Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Übungen zur Vorlesung

Quantenfeldtheorie

SS 09

Prof. Dr. J. Reuter, M.Sc. Felix Braam
(Hochhaus/803), 8047

Blatt 6

Präsenz-Aufgabe 6 Diskrete Symmetrien der Dirac-Theorie I: Parität

Hier sollen diskrete Lorentz-Symmetrien diskutiert werden, die das Minkowski-Produkt $x_\mu x^\mu = (x^0)^2 - \vec{x}^2$ erhalten, aber nicht durch eine kontinuierliche Transformation aus der Identität hervorgehen.

(a) Eine davon ist die Paritätstransformation, $P : (x^0, \vec{x}) \to (x^0, -\vec{x})$, welche die Händigkeit des Raumes ändert, ohne Spins abzuändern (warum ändern sich Drehimpulse unter P nicht?). Die Implementierung auf dem Hilbert-Raum der Dirac-Quantenfeldtheorie erfordert daher einen unitären Operator, der die Erzeuger und Vernichter (bis auf eine Phase) in solche für negativen Impuls abändert:

$$P b^s_{\vec{p}} P = \eta_b b^s_{-\vec{p}} \qquad P d^s_{\vec{p}} P = \eta_d d^s_{-\vec{p}}$$

Die Notation ist hier so, dass der Dirac-Feldoperator die Form

$$\psi(x) = \int \widetilde{dp} \sum_{s=1}^{2} \left[b^s_{\vec{p}} u^s(p) e^{-ipx} + d^{s\,\dagger}_{\vec{p}} v^s(p) e^{+ipx} \right] \tag{1}$$

besitzt. Warum müssen Observablen unter zweimaliger Anwendung der Transformation ungeändert bleiben? Zeigen Sie, dass dies $P^\dagger = P$ impliziert, sowie für die Phasen $\eta_b^2 = \pm 1$, $\eta_d^2 = \pm 1$ (weshalb kann auch -1 auftreten?). Mittels der Notation $\tilde{x} = (x^0, -\vec{x})$ und $\tilde{p} = (p^0, -\vec{p})$ und der expliziten Gestalt der Spinoren in der chiralen Darstellung $u^s(p)$, $v^s(p)$, bestätigen Sie, dass $u^s(p) = \gamma^0 u^s(\tilde{p})$ und $v^s(p) = -\gamma^0 v^s(\tilde{p})$. Leiten Sie daraus eine Forderung an die Phasen ab, so dass der paritätstransformierte Feldoperator (mittels einer Substitution im Integral!) geschrieben werden kann als

$$P\psi(x)P \equiv P\psi(t,\vec{x})P = \eta_b \gamma^0 \psi(\tilde{x}) \equiv \eta_b \gamma^0 \psi(t, -\vec{x}). \tag{2}$$

(b) Wie lautet die Transformation für $\overline{\psi}(x)$?

(c) Bestimmen Sie das Transformationsverhalten für Skalar $\overline{\psi}(x)\psi(x) = \overline{\psi}\psi$, Vektor $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$, Tensor $i\overline{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi$, Pseudovektor $\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ und Pseudoskalar $\overline{\psi}\gamma^5\psi$. Welche Bedeutung bekommt nun die Vorsilbe Pseudo?

(d) Zeigen Sie mittels der Bedingung an die Phasen, dass ein Zustand aus einem Dirac-Teilchen und -Antiteilchen $(b^{s\,\dagger}_{\vec{p}} d^{s\,\dagger}_{\vec{p}}) |0\rangle$ negative intrinsische Parität besitzt. Sie können die Impulse hierfür ignorieren.

[2 Punkte]

bitte wenden

Hausaufgabe 12 Diskrete Symmetrien der Dirac-Theorie II: Ladungskonjugation

Diese Symmetrie (nicht Bestandteil der Lorentz-Gruppe) tauscht definitionsgemäß Teilchen und Antiteilchen gegeneinander aus:

$$C b^s_{\vec{p}} C = d^s_{\vec{p}} \qquad C d^s_{\vec{p}} C = b^s_{\vec{p}}$$

(a) Warum gilt wieder $C^\dagger = C$? Phasen dürfen hier ignoriert werden.

Benutzen Sie wieder die chirale Darstellung, um

$$u^s(p) = i\gamma^2 \left(v^s(p)\right)^* \qquad v^s(p) = i\gamma^2 \left(u^s(p)\right)^* \tag{3}$$

zu zeigen. (Benutzen Sie Hausaufgabe 8 sowie die Ergebnisse aus der Vorlesung für den Zusammenhang zwischen den Spinoren in u^s und v^s: $-i\sigma^2(\eta^s)^* = \xi^s$.)

Schreiben Sie dies dann als

$$u^s(p) = \mathcal{C}\, \overline{v^s}^T(p) \qquad v^s(p) = \mathcal{C}\, \overline{u^s}^T(p)$$

mit der Ladungskonjugationsmatrix $\mathcal{C} = i\gamma^2\gamma^0$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}^\dagger = -\mathcal{C}$.

Vorsicht Notationskonfusionsoption: C ist ein Operator auf dem Hilbertraum unserer Quanten(feld)theorie, $\mathcal{C}$ eine Matrix, die auf die Spinorindizes wirkt.

[**5 Punkte**]

(b) Damit zeigen Sie dann, dass

$$C\psi(x)C = \mathcal{C}\overline{\psi}^T(x).$$

[**3 Punkte**]

(c) Bestimmen Sie das Transformationsverhalten von $\overline{\psi}(x)$.

[**2 Punkte**]

(d) Zeigen Sie, dass C $\overline{\psi}\psi C = \overline{\psi}\psi$. Es hilft, Spinorindizes explizit auszuschreiben. Passen Sie mit dem Vertauschen von Fermionen auf!

[**3 Punkte**]

(e) Wie transformieren Vektor, Tensor, Pseudovektor und Pseudoskalar unter Ladungskonjugation?

[**4 Punkte**]