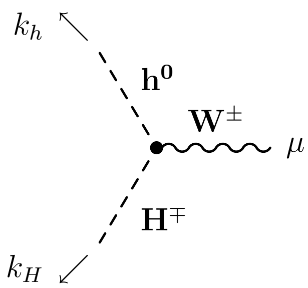
$$\mathrm{i}\, g m_W \cos(\alpha-\beta)\, g^{\mu\nu}$$



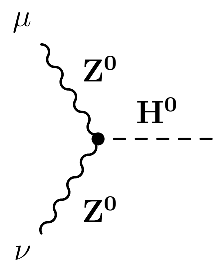
$$-\mathrm{i}\, g m_W \sin(\alpha-\beta)\, g^{\mu\nu}$$



$$\pm\mathrm{i}\,\frac{g\sin(\alpha-\beta)}{2}\,(k_{H^\mp}-k_H)^\mu$$

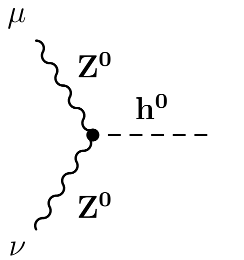


$$\pm\mathrm{i}\,\frac{g\cos(\alpha-\beta)}{2}\,(k_H-k_h)^\mu$$



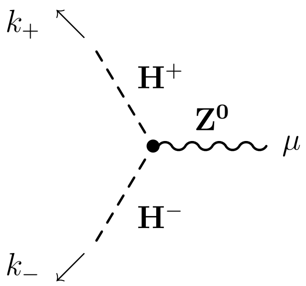
$$\mathrm{i}\, g_Z m_Z \cos(\alpha-\beta)\, g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 der Z^0-Bosonen.

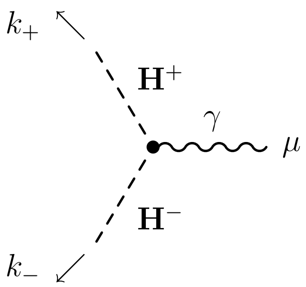


$-\mathrm{i}\, g_Z m_Z \sin(\alpha - \beta)\, g^{\mu\nu}$

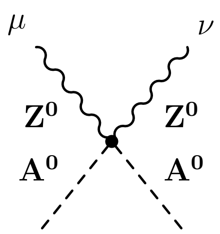
Symmetriefaktor 2 der Z^0 – Bosonen.



$$-\mathrm{i}g\,\frac{2\cos^2\theta_W - 1}{2\cos\theta_W}\,(k_+ - k_-)^\mu$$

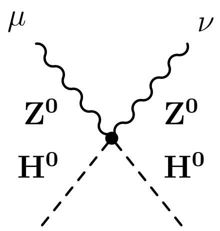


$-\mathrm{i}e\ (k_+ - k_-)^\mu$



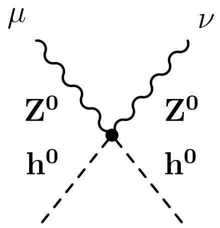
$$\mathrm{i}\,\frac{g^2}{2\cos^2\theta_W}\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Higgs-Bosonen und Z^0.



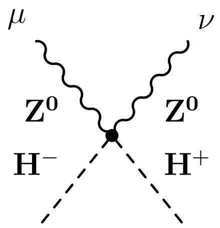
$$\mathrm{i}\,\frac{g^2}{2\cos^2\theta_W}\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Higgs-Bosonen und Z^0.



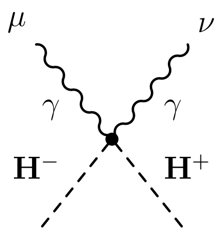
$$\mathrm{i}\frac{g^2}{2\cos^2\theta_W}\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Higgs-Bosonen und Z^0.



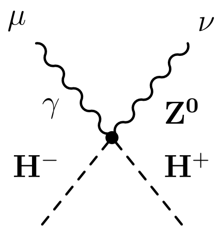
$$\mathrm{i}\frac{g^2}{2\cos^2\theta_W}(2\cos^2\theta_W-1)^2\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Z^0.

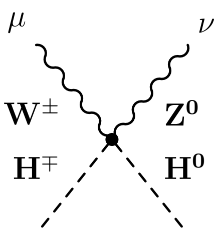


$$2\mathrm{i}e^2\cdot g^{\mu\nu}$$

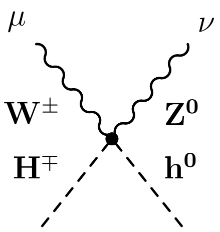
Symmetriefaktor 2 für Photonen



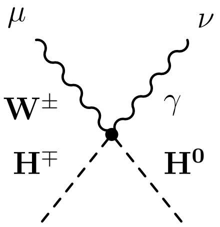
$$\mathrm{i}\frac{eg}{\cos\theta_W}(2\cos^2\theta_W-1)\cdot g^{\mu\nu}$$



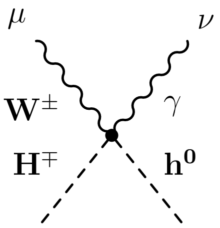
$$-\mathrm{i}\,\frac{g^2\sin^2\theta_W\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\theta_W}\cdot g^{\mu\nu}$$



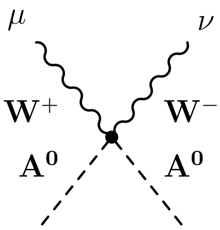
$$-\mathrm{i}\,\frac{g^2\sin^2\theta_W\cos(\alpha-\beta)}{2\cos\theta_W}\cdot g^{\mu\nu}$$



$$\mathrm{i}\,\frac{eg\sin(\alpha-\beta)}{2}\cdot g^{\mu\nu}$$

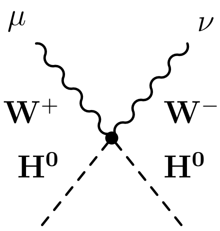


$$\mathrm{i}\,\frac{eg\cos(\alpha-\beta)}{2}\cdot g^{\mu\nu}$$



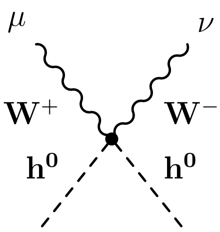
$$\mathrm{i}\,\frac{g^2}{2}\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Higgs-Bosonen



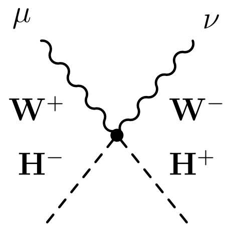
$$\mathrm{i}\,\frac{g^2}{2}\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Higgs-Bosonen

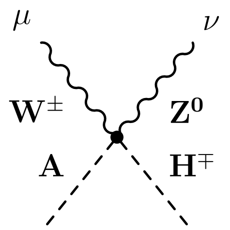


$$\mathrm{i}\,\frac{g^2}{2}\cdot g^{\mu\nu}$$

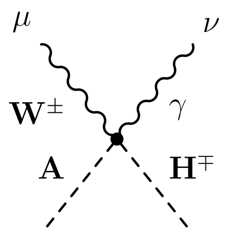
Symmetriefaktor 2 für Higgs-Bosonen



$$\mathrm{i}\,\frac{g^2}{2}\cdot g^{\mu\nu}$$

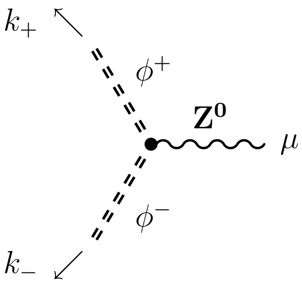


$$\pm\frac{g^2\sin^2\theta_W}{2\cos\theta_W}\cdot g^{\mu\nu}$$

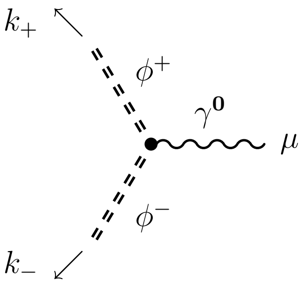


$$\mp\frac{eg}{2}\cdot g^{\mu\nu}$$

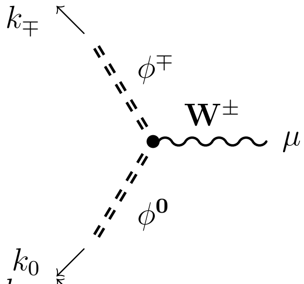
8.5 Higgs-Eichboson-Goldstone-Wechselwirkungen



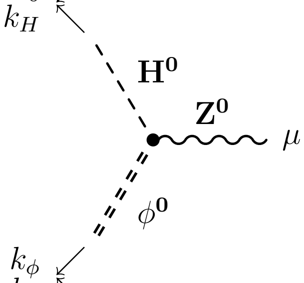
$$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z}{2}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)(k_+-k_-)^\mu$$



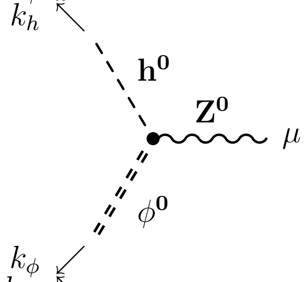
$$-\mathrm{i}\,e\,(k_+-k_-)^\mu$$



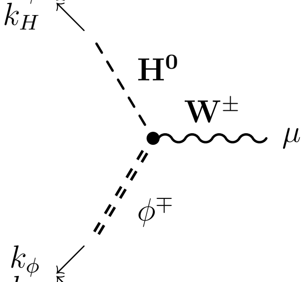
$$-\ \frac{g}{2}\,(k_\mp - k_0)^\mu$$



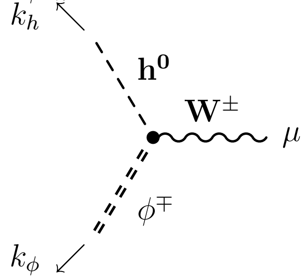
$$\frac{g_Z}{2}\cos(\alpha-\beta)\,(k_H - k_\phi)^\mu$$



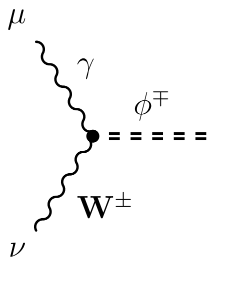
$$-\frac{g_Z}{2}\sin(\alpha-\beta)\,(k_h - k_\phi)^\mu$$



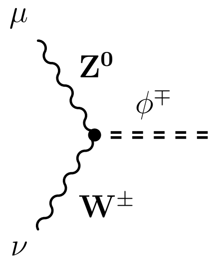
$$\mp\mathrm{i}\,\frac{g}{2}\cos(\alpha-\beta)\,(k_H - k_\phi)^\mu$$



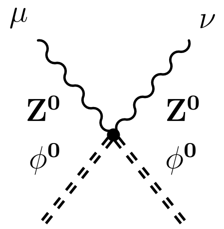
$$\pm\mathrm{i}\,\frac{g}{2}\sin(\alpha-\beta)\,(k_h - k_\phi)^\mu$$



$$-\mathrm{i}\,e m_W \sin^2\theta_W\, g^{\mu\nu}$$

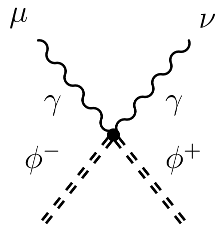


$\mathrm{i}\, g_Z m_W \sin^2\theta_W\, g^{\mu\nu}$



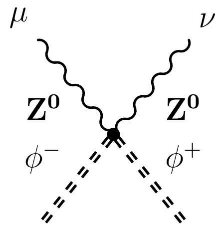
$\mathrm{i}\,\dfrac{g_Z^2}{2}\cdot g^{\mu\nu}$

Symmetriefaktoren 2 für Photonen und Z^0.



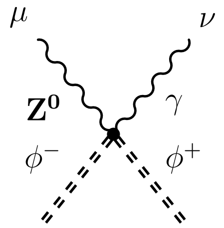
$2\mathrm{i}\, e^2\cdot g^{\mu\nu}$

Symmetriefaktor 2 für Photonen

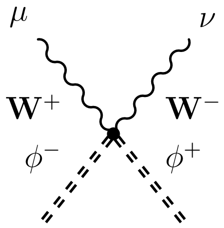


$\mathrm{i}\,\dfrac{g_Z^2}{2}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)^2\cdot g^{\mu\nu}$

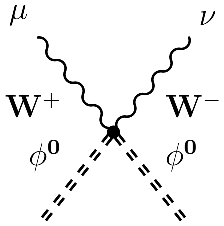
Symmetriefaktor 2 für Z^0.



$\mathrm{i}\,\dfrac{e g_Z}{2}\left(1-2\sin^2\theta_W\right)\cdot g^{\mu\nu}$

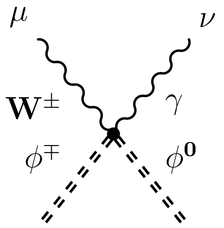


$\mathrm{i}\,\dfrac{g^2}{2}\cdot g^{\mu\nu}$

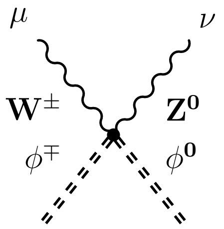


$\mathrm{i}\,\dfrac{g^2}{2}\cdot g^{\mu\nu}$

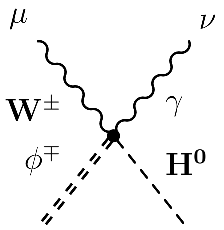
Symmetriefaktor 2 für Goldstone-Bosonen



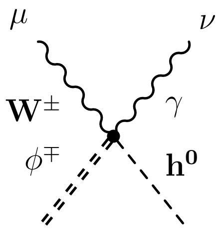
$\mp\,\dfrac{eg}{2}\cdot g^{\mu\nu}$



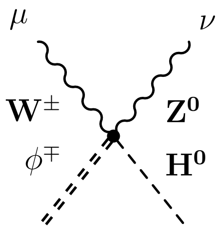
$\pm\,\dfrac{gg_Z}{2}\sin^2\theta_W\cdot g^{\mu\nu}$



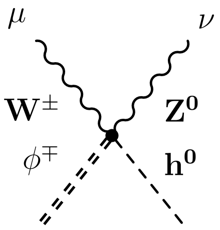
$-\mathrm{i}\,\dfrac{eg}{2}\cos(\alpha-\beta)\cdot g^{\mu\nu}$



$\mathrm{i}\,\dfrac{eg}{2}\sin(\alpha-\beta)\cdot g^{\mu\nu}$

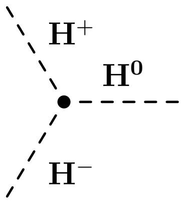


$\mathrm{i}\,\dfrac{gg_Z}{2}\cos(\alpha-\beta)\sin^2\theta_W\cdot g^{\mu\nu}$

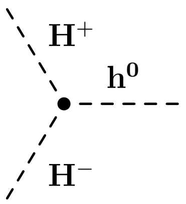


$$-\mathrm{i}\,\frac{g g_Z}{2}\sin(\alpha-\beta)\sin^2\theta_W\cdot g^{\mu\nu}$$

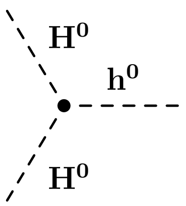
8.6 Higgs-Selbstwechselwirkungen



$$\mathrm{i}\Big(-g m_W\cos(\alpha-\beta)+\frac{g_Z}{2}m_Z\cos(2\beta)\cos(\alpha+\beta)\Big)$$

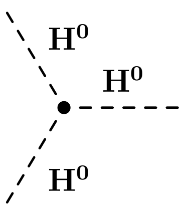


$$\mathrm{i}\Big(g m_W\sin(\alpha-\beta)-\frac{g_Z}{2}m_Z\cos(2\beta)\sin(\alpha+\beta)\Big)$$



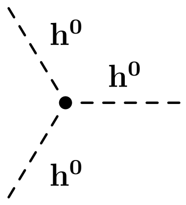
$$\mathrm{i}\,\frac{g_Z}{2}m_Z\Big(2\sin(2\alpha)\cos(\alpha+\beta)+\cos(2\alpha)\sin(\alpha+\beta)\Big)$$

Symmetriefaktor 2 für das H^0



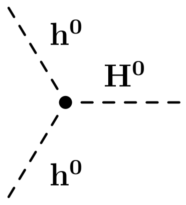
$$-\mathrm{i}\,\frac{3g_Z}{2}m_Z\cos(2\alpha)\cos(\alpha+\beta)$$

Symmetriefaktor 6! der Higgs-Bosonen



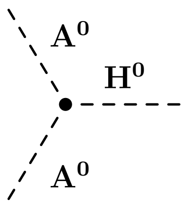
$$-\mathrm{i}\frac{3g_Z}{2}m_Z\cos(2\alpha)\sin(\alpha+\beta)$$

Symmetriefaktor 6! der Higgs-Bosonen



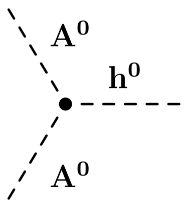
$$-\mathrm{i}\frac{g_Z}{2}m_Z\Big(2\sin(2\alpha)\sin(\alpha+\beta)-\cos(2\alpha)\cos(\alpha+\beta)\Big)$$

Symmetriefaktor 2 für das h^0



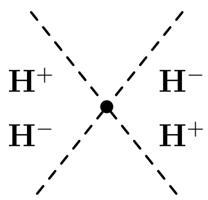
$$\mathrm{i}\,\frac{g_Z}{2}m_Z\cos(2\beta)\cos(\alpha+\beta)$$

Symmetriefaktor 2 für das A^0



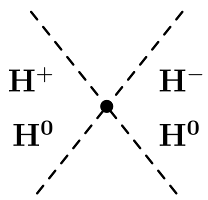
$$-\mathrm{i}\frac{g_Z}{2}m_Z\cos(2\beta)\sin(\alpha+\beta)$$

Symmetriefaktor 2 für das A^0



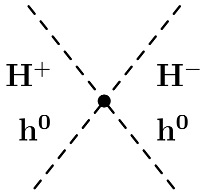
$$-\mathrm{i}\frac{g_Z^2}{2}\cos^2(2\beta)$$

Symmetriefaktor 2 für das H^+ und das H^-



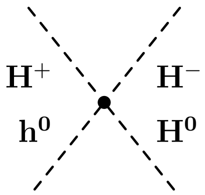
$$-\mathrm{i}\Big(\frac{g^2}{2}\cos^2(\alpha-\beta)-\frac{g_Z^2}{4}\cos(2\alpha)\cos(2\beta)\Big)$$

Symmetriefaktor 2 für das H^0

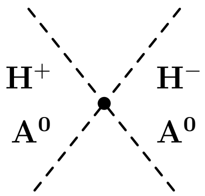


$$-\mathrm{i}\Big(\frac{g^2}{2}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{g_Z^2}{4}\cos(2\alpha)\cos(2\beta)\Big)$$

Symmetriefaktor 2 für das h^0

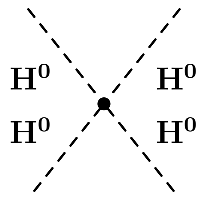


$$\mathrm{i}\Big(\frac{g^2}{2}\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta)-\frac{g_Z^2}{4}\sin(2\alpha)\cos(2\beta)\Big)$$



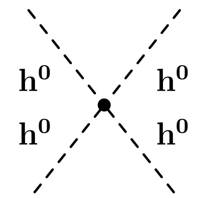
$$-\mathrm{i}\frac{g_Z^2}{4}\cos^2(2\beta)$$

Symmetriefaktor 2 für das A^0



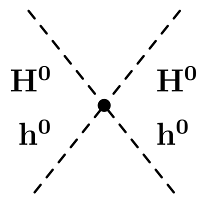
$$-\mathrm{i}\frac{3g_Z^2}{4}\cos^2(2\alpha)$$

Symmetriefaktor 4! für das H^0



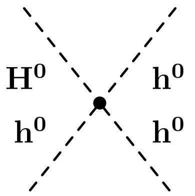
$$-\mathrm{i}\frac{3g_Z^2}{4}\cos^2(2\alpha)$$

Symmetriefaktor 4! für das h^0



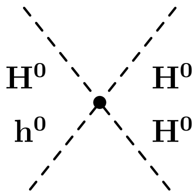
$$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{4}\,\big(3\sin^2(2\alpha)-1\big)$$

Symmetriefaktor 2 für das h^0 und das H^0



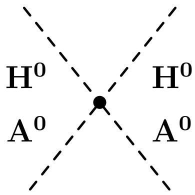
$-\mathrm{i}\,\frac{3g_Z^2}{8}\sin(4\alpha)$

Symmetriefaktor 3! für das h^0



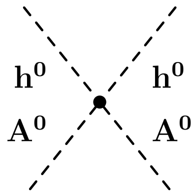
$\mathrm{i}\,\frac{3g_Z^2}{8}\sin(4\alpha)$

Symmetriefaktor 3! für das H^0



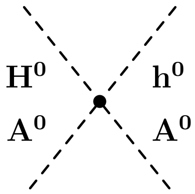
$\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{4}\cos(2\alpha)\cos(2\beta)$

Symmetriefaktoren 2 für das H^0 und das A^0



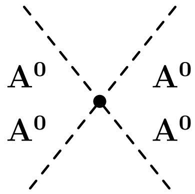
$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{4}\cos(2\alpha)\cos(2\beta)$

Symmetriefaktoren 2 für das h^0 und das A^0



$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{4}\sin(2\alpha)\cos(2\beta)$

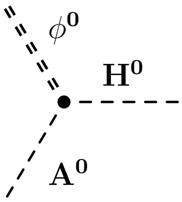
Symmetriefaktor 2 für das A^0



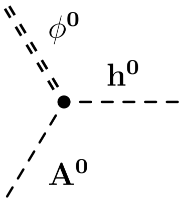
$-\mathrm{i}\frac{3g_Z^2}{4}\cos^2(2\beta)$

Symmetriefaktor 4! für das A

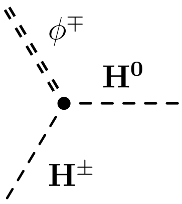
8.7 Higgs-Goldstone-Kopplungen



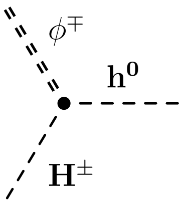
$$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z}{2} m_Z \sin(2\beta)\cos(\alpha+\beta)$$



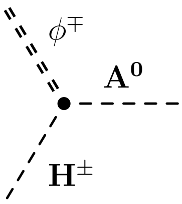
$$\mathrm{i}\,\frac{g_Z}{2} m_Z \sin(2\beta)\sin(\alpha+\beta)$$



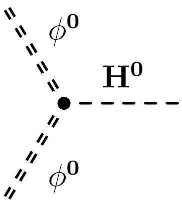
$$-\frac{\mathrm{i}}{2}\Big(g m_W \sin(\alpha-\beta) + g_Z m_Z \cos(\alpha+\beta)\sin(2\beta)\Big)$$



$$\frac{\mathrm{i}}{2}\Big(-g m_W \cos(\alpha-\beta) + g_Z m_Z \sin(\alpha+\beta)\sin(2\beta)\Big)$$

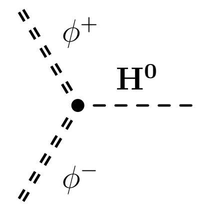


$$\mp\frac{g}{2} m_W$$

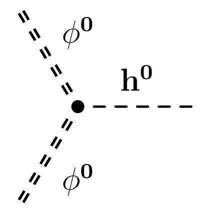


$$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z}{2} m_Z \cos(\alpha+\beta)\cos(2\beta)$$

Symmetriefaktor 2 für ϕ^0

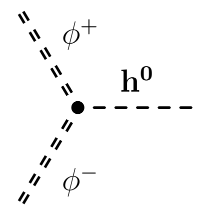


$$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z}{2} m_Z \cos(\alpha+\beta)\cos(2\beta)$$

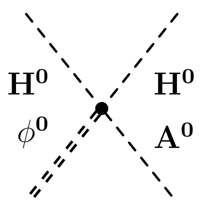


$$\mathrm{i}\,\frac{g_Z}{2} m_Z \sin(\alpha+\beta)\cos(2\beta)$$

Symmetriefaktor 2 für ϕ^0

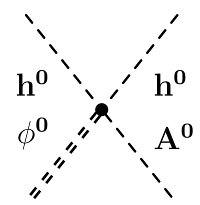


$$\mathrm{i}\,\frac{g_Z}{2} m_Z \sin(\alpha+\beta)\cos(2\beta)$$



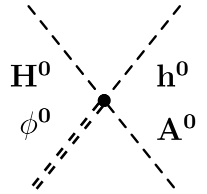
$$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{4}\sin(2\beta)\cos(2\alpha)$$

Symmetriefaktor 2 für H^0

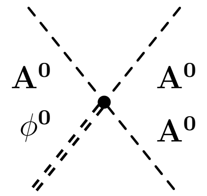


$$\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{4}\sin(2\beta)\cos(2\alpha)$$

Symmetriefaktor 2 für h^0

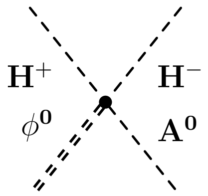


$$\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{4}\sin(2\beta)\sin(2\alpha)$$

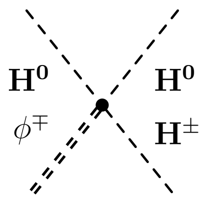


$$\mathrm{i}\,\frac{3g_Z^2}{8}\sin(4\beta)$$

Symmetriefaktor 3! für A^0

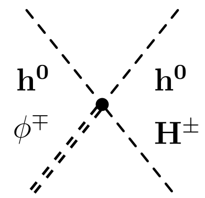


$$\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{8}\sin(4\beta)$$



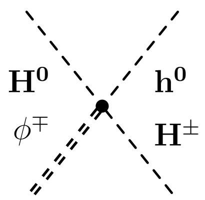
$$-\mathrm{i}\,\frac{1}{4}\Big(g^2\sin[2(\alpha-\beta)]+g_Z^2\cos(2\alpha)\sin(2\beta)\Big)$$

Symmetriefaktor 2 für H^0

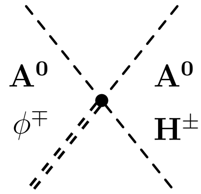


$$\mathrm{i}\,\frac{1}{4}\Big(g^2\sin[2(\alpha-\beta)]+g_Z^2\cos(2\alpha)\sin(2\beta)\Big)$$

Symmetriefaktor 2 für h^0

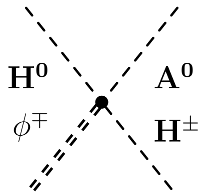


$$-\mathrm{i}\,\frac{1}{4}\Big(g^2\cos[2(\alpha-\beta)]-g_Z^2\sin(2\alpha)\sin(2\beta)\Big)$$

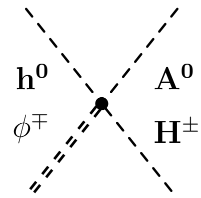


$$\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{8}\sin(4\beta)$$

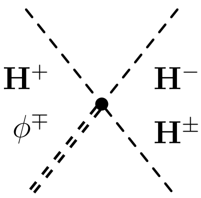
Symmetriefaktor 2 für A^0



$$\mp\frac{g^2}{4}\cos(\alpha-\beta)$$

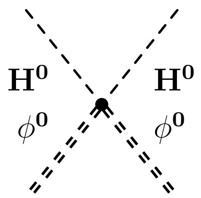


$$\pm\frac{g^2}{4}\sin(\alpha-\beta)$$



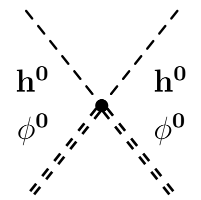
$$\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{4}\sin(4\beta)$$

Symmetriefaktor 2 für $H^{\pm}$



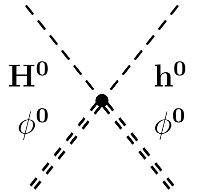
$$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{4}\cos(2\alpha)\cos(2\beta)$$

Symmetriefaktor 2 für H^0 und ϕ^0



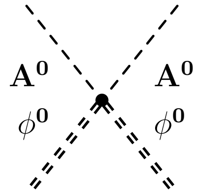
$$\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{4}\cos(2\alpha)\cos(2\beta)$$

Symmetriefaktor 2 für H^0 und ϕ^0



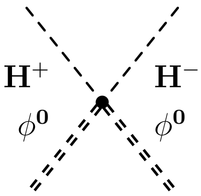
$$\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{4}\sin(2\alpha)\cos(2\beta)$$

Symmetriefaktor 2 für ϕ^0



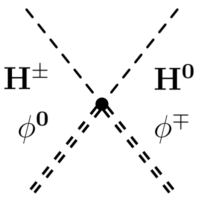
$$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{4}\big(3\sin^2(2\beta)-1\big)$$

Symmetriefaktor 2 für A^0 und ϕ^0

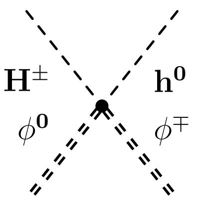


$$-\mathrm{i}\,\left(\frac{g^2}{2}-\frac{g_Z^2}{4}\cos^2(2\beta)\right)$$

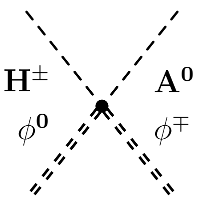
Symmetriefaktor 2 für ϕ^0



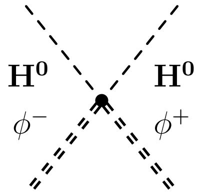
$$\mp\frac{g^2}{4}\sin(\alpha-\beta)$$



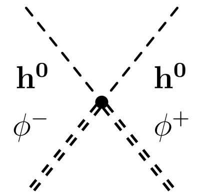
$$\mp\frac{g^2}{4}\cos(\alpha-\beta)$$



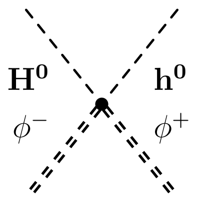
$$\mathrm{i}\,\frac{1}{4}\big(g^2-g_Z^2\sin^2(2\beta)\big)$$



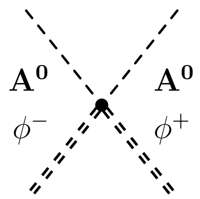
$$-\mathrm{i}\,\frac{1}{4}\Big(g^2\sin^2(\alpha-\beta)+\tfrac{g_Z^2}{2}\cos(2\alpha)\cos(2\beta)\Big)$$



$$-\mathrm{i}\,\frac{1}{4}\Big(g^2\cos^2(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}g_Z^2\cos(2\alpha)\cos(2\beta)\Big)$$

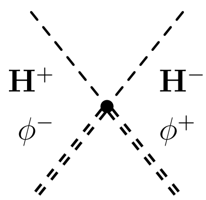


$$-\mathrm{i}\,\frac{1}{4}\Big(g^2\sin[2(\alpha-\beta)]-g_Z^2\sin(2\alpha)\cos(2\beta)\Big)$$

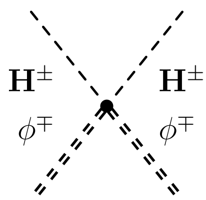


$$-\mathrm{i}\,\Big(\frac{g^2}{2}-\frac{g_Z^2}{4}\cos^2(2\beta)\Big)$$

Symmetriefaktor 2 für A^0

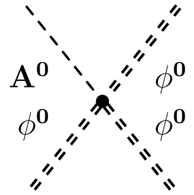


$$\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{4}\cos(4\beta)$$



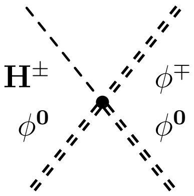
$$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{2}\sin^2(2\beta)$$

Symmetriefaktor 2 für $H^\pm$ und $\phi^\mp$



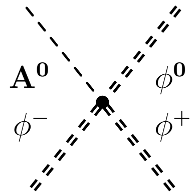
$$-\mathrm{i}\,\frac{3g_Z^2}{8}\sin(4\beta)$$

Symmetriefaktor 3! für ϕ^0

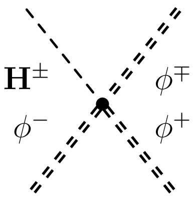


$$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{8}\sin(4\beta)$$

Symmetriefaktor 2 für ϕ^0

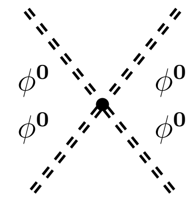


$$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{8}\sin(4\beta)$$



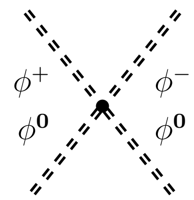
$$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{4}\sin(4\beta)$$

Symmetriefaktor 2 für $\phi^\mp$



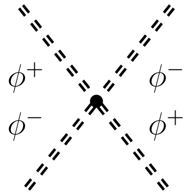
$$-\mathrm{i}\,\frac{3g_Z^2}{4}\cos^2(2\beta)$$

Symmetriefaktor 4! für ϕ^0



$$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{4}\cos^2(2\beta)$$

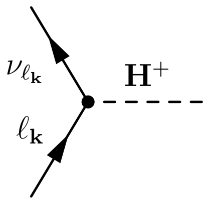
Symmetriefaktor 2 für ϕ^0



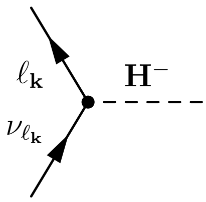
$$-\mathrm{i}\,\frac{g_Z^2}{2}\cos^2(2\beta)$$

Symmetriefaktor 2 für ϕ^+ und ϕ^-

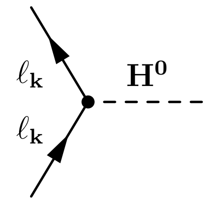
8.8 Higgs-Fermion-Kopplungen



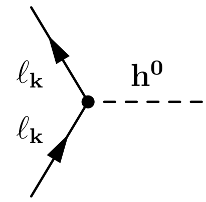
$$\mathrm{i}\frac{gm_{\ell_k}}{2\sqrt{2}m_W}\tan\beta\,(1+\gamma^5)$$



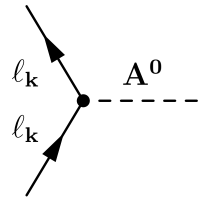
$$\mathrm{i}\frac{gm_{\ell_k}}{2\sqrt{2}m_W}\tan\beta\,(1-\gamma^5)$$



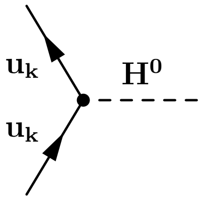
$$-\,\mathrm{i}\frac{gm_{\ell_k}\cos\alpha}{2m_W\cos\beta}$$



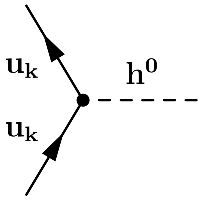
$$\mathrm{i}\frac{gm_{\ell_k}\sin\alpha}{2m_W\cos\beta}$$



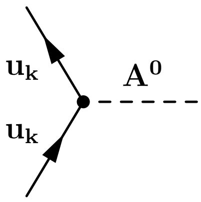
$$-\frac{g m_{\ell_k}}{2 m_W}\tan\beta\,\gamma^5$$



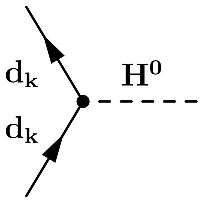
$$-\,\mathrm{i}\frac{g m_{u_k}\sin\alpha}{2 m_W\sin\beta}$$



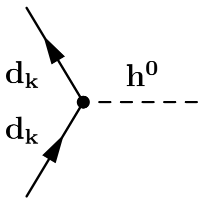
$$-\,\mathrm{i}\frac{g m_{u_k}\cos\alpha}{2 m_W\sin\beta}$$



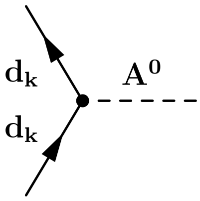
$$-\frac{g m_{u_k}}{2 m_W}\cot\beta\,\gamma^5$$



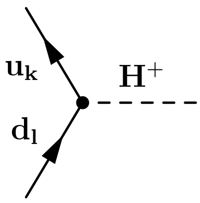
$$-\,\mathrm{i}\frac{g m_{d_k}\cos\alpha}{2 m_W\cos\beta}$$



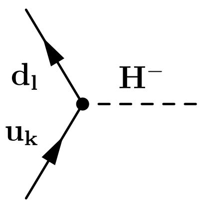
$$\mathrm{i}\frac{g m_{d_k}\sin\alpha}{2 m_W\cos\beta}$$



$$-\frac{gm_{d_k}}{2m_W}\tan\beta\,\gamma^5$$

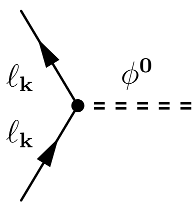


$$\mathrm{i}\frac{g}{2\sqrt{2}m_W}V_{kl}^{CKM}\cdot\Big((\tan\beta m_{d_l}+\cot\beta m_{u_k})
+\gamma^5\,(\tan\beta m_{d_l}-\cot\beta m_{u_k})\Big)$$

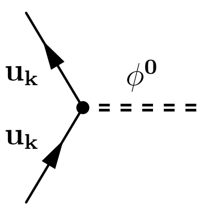


$$\mathrm{i}\frac{g}{2\sqrt{2}m_W}V_{kl}^{CKM\,*}\cdot\Big((\cot\beta m_{d_l}+\tan\beta m_{u_k})
+\gamma^5\,(\cot\beta m_{d_l}-\tan\beta m_{u_k})\Big)$$

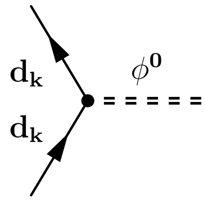
8.9 Goldstone-Kopplungen der Fermionen



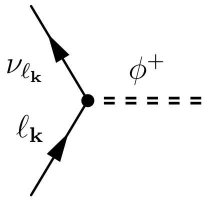
$$-\frac{gm_{\ell_k}}{2m_W}\,\gamma^5$$



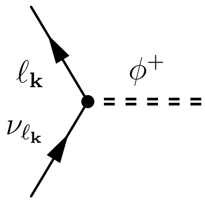
$$\frac{gm_{u_k}}{2m_W}\,\gamma^5$$



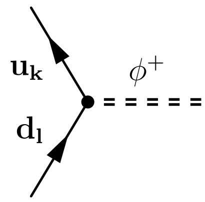
$$-\frac{gm_{d_k}}{2m_W}\gamma^5$$



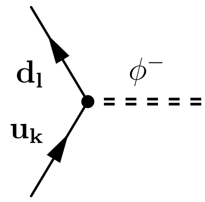
$$\mathrm{i}\frac{gm_{\ell_k}}{2\sqrt{2}m_W}\left(1+\gamma^5\right)$$



$$\mathrm{i}\frac{gm_{\ell_k}}{2\sqrt{2}m_W}\left(1-\gamma^5\right)$$

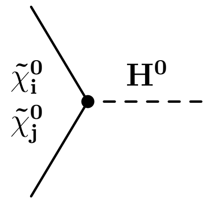


$$\mathrm{i}\frac{g}{2\sqrt{2}m_W}V_{kl}^{CKM}\cdot\Big(\left(m_{d_l}-m_{u_k}\right)+\gamma^5\left(m_{d_l}+m_{u_k}\right)\Big)$$



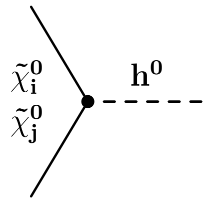
$$\mathrm{i}\frac{g}{2\sqrt{2}m_W}V_{kl}^{CKM*}\cdot\Big(\left(-m_{d_l}+m_{u_k}\right)-\gamma^5\left(m_{d_l}+m_{u_k}\right)\Big)$$

8.10 Higgskopplungen der Charginos und Neutralinos



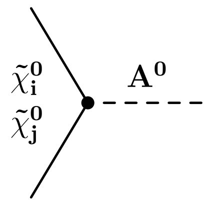
$$\frac{g}{2}\left(\mathrm{i}s_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H} - p_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}\gamma^5\right)$$

Symmetriefaktor 2 für identische Neutralinos



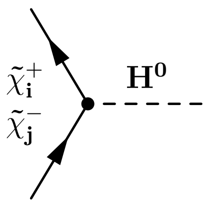
$$\frac{g}{2}\left(\mathrm{i}s_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h} - p_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h}\gamma^5\right)$$

Symmetriefaktor 2 für identische Neutralinos

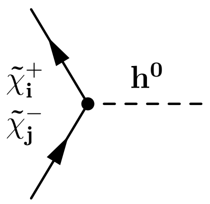


$$\frac{g}{2}\left(\mathrm{i}s_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A} - p_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A}\gamma^5\right)$$

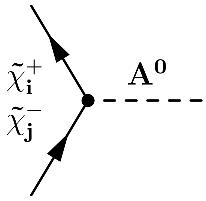
Symmetriefaktor 2 für identische Neutralinos



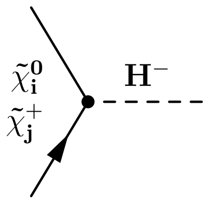
$$\mathrm{i}\frac{g}{2\sqrt{2}}\left(L_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}(1-\gamma^5) + R_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}H}(1+\gamma^5)\right)$$



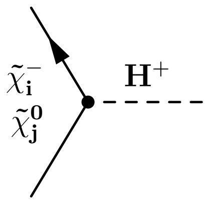
$$\mathrm{i}\frac{g}{2\sqrt{2}}\left(L_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h}(1-\gamma^5) + R_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}h}(1+\gamma^5)\right)$$



$$-\frac{g}{2\sqrt{2}}\left(L_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A}(1-\gamma^5)+R_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}A}(1+\gamma^5)\right)$$

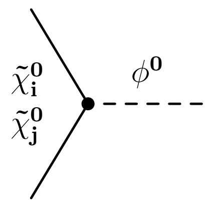


$$\mathrm{i}\frac{g}{2}\left(L_{ij}^{\tilde{\chi}^{\pm}\tilde{\chi}^{0}H^{\mp}}(1-\gamma^5)+R_{ij}^{\tilde{\chi}^{\pm}\tilde{\chi}^{0}H^{\mp}}(1+\gamma^5)\right)$$



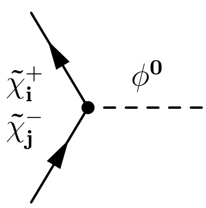
$$\mathrm{i}\frac{g}{2}\left((R_{ji}^{\tilde{\chi}^{\pm}\tilde{\chi}^{0}H^{\mp}})^*(1-\gamma^5)+(L_{ij}^{\tilde{\chi}^{\pm}\tilde{\chi}^{0}H^{\mp}})^*(1+\gamma^5)\right)$$

8.11 Goldstone-Kopplungen der Charginos und Neutralinos

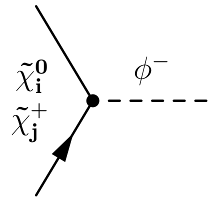


$$\frac{g}{2}\left(\mathrm{i}s_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi}-p_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi}\gamma^5\right)$$

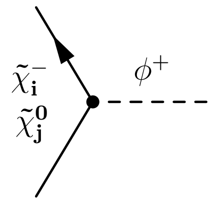
Symmetriefaktor 2 für identische Neutralinos



$$-\frac{g}{2\sqrt{2}}\left(L_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi}(1-\gamma^5)+R_{ij}^{\tilde{\chi}\tilde{\chi}\phi}(1+\gamma^5)-\right)$$



$$\mathrm{i}\frac{g}{2}\left(L_{ij}^{\tilde{\chi}^{\pm}\tilde{\chi}^0\phi^{\mp}}(1-\gamma^5)+R_{ij}^{\tilde{\chi}^{\pm}\tilde{\chi}^0\phi^{\mp}}(1+\gamma^5)\right)$$

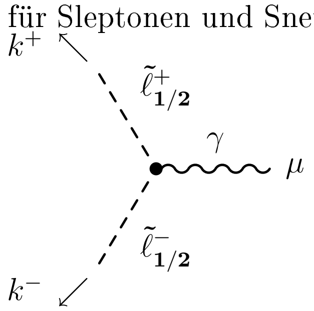


$$\mathrm{i}\frac{g}{2}\left((R_{ji}^{\tilde{\chi}^{\pm}\tilde{\chi}^0\phi^{\mp}})^*(1-\gamma^5)+(L_{ij}^{\tilde{\chi}^{\pm}\tilde{\chi}^0\phi^{\mp}})^*(1+\gamma^5)\right)$$

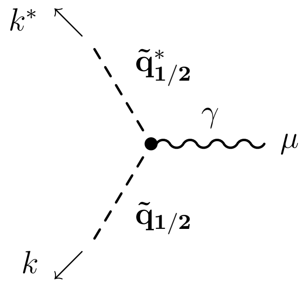
8.12 Eichkopplungen der Sfermionen

Anmerkung

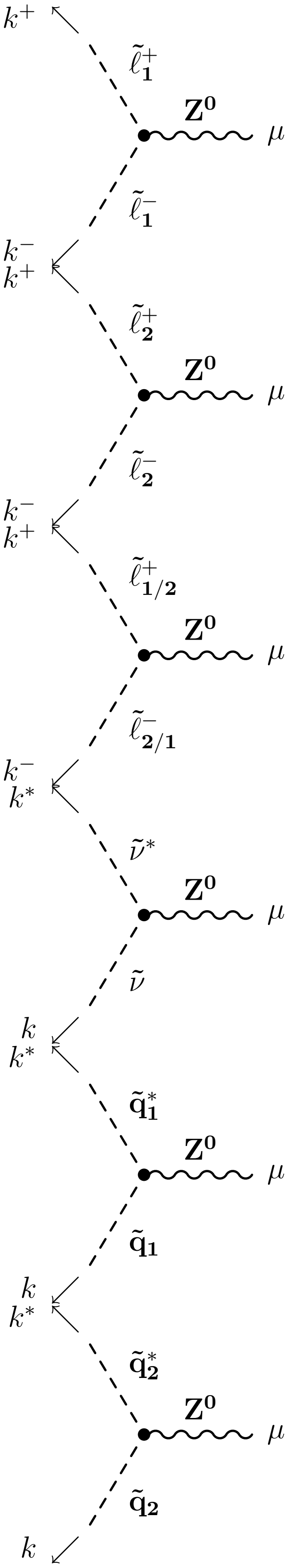
Es sind nur die Vertizes aufgeführt, die das positive W-Boson W^+ enthalten. Die entsprechenden Vertizes mit den negativen W-Bosonen sind durch komplexe Konjugation der analytischen Ausdrücke für die positiven W-Vertizes zu erhalten. In diesem Abschnitt bedeutet T_3 die 3-Komponente des schwachen Isospins, 1/2 für up-Quarks und $-1/2$ für down-Quarks. Die Kopplungen für Sleptonen und Sneutrinos sind getrennt aufgeführt.



$$-\mathrm{i}e\,(k^+-k^-)^\mu$$



$$-\mathrm{i}eQ_{el.}\,(k-k^*)^\mu$$



$$\mathrm{i}\frac{g_Z}{2}\left(\cos^2\theta_\ell - 2\sin^2\theta_W\right)(k^- - k^+)^\mu$$

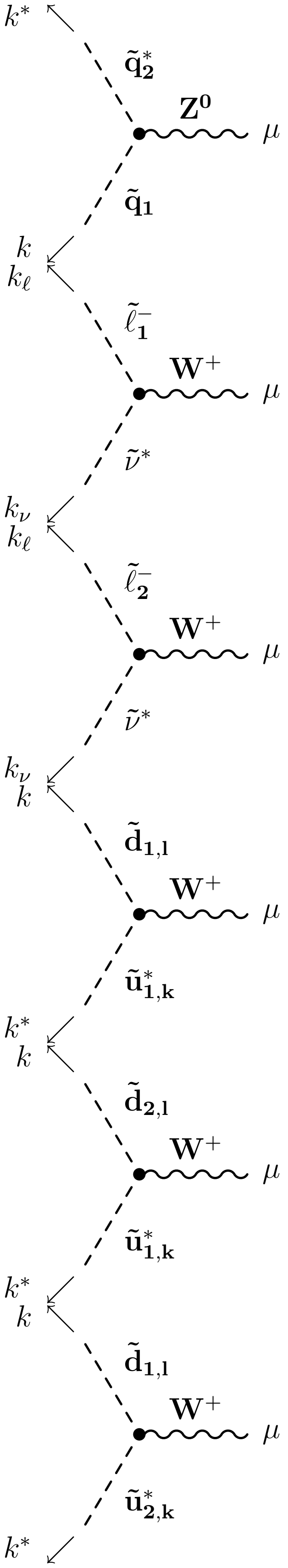
$$\mathrm{i}\frac{g_Z}{2}\left(\sin^2\theta_\ell - 2\sin^2\theta_W\right)(k^- - k^+)^\mu$$

$$-\mathrm{i}\frac{g_Z}{2}\sin\theta_\ell\cos\theta_\ell\,(k^- - k^+)^\mu$$

$$-\mathrm{i}\frac{g_Z}{2}\,(k - k^*)^\mu$$

$$-\mathrm{i}g_Z\left(\cos^2\theta_q T_3 - \sin^2\theta_W Q_{el.}\right)(k - k^*)^\mu$$

$$-\mathrm{i}g_Z\left(\sin^2\theta_q T_3 - \sin^2\theta_W Q_{el.}\right)(k - k^*)^\mu$$



$$\mathrm{i} g_Z \sin\theta_q \cos\theta_q T_3 \,(k - k^*)^\mu$$

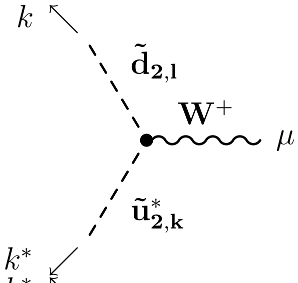
$$-\mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}} \cos\theta_\ell \,(k_\ell - k_\nu)^\mu$$

$$\mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}} \sin\theta_\ell \,(k_\ell - k_\nu)^\mu$$

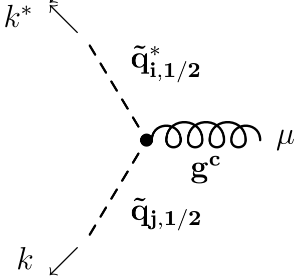
$$-\mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}} V_{kl}^{CKM} \cos\theta_{u_k} \cos\theta_{d,l} \,(k - k^*)^\mu$$

$$\mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}} V_{kl}^{CKM} \cos\theta_{u_k} \sin\theta_{d_l} \,(k - k^*)^\mu$$

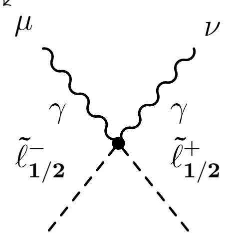
$$\mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}} V_{kl}^{CKM} \sin\theta_{u_k} \cos\theta_{d_l} \,(k - k^*)^\mu$$



$$-\mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}V_{kl}^{CKM}\sin\theta_{u_k}\sin\theta_{d_l}\,(k-k^*)^\mu$$

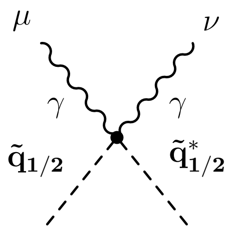


$$-\mathrm{i}g_s T^c_{ij}\,(k-k^*)^\mu$$



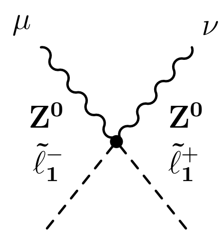
$$\mathrm{i}\cdot 2\,e^2 g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Photonen.



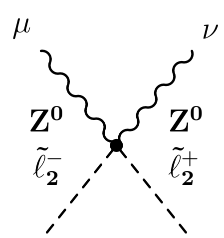
$$\mathrm{i}\cdot 2\,e^2 Q^2_{el.} g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Photonen.



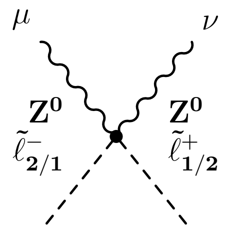
$$\frac{\mathrm{i}g_Z^2}{2}\left[\left(1-4\sin^2\theta_W\right)\cos^2\theta_\ell + 4\sin^4\theta_W\right]\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Z^0



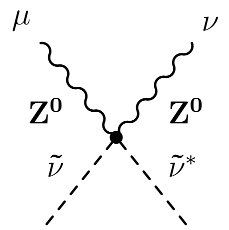
$$\frac{\mathrm{i}g_Z^2}{2}\left[\left(1-4\sin^2\theta_W\right)\sin^2\theta_\ell + 4\sin^4\theta_W\right]\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Z^0



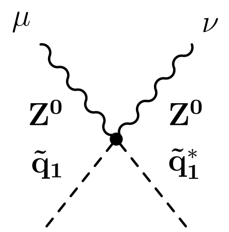
$$-\frac{\mathrm{i}g_Z^2}{2}\left(1-4\sin^2\theta_W\right)\sin\theta_\ell\cos\theta_\ell\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Z^0



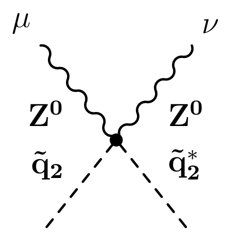
$$\frac{\mathrm{i}g_Z^2}{2}\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Z^0



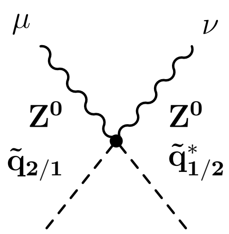
$$2\mathrm{i}g_Z^2\left[\left(T_3^2-2\sin^2\theta_W T_3 Q_{el.}\right)\cos^2\theta_q \\ +\sin^4\theta_W Q_{el.}^2\right]\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Z^0



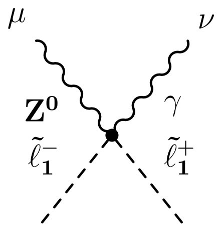
$$2\mathrm{i}g_Z^2\left[\left(T_3^2-2\sin^2\theta_W T_3 Q_{el.}\right)\sin^2\theta_q \\ +\sin^4\theta_W Q_{el.}^2\right]\cdot g^{\mu\nu}$$

Symmetriefaktor 2 für Z^0

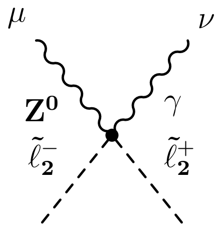


$$-2\mathrm{i}g_Z^2\left(T_3^2-2\sin^2\theta_W T_3 Q_{el.}\right)\sin\theta_q\cos\theta_q\cdot g^{\mu\nu}$$

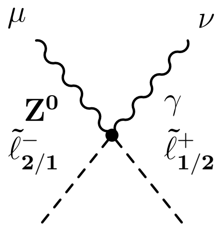
Symmetriefaktor 2 für Z^0



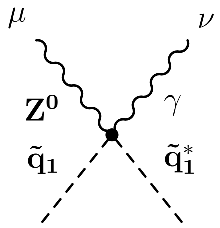
$$\mathrm{i}eg_Z \left(\cos^2\theta_\ell - 2\sin^2\theta_W\right) \cdot g^{\mu\nu}$$



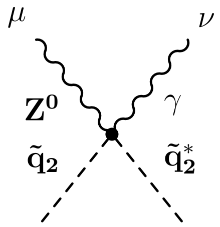
$$\mathrm{i}eg_Z \left(\sin^2\theta_\ell - 2\sin^2\theta_W\right) \cdot g^{\mu\nu}$$



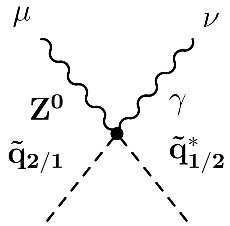
$$-\mathrm{i}eg_Z \sin\theta_\ell \cos\theta_\ell \cdot g^{\mu\nu}$$



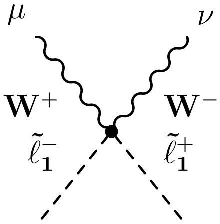
$$2\mathrm{i}eg \left(\cos^2\theta_q T_3 - \sin^2\theta_W Q_{el.}\right) Q_{el.} \cdot g^{\mu\nu}$$



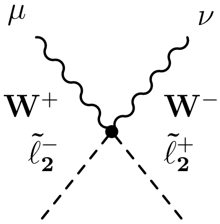
$$2\mathrm{i}eg \left(\sin^2\theta_q T_3 - \sin^2\theta_W Q_{el.}\right) Q_{el.} \cdot g^{\mu\nu}$$



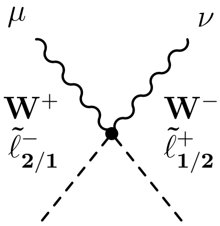
$$-2\mathrm{i}egT_3 Q_{el.} \sin\theta_q \cos\theta_q \cdot g^{\mu\nu}$$



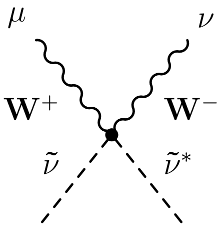
$$\mathrm{i}\frac{g^2}{2}\cos^2\theta_\ell \cdot g^{\mu\nu}$$



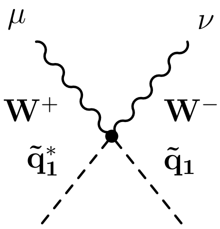
$$\mathrm{i}\frac{g^2}{2}\sin^2\theta_\ell \cdot g^{\mu\nu}$$



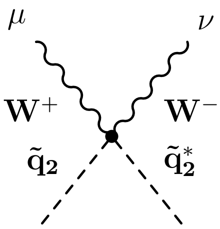
$$-\mathrm{i}\frac{g^2}{2}\sin\theta_\ell\cos\theta_\ell \cdot g^{\mu\nu}$$



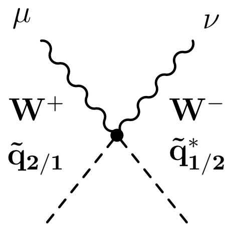
$$\mathrm{i}\frac{g^2}{2} \cdot g^{\mu\nu}$$



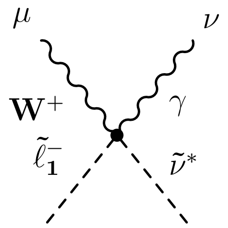
$$\mathrm{i}\frac{g^2}{2}\cos\theta_q^2 \cdot g^{\mu\nu}$$



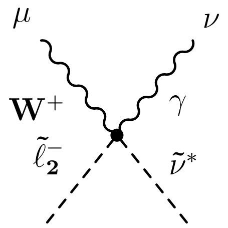
$$\mathrm{i}\frac{g^2}{2}\sin^2\theta_q \cdot g^{\mu\nu}$$



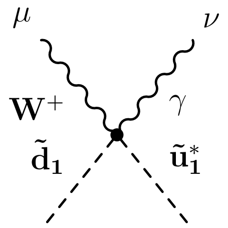
$$-\mathrm{i}\frac{g^2}{2}\cos\theta_q\sin\theta_q\cdot g^{\mu\nu}$$



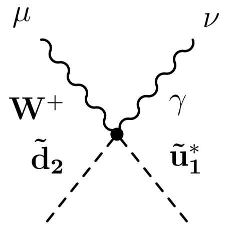
$$-\mathrm{i}\frac{eg}{\sqrt{2}}\cos\theta_\ell\cdot g^{\mu\nu}$$



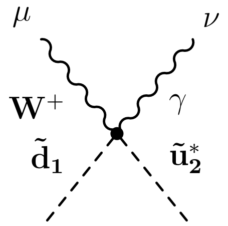
$$\mathrm{i}\frac{eg}{\sqrt{2}}\sin\theta_\ell\cdot g^{\mu\nu}$$



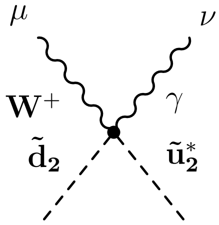
$$\mathrm{i}\frac{eg}{\sqrt{2}}(Q_{el.,u}+Q_{el.,d})V^{CKM}_{kl}\cos\theta_{u,k}\cos\theta_{d,l}\cdot g^{\mu\nu}$$



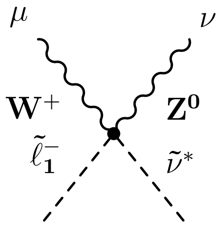
$$-\mathrm{i}\frac{eg}{\sqrt{2}}(Q_{el.,u}+Q_{el.,d})V^{CKM}_{kl}\cos\theta_{u,k}\sin\theta_{d,l}\cdot g^{\mu\nu}$$



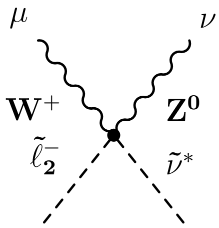
$$-\mathrm{i}\frac{eg}{\sqrt{2}}(Q_{el.,u}+Q_{el.,d})V^{CKM}_{kl}\sin\theta_{u,k}\cos\theta_{d,l}\cdot g^{\mu\nu}$$



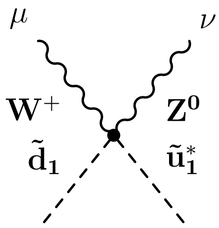
$$\mathrm{i}\frac{eg}{\sqrt{2}}(Q_{el.,u}+Q_{el.,d})V_{kl}^{CKM}\sin\theta_{u,k}\sin\theta_{d,l}\cdot g^{\mu\nu}$$



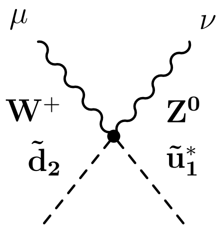
$$\mathrm{i}\frac{g^2\sin^2\theta_W}{\sqrt{2}\cos\theta_W}\cos\theta_\ell\cdot g^{\mu\nu}$$



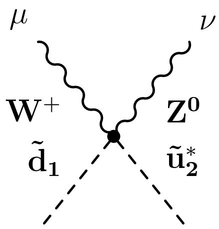
$$-\mathrm{i}\frac{g^2\sin^2\theta_W}{\sqrt{2}\cos\theta_W}\sin\theta_\ell\cdot g^{\mu\nu}$$



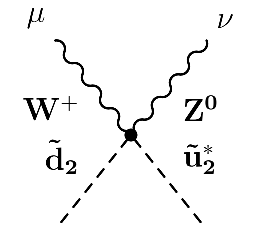
$$-\mathrm{i}\frac{g^2}{\sqrt{2}\cos\theta_W}\sin^2\theta_W(Q_{el.,u}+Q_{el.,d})V_{kl}^{CKM}\cdot \\ \cos\theta_{u,k}\cos\theta_{d,l}\cdot g^{\mu\nu}$$



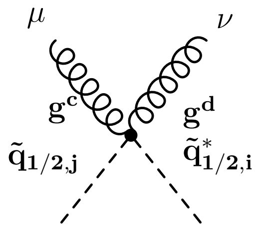
$$\mathrm{i}\frac{g^2}{\sqrt{2}\cos\theta_W}\sin^2\theta_W(Q_{el.,u}+Q_{el.,d})V_{kl}^{CKM}\cdot \\ \cos\theta_{u,k}\sin\theta_{d,l}\cdot g^{\mu\nu}$$



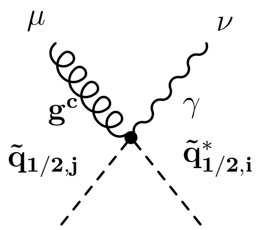
$$\mathrm{i}\frac{g^2}{\sqrt{2}\cos\theta_W}\sin^2\theta_W(Q_{el.,u}+Q_{el.,d})V_{kl}^{CKM}\cdot \\ \sin\theta_{u,k}\cos\theta_{d,l}\cdot g^{\mu\nu}$$



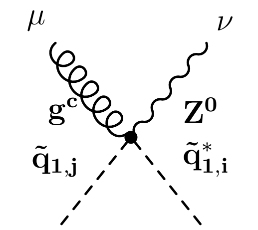
$$-\mathrm{i}\frac{g^2}{\sqrt{2}\cos\theta_W}\sin^2\theta_W(Q_{el.,u}+Q_{el.,d})V_{kl}^{CKM}\cdot$$
$$\sin\theta_{u,k}\sin\theta_{d,l}\cdot g^{\mu\nu}$$



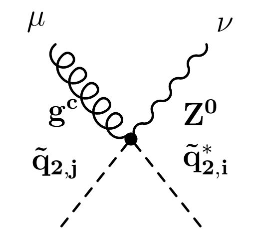
$$\mathrm{i}g_s^2(T^dT^c)_{ij}g^{\mu\nu}$$



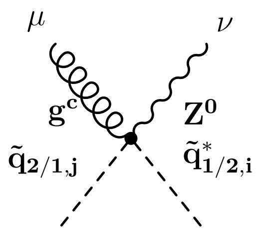
$$2\mathrm{i}eg_s(T^c)_{ij}g^{\mu\nu}$$



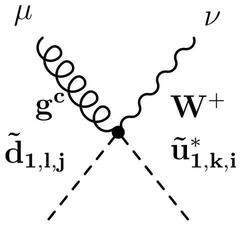
$$\mathrm{i}g_Zg_s\left(\cos^2\theta_qT_3-\sin^2\theta_WQ_{el.}\right)(T^c)_{ij}g^{\mu\nu}$$



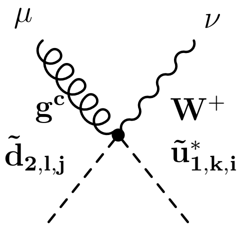
$$\mathrm{i}g_Zg_s\left(\sin^2\theta_qT_3-\sin^2\theta_WQ_{el.}\right)(T^c)_{ij}g^{\mu\nu}$$



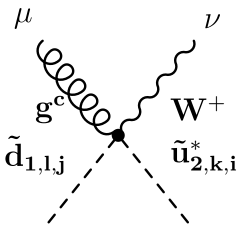
$$-\mathrm{i}g_Zg_s\sin\theta_q\cos\theta_qT_3(T^c)_{ij}g^{\mu\nu}$$



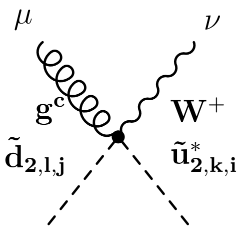
$\mathrm{i}\sqrt{2}gg_s\cos\theta_{u_k}\cos\theta_{d_l}(T^c)_{ij}V^{CKM}_{kl}g^{\mu\nu}$



$-\mathrm{i}\sqrt{2}gg_s\cos\theta_{u_k}\sin\theta_{d_l}(T^c)_{ij}V^{CKM}_{kl}g^{\mu\nu}$

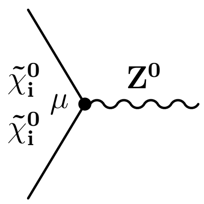


$-\mathrm{i}\sqrt{2}gg_s\sin\theta_{u_k}\cos\theta_{d_l}(T^c)_{ij}V^{CKM}_{kl}g^{\mu\nu}$



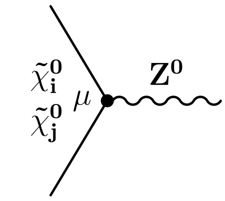
$\mathrm{i}\sqrt{2}gg_s\sin\theta_{u_k}\sin\theta_{d_l}(T^c)_{ij}V^{CKM}_{kl}g^{\mu\nu}$

8.13 Eichkopplungen der Charginos und Neutralinos

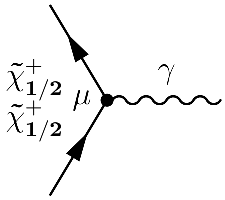


$\mathrm{i}g_Z a^0_{ii}\gamma^\mu\gamma^5$

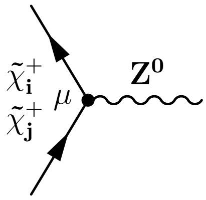
Symmetriefaktor 2 der Neutralinos.



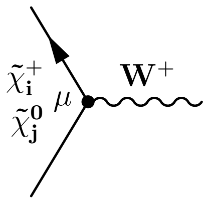
$-\mathrm{i}g_Z\gamma^\mu\left(v^0_{ij} - a^0_{ij}\gamma^5\right)$



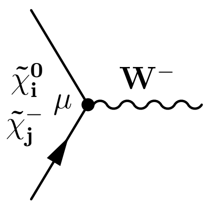
$\mathrm{i}e\gamma^\mu$



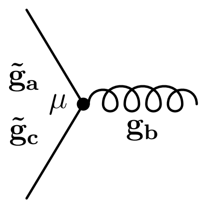
$\mathrm{i}g_Z\gamma^\mu\left(v^+_{ij} - a^+_{ij}\gamma^5\right)$



$\mathrm{i}\,\frac{g}{2}\Big[L^{+0}_{ij}\,(1-\gamma^5) + R^{+0}_{ij}\,(1+\gamma^5)\Big]$

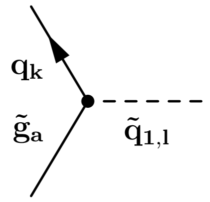


$\mathrm{i}\,\frac{g}{2}\Big[L^{0+}_{ij}\,(1-\gamma^5) + R^{0+}_{ij}\,(1+\gamma^5)\Big]$

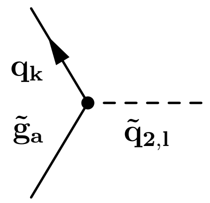


$-g_s f_{abc}\gamma^\mu$

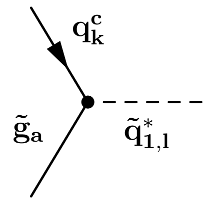
8.14 Weitere Wechselwirkungen der Gluinos, Neutralinos und Charginos



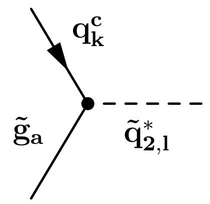
$$\mathrm{i}\frac{g_s}{\sqrt{2}}T^a_{kl}\Big[(1+\gamma^5)\cos\theta_q-(1-\gamma^5)\sin\theta_q\Big]$$



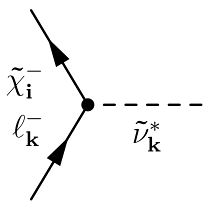
$$-\mathrm{i}\frac{g_s}{\sqrt{2}}T^a_{kl}\Big[(1+\gamma^5)\sin\theta+(1-\gamma^5)\cos\theta\Big]$$



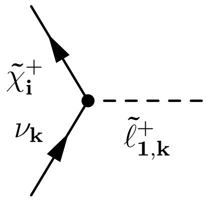
$$\mathrm{i}\frac{g_s}{\sqrt{2}}T^a_{kl}\Big[(1+\gamma^5)\sin\theta_q-(1-\gamma^5)\cos\theta_q\Big]$$



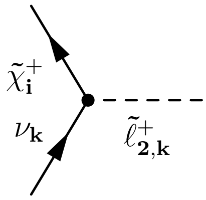
$$-\mathrm{i}\frac{g_s}{\sqrt{2}}T^a_{kl}\Big[(1+\gamma^5)\cos\theta+(1-\gamma^5)\sin\theta\Big]$$



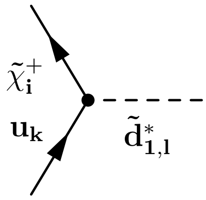
$$\mathrm{i}\frac{g}{2}\left(V^*_{i1}(1-\gamma^5)+\frac{m_{\ell_k}}{\sqrt{2}m_W\cos\beta}U_{i2}(1+\gamma^5)\right)$$



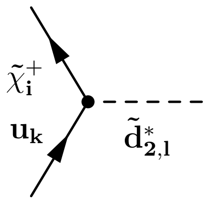
$$\mathrm{i}\frac{g}{2}\left(U^*_{i1}\cos\theta_{\ell_k} + \frac{m_{\ell_k}}{\sqrt{2}m_W\cos\beta}U^*_{i2}\sin\theta_{\ell_k}\right)(1-\gamma^5)$$



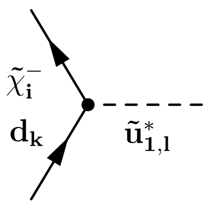
$$\mathrm{i}\frac{g}{2}\left(-U^*_{i1}\sin\theta_{\ell_k} + \frac{m_{\ell_k}}{\sqrt{2}m_W\cos\beta}U^*_{i2}\cos\theta_{\ell_k}\right)(1-\gamma^5)$$



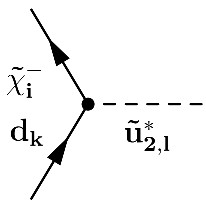
$$\mathrm{i}\frac{g}{2}\left[\left(U^*_{i1}\cos\theta_{d_l} + \frac{m_{d_l}}{\sqrt{2}m_W\cos\beta}U^*_{i2}\sin\theta_{d_l}\right)(1-\gamma^5) + \frac{m_{u_k}}{\sqrt{2}m_W\sin\beta}V_{i2}\cos\theta_{d_l}(1+\gamma^5)\right]V^{CKM\,*}_{kl}$$



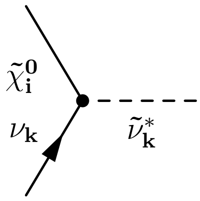
$$\mathrm{i}\frac{g}{2}\left[\left(-U^*_{i1}\sin\theta_{d_l} + \frac{m_{d_l}}{\sqrt{2}m_W\cos\beta}U^*_{i2}\cos\theta_{d_l}\right)(1-\gamma^5) - \frac{m_{u_k}}{\sqrt{2}m_W\sin\beta}V_{i2}\sin\theta_{d_l}(1+\gamma^5)\right]V^{CKM\,*}_{kl}$$



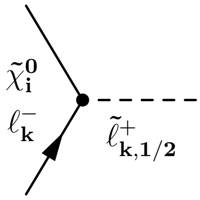
$$\mathrm{i}\frac{g}{2}\left[\left(V^*_{i1}\cos\theta_{u_l} + \frac{m_{u_l}}{\sqrt{2}m_W\sin\beta}V^*_{i2}\sin\theta_{u_l}\right)(1-\gamma^5) + \frac{m_{d_k}}{\sqrt{2}m_W\cos\beta}U_{i2}\cos\theta_{u_l}(1+\gamma^5)\right]V^{CKM}_{lk}$$



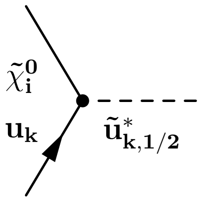
$$\mathrm{i}\frac{g}{2}\left[-\left(V^*_{i1}\sin\theta_{u_l} + \frac{m_{u_l}}{\sqrt{2}m_W\sin\beta}V^*_{i2}\cos\theta_{u_l}\right)(1-\gamma^5) - \frac{m_{d_k}}{\sqrt{2}m_W\cos\beta}U_{i2}\sin\theta_{u_l}(1+\gamma^5)\right]V^{CKM}_{lk}$$



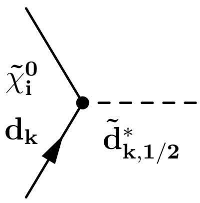
$$\mathrm{i}\frac{g}{2\sqrt{2}} L_i^{\tilde{\chi}\nu\tilde{\nu}}(1-\gamma^5)$$



$$\mathrm{i}\frac{g}{2\sqrt{2}}\left[L_i^{\tilde{\chi}\ell\tilde{\ell}_{1/2}}(1-\gamma^5)+R_i^{\tilde{\chi}\ell\tilde{\ell}_{1/2}}(1+\gamma^5)\right]$$



$$\mathrm{i}\frac{g}{2\sqrt{2}}\left[L_i^{\tilde{\chi}u\tilde{u}_{1/2}}(1-\gamma^5)+R_i^{\tilde{\chi}u\tilde{u}_{1/2}}(1+\gamma^5)\right]$$



$$\mathrm{i}\frac{g}{2\sqrt{2}}\left[L_i^{\tilde{\chi}d\tilde{d}_{1/2}}(1-\gamma^5)+R_i^{\tilde{\chi}d\tilde{d}_{1/2}}(1+\gamma^5)\right]$$

Teil IV

Stringtheorie

Kapitel 9

Grundlagen der String-Theorie

9.1 Konventionen

Wie immer müssen wir zuerst einige Vereinbarungen treffen. Da es sich Stringtheoretiker (als ob es String-*Experimentalisten* gäbe!) angewöhnt haben, die Metrik entgegen der meisten feldtheoretischen Arbeiten zu definieren, übernehmen wir hier diese Definition und setzen die Metrik einer flachen D-dimensionalen Raum-Zeit gleich

$$\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1, \ldots) \tag{9.1}$$

Die Indizes μ, ν laufen hier über die Werte $0, 1, 2, \ldots D-1$. So wie ein Punktteilchen bei seiner Bewegung durch die Raum-Zeit eine eindimensionale Spur hinterläßt, die Weltlinie, so nennt man in Analogie die zweidimensionale Mannigfaltigkeit (!), die ein String in der Raum-Zeit durchläuft, die *Weltfläche* oder auch in Anlehnung an die Eigenschaften Riemannscher Flächen, das „Weltblatt“. Während wir griechische Indizes für die D-dimensionalen Raum-Zeit-Koordinaten benutzen, verwenden wir lateinische Indizes für die zweidimensionalen Weltflächen-Koordinaten. Beachte ferner, daß, wenn wir auch Strings in einer flachen Raum-Zeit betrachten, die Weltfläche stets eine gekrümmte Mannigfaltigkeit ist.

9.2 Quantisierung des relativistischen Strings

Als Motivation für das Hinschreiben einer Wirkung für einen (relativistischen) String nimmt man die Wirkung eines relativistischen Punktteilchens, die proportional zur Länge der Weltlinie ist, s. [20]:

$$S = -m \int_a^b ds, \qquad ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \tag{9.2}$$

Entsprechend dieser Tatsache setzt man die Wirkung eines relativistischen Strings proportional zu seiner Weltfläche an. Da die Fläche der Weltfläche nicht von der Wahl der Koordinaten abhängen kann (so wie ja auch die Länge der Weltlinie eines Punktteilchens nicht von der Parametrisierung der Linie abhängt), müssen wir einen Ausdruck finden, der kovariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen formuliert ist (nochmal: die Weltfläche ist eine gekrümmte Mannigfaltigkeit).

Die Weltflächen-Koordinaten werden mit $\xi^0 \equiv \tau$ und $\xi^1 \equiv \sigma$ bezeichnet, so daß τ eine „zeitartige" und σ eine „raumartige" Größe auf der Weltfläche darstellt. Bezüglich der Vorfaktoren hat sich eine Konvention eingebürgert, s. [21], [22], [23], die der String-Wirkung folgende Form gibt:

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \, \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X_\nu \eta^{\mu\nu}, \tag{9.3}$$

wobei die Konstante α' für offene Strings

Anhang A

Enzyklopädie

- **Anomalie**

  Eine Anomalie ist das Scheitern des Übertragens einer Symmetrie (global oder lokal) von der klassischen in die quantisierte Theorie. Dies passiert, wenn der mit der Symmetrie verbundene Strom aufgrund von Quantenkorrekturen nicht länger erhalten ist. Die wichtigste Anomalie in der Superstring-Theorie ist die konforme Anomalie, die die Zahl der Dimensionen auf entweder 26 oder 10 festlegt. Ebenso zwingt uns das Verschwinden der chiralen Anomalie zu Gruppen wie $E_8 \otimes E_8$ und $O(32)$. Es kann zudem gezeigt werden, daß Stringtheorie frei von globalen Anomalien ist, die die modulare Invarianz, eine globale Symmetrie, verletzen könnten.

- **Automorphe Funktion**

  Eine automorphe Funktion bleibt invariant unter projektiven Transformationen, $\psi(z) = \psi[P(z)]$. Automorphe Funktionen treten als die Integranden von N-Schleifen-Stringamplituden auf.

- **Betti-Zahl**

  Die p-te Betti-Zahl ist die Zahl der unabhängigen p-Formen einer reellen Mannigfaltigkeit. Diese ist gleich der p-ten Kohomologie oder der p-ten Homologie-Gruppe für deren Oberfläche. Betti-Zahlen sind wichtig, weil sie topologische Invarianten sind, die uns ein elegantes Mittel in die Hand geben, topologisch äquivalente Oberflächen zu klassifizieren. Sind zwei Oberflächen topologisch äquivalent, haben sie dieselben Betti-Zahlen. Andere wichtige topologische Invarianten wie der Euler-Index sind aus den Betti-Zahlen zusammengesetzt.

- **Bianchi-Identität**

Die Bianchi-Identität ist eine Identität für Krümmungs-2-Formen, die auf der Jacobi-Identität für kovariante Ableitungen basiert:

$$[D_{[\mu}, [D_\nu, D_{\lambda]}]] = 0$$

Explizit ausgeschrieben, hat man:

$$D_{[\alpha} R_{\beta\gamma]\delta\epsilon} = 0$$

Weil sie nur eine Umformungsidentität ist, enthält die Bianchi-Identität keinerlei neue physikalische Information.

- **Bosonisierung**

  Bosonisierung wird der Prozeß genannt, durch welchen in zwei Dimensionen Fermionen aus Bosonen erzeugt werden können, d.h. $\psi = : e^{\phi(z)} :$. Zunächst dachte man, so etwas sei unmöglich. Das intuitive Argument, daß dies nur in zwei Dimensionen funktioniert, ist, daß die Lorentz-Gruppe in zwei Dimensionen nur einen Generator hat und das Konzept des „Spins" trivial wird. Folglich ist der eigentliche Gehalt des Begriffs Bosonisierung die Bildung antikommutierender Variablen aus kommutierenden. In der konformen Feldtheorie spielt Bosonisierung eine wichtige Rolle bei der Konstruktion wirklich sinnvoller fermionischer Vertexfunktionen. Dies gelingt, weil die Bosonisierung eine explizite Gestalt der irreduziblen Darstellungen der Kac-Moody-Algebren für die $SO(10)$ liefert.

- **BRST-Transformation**

  Die Becchi-Rouet-Stora-Tjupin-Transformation ist eine Transformation auf den Eichfeldern und deren Fadeev-Popov-Geistern. Es ist eine nilpotente Symmetrie, so daß keine neuen Eichbedingungen von diesen kommen können. Die Symmetrietransformationen werden erzeugt von der BRST-Ladung Q, für die $Q^2 = 0$ gilt. Für den String implementiert das $D = 26$.

- **Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit**

  Calabi vermutete und Yau bewies, daß eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit mit verschwindender 1. Chern-Klasse stets eine Kähler-Metrik mit $SU(3)$-Holonomie aufweist. Mannigfaltigkeiten dieser Art werden Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten genannt; sie bilden die klassischen Vakua für die sechsdimensionale Stringmannigfaltigkeit nach der dynamischen Symmetriebrechung. Sie werden abgeleitet unter der Annahme, daß die $N = 1$-Supersymmetrie beim Prozeß der Kompaktifizierung erhalten bleibt, was die Existenz eines kovariant konstanten Spinors impliziert.

- **Chan-Paton-Faktor**

  Der Chan-Paton-Faktor ist ein multiplikativer Vorfaktor der Veneziano-Amplitude, der Isospin-Indizes auf dem String einführt. Es ist die einfachste Methode, Isospin in die Superstring-Theorie einzubauen, welche konsistent ist mit der Dualität. Wir multiplizieren einfach die N-Punkt-Amplitude mit der Spur der Isospin-Matrizen, die symmetrisch unter zyklischen Permutationen ist. Fordern wir Faktorisierbarkeit sowie, daß das Yang-Mills-Teilchen in der adjungierten Darstellung der Gruppe sei, schränken wir

- **Chern-Charakter**

  Der Chern-Charakter einer Mannigfaltigkeit M mit Krümmungsform Ω ist gegeben durch

  $$ch\,(M) = \mathrm{Tr}\; e^{(\mathrm{i}/2\pi)\Omega}$$

- **Chern-Klasse**

  Die Chern-Klasse $c(M)$ einer Krümmungsform Ω ist gleich

  $$c(M) = \det\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Omega\right)$$

- **Fast komplexe Struktur**

  Eine Mannigfaltigkeit hat fast komplexe Struktur, wenn es einen Endomorphismus J gibt, so daß $J^2 = -1$. Dies ist eine Verallgemeinerung des Konzeptes der imaginären Einheit i. Mannigfaltigkeiten mit fast komplexer Struktur haben gerade Dimension und sind orientierbar (was S_{ungerade} und P_{2n} ausschließt).

- **Kähler-Form**

  Die Kähler-Form ist gegeben durch

  $$\Omega = g_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j,$$

  wobei $g_{i\bar{j}}$ eine hermitesche Matrix ist.

- **Kähler-Mannigfaltigkeit**

  Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist kählersch, wenn sie eine hermitesche Metrik besitzt und ihre Kähler-Form geschlossen ist, d.h.

  $$d\Omega = 0.$$

Eine Zahl eleganter Sätze läßt sich für Kähler-Mannigfaltigkeiten beweisen, z.B., daß alle Laplace-Operatoren, die sich für komplexe Mannigfaltigkeiten hinschreiben lassen, identisch sind.

- **Kähler-Potential**

  Für eine Kähler-Mannigfaltigkeit kann gezeigt werden, daß die hermitesche Metrik mittels einer einzigen Funktion geschrieben werden kann, die das Kähler-Potential ϕ genannt wird:

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}$$

- **Krümmungsform**

  In der Theorie der differenzierbaren Formen wird die Form

$$d\omega + \omega \wedge \omega$$

  die Krümmungsform-2-Form genannt, wenn ω eine über einer Lie-Algebra definierte Zusammenhangs-1-Form ist. Wenn als Tangentenraum die Lorentz-Gruppe gewählt wird, läßt sich die Krümmungs-2-Form wie folgt schreiben:

$$R^\alpha_\beta = d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta = \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\gamma\delta} dx^\gamma \wedge dx^\delta,$$

  wo $\alpha, \ldots$ Lorentz-Indizes bezeichnen.

- **Majorana-Spinor**

  Ein Majorana-Spinor ist eine rein reelle Darstellung der Dirac-Matrizen. Teilchen sind demzufolge ihre eigenen Antiteilchen. Majorana-Spinoren existieren nur in $d = 2, 3, 4 \pmod 8$ Dimensionen.

- **Mannigfaltigkeit**

  Ein Raum M, der mit Flicken U_i so überdeckt werden kann, daß die homöomorphen Bilder dieser Flicken Unterräume des n-dimensionalen reellen Raumes $\mathbb{R}^n$ oder des n-dimensionalen komplexen Raumes $\mathbb{C}^n$ sind und die Übergänge zwischen diesen Bildern glatt, dann heißt der Raum eine Mannigfaltigkeit. Wechselwirkende String-Theorien sind über Mannigfaltigkeiten (d.h. Riemannschen Flächen) definiert, wechselwirkende Punktteilchentheorien aber nicht. Feynman-Graphen stellen keine Mannigfaltigkeiten dar, weil ihre lokale Topologie nicht die des $\mathbb{C}^n$ ist.

- **Weltfläche**

  Die Weltfläche ist die zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, die durch die Bewegung des Strings gebildet wird.

- **Weyl-Spinor**

  Ein Weyl-Spinor ist eine Darstellung der Dirac-Algebra mit definierter Chiralität. D.h., der Eigenwert von Γ_{D+1} ist ± 1. Weyl-Spinoren können nur in geraden Dimensionen definiert werden.

- **Weyl-Transformation**

  Eine Weyl-Transformation ist eine Skalen-Transformation.

- **Wilson-Linie**

  Die eichinvariante Wilson-Schleife ist das Bahnintegral

  $$U = \mathcal{P}\ e^{\mathrm{i}\int_{\mathcal{C}} dzA},$$

  wo wir eine Bahnordnung $\mathcal{P}$ entlang der geschlossenen Kurve $\mathcal{C}$ wählen, und A die Zusammenhangs-1-Form einer Lie-Algebra ist. Wenn eine Mannigfaltigkeit einfach zusammenhängend ist (d.h., daß eine auf der Oberfläche verlaufende Linie stetig zu einem Punkt zusammengezogen werden kann), bedeutet das Verschwinden von A, daß U identisch Eins ist. Wenn jedoch eine Mannigfaltigkeit nicht einfach zusammenhängend ist, dann muß U nicht mit Eins übereinstimmen, selbst wenn A verschwindet. Folglich kann E_6 zu einer Untergruppe gebrochen werden, die mit allen Elementen von U kommutiert. Dies wird Symmetriebrechung mittels Wilson-Linien genannt.

- Z_N

  Das ist die diskrete Permutationsgruppe, deren $N!$ Elemente alle der Relation $g^N = 1$ genügen.

- **Zusammenhangsform**

  Eine Zusammenhangsform ist eine Lie-Algebra-wertige 1-Form ω, die zu der partiellen Ableitung addiert wird, um eine generisch kovariante Ableitung zu erhalten:

  $$D_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu.$$

  Der Zusammenhang ist ein gemischter Tensor. Er ist ein Vektor in der Raumzeit, aber auch Element der Lie-Algebra. In der Sprache der Faserbündel ist die *Basis* die gewöhnliche Raumzeit, während der *Faser-*

oder *Totalraum* der mit der Lie-Algebra verbundene ist. Der Zusammenhang erlaubt es uns, die Basis mit dem Totalraum „zusammenhängend“ zu betrachten, wenn man in der Basismannigfaltigkeit von einem Punkt zu einem benachbarten geht. Für die $SU(N)$-Gruppen ist der Zusammenhang gerade das übliche Yang-Mills-Feld:

$$\omega = A = A_\mu^A dx^\mu \lambda_A$$

Bei der Lorentz-Gruppe spricht man vom Spin-Zusammenhang:

$$\omega = \omega_\mu^{\alpha\beta} dx^\mu M^{\alpha\beta},$$

wo M eine Matrixdarstellung der Generatoren der Lorentz-Gruppe ist.

Anhang B

Gruppen

26 sporadische Gruppen ohne Regelmäßigkeit. Die größte und interessanteste ist die Gruppe F_1, allgemein das „Monster" genannt, mit

$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 59 \cdot 71 = 1,72 \cdot 10^{52}$ Elementen.

Lie-Gruppen

- $A_n = SU(n+1)$
- $B_n = SO(2n+1)$
- $C_n = Sp(2n)$
- $D_n = SO(2n)$
- E_6
- E_7
- E_8
- F_4
- G_2

B.1 $O(n)$

Dies ist die Gruppe aller orthogonalen reellen $n \times n$-Matrizen:

$$O \cdot O^T = 1. \tag{B.1}$$

Jede orthogonale Matrix kann geschrieben werden als Exponential einer antisymmetrischen Matrix:

$$O = e^A. \tag{B.2}$$

Es gilt

$$O^T = e^{A^T} = e^{-A} = O^{-1}. \tag{B.3}$$

Allgemein hat eine orthogonale Matrix

$$\frac{1}{2}n(n-1)$$

unabhängige Elemente. Man kann stets einen Satz von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unabhängigen Matrizen, genannt Generatoren λ_i, so daß man jedes Element O schreiben kann als:

$$O = e^{\sum_{i=1}^{(1/2)n(n-1)} \rho^i \lambda_i}. \tag{B.4}$$

Die reellen Zahlen λ^i werden als die „Parameter" der Gruppe bezeichnet, somit gibt es $\frac{1}{2}n(n-1)$ Parameter in $O(n)$. Die Zahl der Parameter einer Lie-Gruppe wird ihre Dimension genannt. Der Kommutator zweier Generatoren ergibt wieder eine Linearkombination der Generatoren:

$$[\lambda_i, \lambda_j] = f_{ij}^k \lambda_k, \tag{B.5}$$

wobei die f die *Strukturkonstanten* der Algebra genannt werden. Beachte, daß die Strukturkonstanten die Algebra vollständig bestimmen. Symmetrisieren zweier ineinander geschachtelter Kommutatoren ergibt sofort Null, dies ist die *Jacobi-Identität*

$$[\lambda_{[i}, [\lambda_j, \lambda_{k]}]] = 0. \tag{B.6}$$

Die Identität garantiert die Geschlossenheit der Gruppe. Hieraus folgt sofort eine Einschränkung an die Strukturkonstanten:

$$f_{[ij}^l f_{k]l}^m = 0 \tag{B.7}$$

Natürlich ist die Menge der orthogonalen Matrizen unter Multiplikation abgeschlossen. Schwieriger ist es zu zeigen, daß die spezielle Parametrisierung der orthogonalen Gruppe unter Multiplikation abgeschlossen ist. Aber das Baker-Hausdorff-Theorem zeigt, daß C in

$$e^A e^B = e^C \tag{B.8}$$

identisch ist mit $A + B$ plus alle möglichen vielfachen Kommutatoren von A und B. Weil A und B die Jacobi-Identität erfüllen, erzeugen alle möglichen höheren Generatoren lediglich Linearkombinationen von Generatoren. Die Gruppe ist geschlossen unter Multiplikation.

Die Strukturkonstanten bilden eine Darstellung, die *adjungierte Darstellung*. Man schreibt die Strukturkonstanten als Matrix:

$$f_{ij}^k = (\lambda^k)_{ij} \tag{B.9}$$

Die Kommutator-Relationen können mittels einer geeigneten Matrizenbasis stets auf folgende Gestalt gebracht werden:

$$[M^{ab}, M^{cd}] = \delta^{ac} M^{bd} - \delta^{ad} M^{bc} + \delta^{bd} M^{ac} - \delta^{bc} M^{ad} \tag{B.10}$$

Projektive Gruppe	$O(2,1)$
Lorentz Gruppe	$O(3,1)$
de Sitter Gruppe	$O(4,1)$
Anti-de Sitter Gruppe	$O(3,2)$
Konforme Gruppe	$O(4,2)$

Anhang C

Lie-Algebren

C.1 $SU(3)$

Die Generatoren der $SU(3)$ sind in einer möglichen Darstellung durch die Gell-Mann-Matrizen gegeben:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{C.1}$$

Anhang D

Eigenschaften der Gamma-Matrizen

Die Transponierten der Gamma-Matrizen lassen sich mittels der Ladungskonjugationsmatrix $C = -\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2$ darstellen:

$$\Gamma^T = \begin{cases} +C\Gamma C^{-1} & \Gamma = 1, \gamma^5\gamma^\mu, \gamma^5 \\ -C\Gamma C^{-1} & \Gamma = \gamma^\mu, [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \end{cases} \tag{D.1}$$

Bezüglich der Transponierung besitzen die Gamma-Matrizen das folgende Verhalten:

$$1^T = 1, \tag{D.2}$$

$$\gamma_\mu^T = \begin{cases} -\gamma_\mu & \mu = 1, 3 \\ +\gamma_\mu & \mu = 0, 2 \end{cases} \tag{D.3}$$

$$\gamma_5^T = \gamma_5 \tag{D.4}$$

$$(\gamma_5\gamma_\mu)^T = \begin{cases} +\gamma_5\gamma_\mu & \mu = 1, 3 \\ -\gamma_5\gamma_\mu & \mu = 0, 2 \end{cases} \tag{D.5}$$

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]^T = \begin{cases} +[\gamma_\mu, \gamma_\nu] & \mu = 0, 2 \,\vee\, \nu = 0, 2 \\ -[\gamma_\mu, \gamma_\nu] & \mu, \nu \neq 2 \,\vee\, (\mu, \nu) = (0, 2), (2, 0) \end{cases} \tag{D.6}$$

Gleichung (D.1) für 1 und γ^5 einzusehen ist leicht, da γ^5 mit C und der Identität vertauscht. Die restlichen Relationen ergeben sich aber ebenso leicht, wenn man sich die Vertauschungseigenschaften der Ladungskonjugationsmatrix mit den oben aufgeführten Gamma-Matrizen überlegt.

Das hermitesche Adjungieren der Gamma-Matrizen läßt sich mittels der

Matrix γ^0 bewerkstelligen in der Form:

$$\Gamma^\dagger = \begin{cases} +\gamma^0\Gamma\gamma^0 & \Gamma = 1, \gamma^\mu, \gamma^5\gamma^\mu \\ -\gamma^0\Gamma\gamma^0 & \Gamma = \gamma^5, [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \end{cases} \tag{D.7}$$

Auch die Hermitezitätseigenschaften der Gamma-Matrizen sind schnell ermittelt:

$$1^\dagger = 1, \tag{D.8}$$

$$\gamma_\mu^\dagger = \begin{cases} -\gamma_\mu & \mu = 1,2,3 \\ +\gamma_\mu & \mu = 0 \end{cases} \tag{D.9}$$

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5 \tag{D.10}$$

$$(\gamma_5\gamma_\mu)^\dagger = \begin{cases} +\gamma_5\gamma_\mu & \mu = 1,2,3 \\ -\gamma_5\gamma_\mu & \mu = 0 \end{cases} \tag{D.11}$$

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]^\dagger = \begin{cases} +[\gamma_\mu, \gamma_\nu] & \mu = 0, \nu \neq 0 \ \vee \ \nu = 0, \mu \neq 0 \\ -[\gamma_\mu, \gamma_\nu] & \mu \neq 0 \wedge \nu \neq 0 \end{cases} \tag{D.12}$$

Auf die gleiche Weise wie bei (D.1) folgt (D.7) aus den obigen Relationen.

Die beiden Gleichungen über die Transposition und die hermitesche Adjunktion kann man kombinieren, um das komplex Konjugierte der Gamma-Matrizen zu erhalten. (D.1) und (D.7) zusammen liefern dann

$$\Gamma^* = \begin{cases} +\gamma^0 C\Gamma C^{-1}\gamma^0 & \Gamma = 1, \gamma^5\gamma^\mu, [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\ -\gamma^0 C\Gamma C^{-1}\gamma^0 & \Gamma = \gamma^\mu, \gamma^5 \end{cases} \tag{D.13}$$

Anhang E

Matrix-Diagonalisierung

Die Diagonalisierung symmetrischer 2×2-Matrizen, die ja stets mittels einer durch

$$O = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{E.1}$$

parametrisierten orthogonalen Matrix möglich ist, ist ein häufiges Problem beim Finden der Masseneigenzustände. Sei die betreffende Matrix durch

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \tag{E.2}$$

bezeichnet, dann unterwerfe man diese der orthogonalen Transformation:

$$\begin{aligned} & OMO^T \\ &= \begin{pmatrix} A\cos^2\alpha + D\sin^2\alpha + B\sin(2\alpha) & -\frac{1}{2}\sin(2\alpha)(A-D) + B\cos(2\alpha) \\ -\frac{1}{2}\sin(2\alpha)(A-D) + B\cos(2\alpha) & A\sin^2\alpha + D\cos^2\alpha - B\sin(2\alpha) \end{pmatrix} \\ &\overset{!}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{E.3}$$

Das Verschwinden der Nebendiagonal-Elemente erfordert:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2B}{A-D}. \tag{E.4}$$

Die Eigenwerte ermittelt man aus der Säkulargleichung:

$$\lambda^2 - (A+D)\lambda + (AD - B^2) \overset{!}{=} 0 \qquad \Longrightarrow \tag{E.5}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}\left(A + D \pm \sqrt{(A-D)^2 + 4B^2}\right) \tag{E.6}$$

Betrachtet man die Differenz der Eigenwerte, dann sieht man, daß

$$\begin{aligned}\lambda_1 - \lambda_2 &= (A-D)\cos(2\alpha) + 2B\sin(2\alpha) = \cos(2\alpha)\left[(A-D) + 2B\tan(2\alpha)\right] \\ &= \cos(2\alpha)\left[(A-D) + (2B)^2/(A-D)\right] = \frac{\cos(2\alpha)}{(A-D)}\left[(A-D)^2 + 4B\right] \\ &= \frac{\cos(2\alpha)}{(A-D)} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \qquad \text{(E.7)}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\boxed{\cos(2\alpha) = \operatorname{sign}(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \frac{A-D}{|\lambda_1 - \lambda_2|}} \qquad \text{(E.8)}$$

Sofort folgt hieraus dann:

$$\boxed{\sin(2\alpha) = \operatorname{sign}(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \frac{2B}{|\lambda_1 - \lambda_2|}} \qquad \text{(E.9)}$$

Anhang F

Formeln aus der Allgemeinen Relativitätstheorie

Definition des affinen Zusammenhangs (Christoffel-Symbol):

$$\Gamma^\rho_{\mu\lambda} \equiv \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left(\partial_\mu g_{\lambda\alpha} + \partial_\lambda g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\lambda} \right) \tag{F.1}$$

Ableitung einer Determinante am Beispiel der Metrik:

$$-\partial_\mu g = \partial_\mu \det g_{\alpha\beta} = \partial_\mu \det e^{\ln g_{\alpha\beta}} = \partial_\mu e^{\mathrm{Tr}(\ln g_{\alpha\beta})} = -g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\alpha\beta}) g \tag{F.2}$$

Christoffel-Symbol mit kontrahierten Indizes:

$$\Gamma^\rho_{\mu\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left(\partial_\mu g_{\rho\alpha} + \partial_\rho g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\rho} \right) = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \partial_\mu g_{\rho\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \sqrt{g} = \partial_\mu \ln \sqrt{g} \tag{F.3}$$

Die letzten beiden Terme nach dem ersten Gleichheitszeichen heben sich weg.

Definition des Krümmungstensors:

$$R^\rho_{\mu\lambda\nu} \equiv \partial_\lambda \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \Gamma^\rho_{\sigma\nu} \tag{F.4}$$

Kontraktion der kovarianten Ableitung mit einem Vektor:

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\mu} V^\nu = \partial_\mu V^\mu + \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_\nu \sqrt{g}) V^\nu$$

$$\Longrightarrow \sqrt{g}\ \nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu \left(\sqrt{g}\ V^\mu \right) \tag{F.5}$$

F.1 Verhalten unter einer lokalen konformen Transformation (Weyl-Reskalierung)

Metrik, Definition der Wey-Transformation:

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g'_{\mu\nu}(x) \equiv e^{2\omega(x)} g_{\mu\nu}(x), \quad \Rightarrow g^{\mu\nu}(x) \longrightarrow g^{\mu\nu\,\prime}(x) \equiv e^{-2\omega(x)} g^{\mu\nu}(x) \tag{F.6}$$

Transformation des Zusammenhangs:

$$\Gamma^{\rho\ \prime}_{\mu\lambda} = \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} + \delta^{\rho}_{\ \lambda}\partial_\mu\omega + \delta^{\rho}_{\ \mu}\partial_\lambda\omega - g_{\mu\lambda}g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\omega \tag{F.7}$$

Transformation des Krümmungstensors:

$$R^{\rho\ \ \prime}_{\ \mu\lambda\nu} \equiv \partial_\lambda\Gamma^{\rho\ \prime}_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\rho\ \prime}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\sigma\ \prime}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho\ \prime}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma\ \prime}_{\mu\lambda}\Gamma^{\rho\ \prime}_{\sigma\nu} \tag{F.8}$$

$$\begin{aligned}
R^{\rho\ \ \prime}_{\ \mu\lambda\nu} = R^{\rho}_{\ \mu\lambda\nu} + \Big\{ & \delta^{\rho}_{\ \nu}\partial_\lambda\partial_\mu\omega + \underline{\delta^{\rho}_{\ \mu}\partial_\nu\partial_\lambda\omega} - \partial_\lambda\left(g_{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\omega\right) \\
& + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\left(\delta^{\rho}_{\ \lambda}\partial_\sigma\omega + \delta^{\rho}_{\ \sigma}\partial_\lambda\omega - g_{\sigma\lambda}g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\omega\right) \\
& + \left(\delta^{\sigma}_{\ \nu}\partial_\mu\omega + \delta^{\sigma}_{\ \mu}\partial_\nu\omega - g_{\mu\nu}g^{\sigma\alpha}\partial_\alpha\omega\right)\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} \\
& - \left(\delta^{\rho}_{\ \lambda}\partial_\sigma\omega + \delta^{\rho}_{\ \sigma}\partial_\lambda\omega - g_{\sigma\lambda}g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\omega\right)\left(\delta^{\sigma}_{\ \nu}\partial_\mu\omega + \delta^{\sigma}_{\ \mu}\partial_\nu\omega - g_{\mu\nu}g^{\sigma\alpha}\partial_\alpha\omega\right) \\
& - (\nu \leftrightarrow \lambda)\Big\}
\end{aligned} \tag{F.9}$$

Unterstrichene Terme fallen nach Abziehen der Terme mit den vertauschten Indizes weg.

$$\begin{aligned}
R^{\rho\ \ \prime}_{\ \mu\lambda\nu} = \ R^{\rho}_{\ \mu\lambda\nu} + \Big\{ & \delta^{\rho}_{\ \nu}\partial_\lambda\partial_\mu\omega - \partial_\lambda\left(g_{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\omega\right) \\
& + \delta^{\rho}_{\ \lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\sigma\omega + \underline{\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\partial_\lambda\omega} - g_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\omega \\
& + \underline{\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\partial_\mu\omega} + \underline{\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\partial_\nu\omega} - g_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda}g^{\sigma\alpha}\partial_\alpha\omega \\
& - \delta^{\rho}_{\ \nu}\partial_\mu\omega\partial_\lambda\omega - \underline{\delta^{\rho}_{\ \lambda}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega} + \underline{g_{\lambda\nu}g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\omega\partial_\mu\omega} \\
& - \underline{\delta^{\rho}_{\ \nu}\partial_\lambda\omega\partial_\mu\omega} - \underline{\delta^{\rho}_{\ \mu}\partial_\lambda\omega\partial_\nu\omega} + \underline{g_{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\partial_\lambda\omega\partial_\alpha\omega} \\
& + \delta^{\rho}_{\ \nu}g_{\mu\lambda}g^{\sigma\alpha}\partial_\sigma\omega\partial_\alpha\omega + \underline{g_{\mu\lambda}g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\omega\partial_\nu\omega} - g_{\mu\lambda}g^{\rho\alpha}\partial_\nu\omega\partial_\alpha\omega \\
& - (\lambda \leftrightarrow \nu)\Big\}
\end{aligned} \tag{F.10}$$

Um die Transformation des Ricci-Tensors zu erhalten, setze $\rho = \lambda$ und summiere darüber (wir lassen die Dimensionalität des Riemannschen Raumes offen als d):

$$R'_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + (2-d)\partial_\nu\partial_\mu\omega - \partial_\rho\left(g_{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\omega\right) + (d-2)\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\sigma\omega$$

$$+ g_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\omega - g_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho}g^{\sigma\alpha}\partial_\alpha\omega + g_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}g^{\sigma\alpha}\partial_\alpha\omega$$
$$+ (d-2)\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega + (2-d)g_{\mu\nu}g^{\sigma\alpha}\partial_\sigma\omega\partial_\alpha\omega \tag{F.11}$$

Da ω eine skalare Funktion ist, gilt $\partial_\mu\omega = \nabla_\mu\omega$. Weiter hat man:

$$\nabla_\nu\nabla_\mu\omega = \partial_\nu(\nabla_\mu\omega) - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}(\nabla_\rho\omega) = \partial_\nu\partial_\mu\omega - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\partial_\rho\omega \tag{F.12}$$

Der zweite Term in der Transformation des Ricci-Tensors (F.11) ergibt:

$$-g_{\mu\nu}\partial_\rho g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\omega - (\partial_\rho g_{\mu\nu})g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\omega - g_{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\partial_\rho\omega\partial_\alpha\omega \tag{F.13}$$

Wir nehmen hiervon den ersten Beitrag sowie mittleren Term in der zweiten Zeile von (F.11) und erhalten:

$$-g_{\mu\nu}\partial_\rho g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\omega - g_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho}g^{\sigma\alpha}\partial_\alpha\omega = -\underbrace{g_{\mu\nu}(\nabla_\rho g^{\rho\alpha})\partial_\alpha\omega}_{=0} + g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}\partial_\alpha\omega \tag{F.14}$$

Dies kann man mit dem dritten Term aus (F.13) zusammenfassen:

$$g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}\partial_\alpha\omega - g_{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\partial_\rho\omega\partial_\alpha\omega = -g_{\mu\nu}\nabla^2\omega \tag{F.15}$$

Mit den letzten beiden hergeleiteten Identitäten (F.12) und (F.15) formt man die Transformation des Ricci-Tensors um:

$$\begin{aligned} R'_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + (2-d)\nabla_\nu\nabla_\mu\omega - (\partial_\rho g_{\mu\nu})g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\omega - g_{\mu\nu}\nabla^2\omega \\ &\qquad + g_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}g^{\rho\alpha}\partial_\alpha\omega + g_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}g^{\sigma\alpha}\partial_\alpha\omega \\ &\qquad + (d-2)\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega + (2-d)g_{\mu\nu}g^{\sigma\alpha}\partial_\sigma\omega\partial_\alpha\omega \\ &= R_{\mu\nu} + (2-d)\nabla_\nu\nabla_\mu\omega - g_{\mu\nu}\nabla^2\omega \\ &\qquad + (d-2)\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega + (2-d)g_{\mu\nu}g^{\sigma\alpha}\partial_\sigma\omega\partial_\alpha\omega, \end{aligned} \tag{F.16}$$

da sich der zweite Term in der ersten Zeile und die zweite Zeile gegenseitig wegheben.

Kontraktion mit $g^{\mu\nu\,\prime} = e^{-2\omega}g^{\mu}\nu$ liefert die Weyl-Reskalierung des Krümmungsskalars:

$$\boxed{R' = e^{-2\omega}\left\{R + 2(1-d)\nabla^2\omega - (d-1)(d-2)g^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega\right\}} \tag{F.17}$$

Dies hat den für die Stringtheorie wichtigen Spezialfall in zwei Dimensionen, wo noch mit der Wurzel aus dem Betrag der Determinante der Metrik multipliziert wird, um den Faktor $e^{-2\omega}$ zu eliminieren:

$$\boxed{\sqrt{g'}R' = \sqrt{g}\left(R - 2\nabla^2\omega\right) \quad \text{für } d = 2.} \tag{F.18}$$

In vier Dimensionen kann man eine für die Supergravitation wichtige Formel herleiten (dort ist eigentlich $\sqrt{g}$ durch die Determinante aus der Tetrade e zu ersetzen):

$$\begin{aligned} e^{-2\omega}\sqrt{g'}R' &= \sqrt{g}\left(R - 6\nabla^2\omega - 6g^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega\right) \\ &= \sqrt{g}\left(R - 6g^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega\right) - 6\partial_\mu\left(\sqrt{g}\ \nabla^\mu\omega\right) \end{aligned} \tag{F.19}$$

Der letzte Term fällt unter einem Wirkungsintegral und unter geeigneten Randbedingungen weg, so daß man die effektive Ersetzung

$$\sqrt{g}R \to e^{-2\omega}\sqrt{g'}\left(R' + 6g^{\mu\nu}{}'\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega\right) \tag{F.20}$$

machen kann.

Literaturverzeichnis

[1] M. E. Peskin / D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison Wesley, 1995

[2] M. Veltman, *Diagrammatica*, Cambridge University Press, 1994

[3] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. 1* , Cambridge University Press,

[4] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. 2* , Cambridge University Press,

[5] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. 3: Supersymmetry* , Cambridge University Press, 2000

[6] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Perseus Books, 1999

[7] T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer Verlag, 1997

[8] J. Ellis, S. Rudaz, Phys. Lett. **128 B** (1983) 248.

[9] H.E. Haber, G.L. Kane, Phys. Rep. **117 2-4** (1985) 75-263

[10] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press, 1983

[11] P. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, World Scientific, Singapur, 1986

[12] J.F. Cornwell, *Group Theory in Physics, Vol. III: Supersymmetries and Infinite-Dimensional Algebras*, Academic Press

[13] F.A. Berends, W. Giele, Nucl. Phys. **B294** (1987) 700-732

[14] S. Dittmaier, hep-ph/9805445

[15] J. Reuter, *Helizitätsamplituden leichter Fermionen bei hohen Energien*, Diplomarbeit, TU Darmstadt, 1999

[16] L. Alvarez-Gaumé, M. Claudson, M.B. Wise, Nucl. Phys. **B207** (1982) 96-110

[17] H.E. Haber, *Higgs Bosons in the Minimal Supersymmetric Model: The Influence of Radiative Corrections* in: *Perspectives on Higgs Physics*, Hrsg. G.L. Kane, World Scientific, 1993

[18] L.E. Ibáñez, *Electroweak Breaking in Supersymmetric Models* in: *Perspectives on Higgs Physics*, Hrsg. G.L. Kane, World Scientific, 1993

[19] T. Ohl, *Die BRS-Invarianz in der kanonischen Quantisierung von Eichtheorien*, Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1987

[20] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. II: Klassische Feldtheorie*, Akademie Verlag, 1992

[21] A.M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, Harwood Academic Publ., 1987

[22] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory, Vol. I+II*, Cambridge University Press, 1987

[23] J. Polchinski, *String Theory, Vol. I+II*, Cambridge University Press, 1998

[24] I. Benn, R. Tucker, *An Introduction to Spinors and Geometry*, Adam Hilger, 1988

[25] L. Alvarez-Gaumé, J. Polchinski, M.B. Wise, Nucl. Phys. **B221** (1983) 495

[26] F.A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York, 1966

[27] H.E. Haber, Nucl.Phys.Proc.Suppl. **62 B** 1998, 469-484

[28] A. Denner, H. Eck, O. Hahn, J. Küblbeck, CERN-TH.6549/92

[29] J.F. Gunion, H.E. Haber, G. Kane, S. Dawson, *The Higgs Hunter's Guide*, Addison-Wesley, 1990, Anhang

[30] M. Kuroda, KEK CP-080

[31] O. Nachtmann, *Elementarteilchenphysik*, Vieweg 1986

[32] C. Itzykson, J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980

[33] R.P. Feynman, *Quantum Electrodynamics*, Benjamin Cummings, 1962

[34] T.D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Harwood Publ., 1981

[35] P.A.M. Dirac, *Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 1958

[36] I.J.R. Aitchison, A.J.G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics*, Adam Hilger, 1982

[37] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Addison-Wesley, 1990

[38] C. Quigg, *Gauge Theories of Strong, Weak and Electromagnetic Reactions*, Benjamin Cummings, 1983