Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Übungen zur Vorlesung

Quantenfeldtheorie

SS 09

Prof. Dr. J. Reuter, M.Sc. Felix Braam
(Hochhaus/803), 8047

Blatt 8

Präsenz-Aufgabe 7 LSZ-Formel für Fermionen

Die LSZ Formel wird beschreibt, wie man Anfangs- und Endzusände fr̈ Beschleunigerexperimente konstruiert.
In der freien Dirac-Theorie, erzeugt man Einteilchenzustände mit Hilfe Zeitunabhängiger Erzeugungsoperatoren:

$$|p, s, +\rangle = b_s^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \tag{1}$$
$$|p, s, -\rangle = d_s^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle, \tag{2}$$

wobei $\pm$ zum Noether Strom gehörige Ladung Q bezeichnen soll. Die Zustände sind Lorenz-invariant normiert

$$\langle p, s, q|p', s', q'\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta_{ss'}\delta_{qq'}. \tag{3}$$

Nach Blatt 7 gilt folgende Beziehung für die Erzeuger und Vernichter:

$$b_k^s = \int d^3x\, \overline{u^s}(k)\, e^{ikx}\, \gamma^0\psi(x) \tag{4}$$
$$d_k^s = \int d^3x\, \overline{\psi}(x)\, e^{ikx}\, \gamma^0 v^s(k) \tag{5}$$
$$b_k^{s\,\dagger} = \int d^3x\, \overline{\psi}(x)\, e^{-ikx}\, \gamma^0 u^s(k) \tag{6}$$
$$d_k^{s\,\dagger} = \int d^3x\, \overline{v^s}(k)\, e^{-ikx}\, \gamma^0\psi(x). \tag{7}$$

Wir betrachten einen Operator der freien Theorie, der ein Teilchen mit fester Ladung und Spin, das im Impulsraum um $\mathbf{p}_1$ und im Ortsraum um den Ursprung lokalisiert ist:

$$b_1^\dagger := \int d^3p f_1(\mathbf{p}) b_{s_1}^\dagger(\mathbf{p})$$

mit

$$f_1(\mathbf{p}) \propto \exp[-(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)^2/4\sigma^2].$$

Betrachtet man die Zeitentwichlung dieses Zustandes, propagiert das das Wellenpaket und schmiert aus. Im Limes $t \to \pm\infty$ beschreibt dann ein Anfangszustand der Form $|i\rangle = b_1^\dagger b_2^\dagger|0\rangle$, mit $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2$, zwei weit entfernte Teilchen in der fernen Vergangenheit. Wir nehmen an, dass dies auch in der wechselwirkenden Theorie gültig ist, jedoch sind die Operatoren dann zeitabhängig. Um dem Rechnung zu tragen, verwenden wir folgenden Ansatz für Anfangs- und Endzustände:

$$|i\rangle = \lim_{t\to-\infty} b_1^\dagger(t) b_2^\dagger(t)|0\rangle, \qquad |f\rangle = \lim_{t\to+\infty} b_{1'}^\dagger(t) b_{2'}^\dagger(t)|0\rangle, \tag{8}$$

wobei durch passende Normierung der Wellenpakete $\langle i|i\rangle = \langle f|f\rangle = 1$ erreicht werden kann.

Mit den vorangegangenen Definitionen, ergibt sich die Streuamplitude zu $\langle f|i\rangle$. Ziel der heutigen Übung ist es, die Schritte zu einem praktischeren Ausdruck für $\langle f|i\rangle$ nachzuvollziehen (in Analogie zu der in der Vorlesung behandelten LSZ Formel für Bosonen).

a) Überlegen Sie zunächst, dass

$$b_1^\dagger(-\infty) - b_1^\dagger(+\infty) = i\int d^3p f_1(\mathbf{p}) \int d^4x \bar{\Psi}(x)(i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) u_{s_1}(\mathbf{p}) e^{ipx}. \tag{9}$$

Anleitung:

- Verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Intergralrechnung, um die Differenz in ein Integral umzuschreiben.
- Setzen Sie die gegebene Darstellung für $d_1^\dagger(t)$ ein.
- Werten Sie die Zeitableitung aus.
- Wenden Sie die Dirac-Gleichung für den Spinor $u_s(\mathbf{p})$ an.
- Nach partieller Integration wirken alle Ableitungen auf $\bar{\Psi}(x)$.

Analoge Rechnungen ergeben:

$$\begin{aligned}
b_1(-\infty) - b_1(+\infty) &= i\int d^3p\, f_1(\mathbf{p}) \int d^4x\, e^{-ipx} \bar{u}_{s_1}(\mathbf{p})(-i\not{\partial} + m)\Psi(x),\\
d_1^\dagger(-\infty) - d_1^\dagger(+\infty) &= -i\int d^3p\, f_1(\mathbf{p}) \int d^4x\, e^{ipx} \bar{v}_{s_1}(\mathbf{p})(-i\not{\partial} + m)\Psi(x),\\
d_1(-\infty) - d_1(+\infty) &= -i\int d^3p\, f_1(\mathbf{p}) \int d^4x\, \bar{\Psi}(x)(i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) v_{s_1}(\mathbf{p}) e^{-ipx}.
\end{aligned}$$

b) Nun kehren wir zur Streuamplitude zurück:

$$\langle f|i\rangle = \langle 0|b_{2'}(+\infty) b_{1'}(+\infty) b_1^\dagger(-\infty) b_2^\dagger(-\infty)|0\rangle.$$

Da obige Gleichung breits ein zeitgeordnetes Produkt darstellt, kann man, ohne etwas zu ändern ein Zeitordnungsoperator einfügen:

$$\langle f|i\rangle = \langle 0|\mathbf{T} b_{2'}(+\infty) b_{1'}(+\infty) b_1^\dagger(-\infty) b_2^\dagger(-\infty)|0\rangle. \tag{10}$$

Man beachte jedoch, dass eventuelle Vertauschungen durch die Zeitordnung Minuszeichen gemäßder Antivertauschungsregeln der fermionischen Erzeuger und Vernichter hervorrufen können. Ersetzen Sie die Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren in 10 durch die in a) gefundenen Ausdrücke und leiten Sie die

Lehmann-Symanzik-Zimmermann Formel für Spin 1/2 Teilchen ab:

$$
\begin{aligned}
\langle f|i\rangle = i^4 \int d^4x_1\, d^4x_2\, d^4x_{1'}\, d^4x_{2'} \\
&\times e^{-ip_{1'}x_{1'}}[\bar{u}_{s_{1'}}(\mathbf{p}_{1'})(-i\partial\!\!\!/_{1'} + m)]_{\alpha_{1'}} \\
&\times e^{-ip_{2'}x_{2'}}[\bar{u}_{s_{2'}}(\mathbf{p}_{2'})(-i\partial\!\!\!/_{2'} + m)]_{\alpha_{2'}} \\
&\times \langle 0|\mathbf{T}\Psi_{\alpha_{2'}}(x_{2'})\Psi_{\alpha_{1'}}(x_{1'})\bar{\Psi}_{\alpha_1}(x_1)\bar{\Psi}_{\alpha_2}(x_2)|0\rangle \\
&\times [(i \overleftarrow{\partial\!\!\!/}_1 + m u_{s_1}(\mathbf{p_1}))]_{\alpha_1} e^{ip_1x_1} \\
&\times [(i \overleftarrow{\partial\!\!\!/}_2 + m u_{s_2}(\mathbf{p_2}))]_{\alpha_2} e^{ip_2x_2}.
\end{aligned}
$$

c) Welche Rolle spielen die bei Vertauschung von Fermionoperatoren auftretenden Vorzeichen für physikalische Observablen