Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Übungen zur Vorlesung

Quantenfeldtheorie

SS 07

Prof. Dr. J. Reuter, M.Sc. Felix Braam
(Hochhaus/803), 8047

Blatt 9

Präsenz-Aufgabe 8 Wirkungsquerschnitte und S-Matrixelemente

Ziel dieser Übung ist es, zu verstehen, wie man physikalische Observablen (i.d.F. den Wirkungsquerschnitt) eines Streuexperiments berechnet.
Dazu definieren wir zunächst den Wirkungsquerschnitt eines Streuexperiments, in dem zwei Teilchenbündel $\mathcal{A}\,,\mathcal{B}$ mit Querschnittsfläche A, Längen $l_\mathcal{A}\,,l_\mathcal{B}$ und Dicheten $\rho_\mathcal{A}$ und $\rho_\mathcal{B}$ mit einer Relativgeschwindigkeit v kollidieren. Man erwartet, dass sich die Zahl der Streureignisse proportional zu $A, l_\mathcal{A}, l_\mathcal{B}, \rho_\mathcal{A}, \rho_\mathcal{B}$ verhält. Der Wirkungsquerschnitt ist als die dazugehörige Proportionalitätskonstante definiert:

$$\sigma \equiv \frac{\#\text{Streuereignisse}}{A\, l_\mathcal{A}\, l_\mathcal{B}\, \rho_\mathcal{A}\, \rho_\mathcal{B}}.$$

a) Wie vereinfacht sich diese Formel unter der Annahme konstanter Teilchendichten $\rho_\mathcal{A}, \rho_\mathcal{B}$?

Neben der Information, wie hoch die Streurate (z.B. $ee \to ee, \mu\mu, ...$) ist, können auch die Impulse der Teilchen im Endzustand gemessen werden. Dies führt zum differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/(d^3p_1...d^3p_n)$, der den Wirkungsquerschnitt für eine Streuung in das Impulsraumvolumenelement $d^3p_1...d^3p_n$ des Endzustandes angibt. Dabei ist zu beachten, dass Viererimpulserhaltung gilt, d.h. es gibt nur $3n-4$ Impulsfreiheitsgrade im Endzustand.

Im folgenden betrachten wir nur $2 \to n$-Prozesse, d.h. unser Anfangszustand ist gegeben durch

$$|\phi_\mathcal{A}\phi_\mathcal{B}\rangle_{in} = \int \frac{d^3k_\mathcal{A}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_\mathcal{B}}{(2\pi)^3} \frac{\phi_\mathcal{A}(k_\mathcal{A})\phi_\mathcal{B}(k_\mathcal{B})e^{-i\mathbf{b}\mathbf{k}_\mathcal{B}}}{\sqrt{(2E_\mathcal{A})(2E_\mathcal{B})}} |k_\mathcal{A}k_\mathcal{B}\rangle. \qquad (1)$$

Hierbei wurde angenommen, dass die Wellenpakete $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ unhabhängig voneinander sind. $\phi_\mathcal{A}$ und $\phi_\mathcal{B}$ sind die Fouriertransformierten der Wellenfunktionen, aus denen die Information der relativen Position der Wellenpakete zueinander explizit in den Stoßparameter b herausgezogen wurde.
Strenggenommen müsste man den Endzustand genauso konstruieren, jedoch ist es einfacher diese als Zustände in der Übergangsamplitude mit scharfem Impuls anzunehmen.[1] Wir multiplizieren daher nur das Quadrat der Amplitude mit den entsprechenden Normierungsfaktoren

$$\left(\prod_f \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{\phi_f(\mathbf{p}_f)}{\sqrt{2E_f}}\right).$$

Die Streuwahrscheinlichkeitsamplitude ist proportional zur Projetion der Anfangs- auf die Endzusände. Man definiert die sogenannte S-Matrix als das Produkt der unitären Operatoren, die die reinen Anfangs- in die reinen Endzustände überführen:

$${}_{out}\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \ldots | \mathbf{k}_\mathcal{A}\mathbf{k}_\mathcal{B}\rangle_{in} = \lim_{T\to\infty} \langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \ldots | e^{iH(2T)} | \mathbf{k}_\mathcal{A}\mathbf{k}_\mathcal{B}\rangle \equiv \langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \ldots |S| \mathbf{k}_\mathcal{A}\mathbf{k}_\mathcal{B}\rangle.$$

---

[1] dieses Vorgehen ist gerechtfertigt, solange die Detektorauflösung oberhalb der de Broglie Wellenlänge der Teilchen liegt.

Die Streumatrix enthält bisher noch die Information über alle Prozesse, in denen es zu keiner Kollision kommt. Weiterhin ist klar, dass S wegen Viererimpulserhaltung einen Faktor $\delta^{(4)}(k_\mathcal{A}+k_\mathcal{B}-\sum p_f)$ enthalten muss. Daher definiert man:

$$S = 1 + iT$$
$$\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\ldots|iT|\mathbf{k}_\mathcal{A}\mathbf{k}_\mathcal{B}\rangle = (2\pi)^4\delta^{(4)}(k_\mathcal{A}+k_\mathcal{B}-\sum p_f)i\mathcal{M}(\mathcal{A}\mathcal{B}\to 1\,2\,...n).$$

Mit dem letzten Schritt haben wir die Amplitude in ein *invariantes Matrixelement*, das alle Informationen über die Wechselwirkung enthält und einen Teil der nur Kinematik beschreibt, zerlegt. Die Streuwahrscheinlichkeit, mit der gewählten Normierung ist

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}\to 1\,2\,...n) = \left(\prod_f \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_f}}\right)|\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\ldots|\phi_\mathcal{A}\phi_\mathcal{B}\rangle|^2.$$

Dieser Ausdruck enthält implizit noch die Abhängigkeit des Streuparameters aus (1). Für ein einzelnes Wellenpaket $\mathcal{A}$ und gemäss (1) verteilte Wellenpakete $\mathcal{B}$ ist die Zahl der Streuereignisse

$$N = \int d^2b\,\eta_\mathcal{B}\mathcal{P}(\mathbf{b}), \qquad \text{mit} \quad \eta_\mathcal{B} = \frac{N_\mathcal{B}}{A}.$$

Da wir $\eta_\mathcal{B}$ als konstant angenommen haben, ergibt sich für den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \frac{N}{\eta_\mathcal{B}N_\mathcal{A}} = \int d^2b\,\mathcal{P}(b)$$

Nun können alle Ausdrücke zusammengesetzt werden, um

$$d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_f}}\right)\int d^2b\left(\prod_{i=\mathcal{A},\mathcal{B}}\int\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{\phi_i(\mathbf{k_i})}{\sqrt{2E_i}}\int\frac{d^3k_i'}{(2\pi)^3}\frac{\phi_i'(\mathbf{k_i'})}{\sqrt{2E_i'}}\right)$$
$$\times e^{i\mathbf{b}(k_\mathcal{B}'-k_\mathcal{B})}({}_{out}\langle\{\mathbf{p}_f\}|\{\mathbf{k}_i\}\rangle_{in})({}_{out}\langle\{\mathbf{p}_f\}|\{\mathbf{k}_i'\}\rangle_{in})^*$$

zu erhalten.
Nach weiteren Umformungsschritten, die an anderer Stelle diskutiert werden , erhält man

$$d\sigma = \frac{1}{2E_\mathcal{A}2E_\mathcal{B}|v_\mathcal{A}-v_\mathcal{A}|}\left(\prod_f\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_f}}\right)$$
$$\times|\mathcal{M}(p_\mathcal{A},p_\mathcal{B}\to\{p_f\})|^2(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\mathcal{A}+p_\mathcal{B}-\sum p_f).$$

Das Integral über die Impulse des Endzustandes hat die Form

$$\int d\Pi_n = \left(\prod_f\int\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_f}}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(P-\sum p_f),$$

wobei P den Viererimpuls des Anfangszustandes darstellt. Dieses Integral ist Lorentz-invariant und wird als *n-Teilchen Phasenraum* der relativistischen Quantenmechanik bezeichnet.

Hausaufgabe 14 Zwei-Teilchen-Phasenraum

Der differentielle Streuquerschnitt für den Prozess $q_1q_2 \to p_1p_2$ ist gegeben durch

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(q_1q_2)^2 - q_1^2q_2^2}}(2\pi)^4\delta^4(q_1 + q_2 - p_1 - p_2)\widetilde{dp_1}\widetilde{dp_2}|\mathcal{M}|^2 \tag{2}$$

mit dem üblichen invarianten Integrationsmaß $\widetilde{dp} = d^3\vec{p}/((2\pi)^3 2p^0)|_{p^0=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}$ und dem invarianten S-Matrixelement $\mathcal{M}$.

a) Zeigen Sie, dass der Zweiteilchen-Phasenraum im Schwerpunktsystem gegeben ist durch

$$\int (2\pi)^4\delta^4(q_1 + q_2 - p_1 - p_2)\widetilde{dp_1}\widetilde{dp_2} = \int \frac{d\Omega_{\mathrm{CMS}}}{4\pi}\frac{1}{8\pi}\left(\frac{2|\vec{p}_{\mathrm{CMS}}|}{E_{\mathrm{CMS}}}\right). \tag{3}$$

[**7 Punkte**]

b) Leiten Sie damit dann die folgenden Identitäten her:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathrm{CMS}}} = \frac{|\vec{p}_{\mathrm{CMS}}|}{|\vec{q}_{\mathrm{CMS}}|}\frac{1}{64\pi^2 s}|\mathcal{M}|^2 \qquad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s\vec{q}^{\,2}_{\mathrm{CMS}}}|\mathcal{M}|^2 \tag{4}$$

mit $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - q_1)^2$.

[**7 Punkte**]

c) Wie vereinfachen sich diese Formeln für den Fall von vier identischen bzw. vier masselosen Teilchen?

[**4 Punkte**]