Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Übungen zur Vorlesung

Quantenfeldtheorie

SS 09

Prof. Dr. J. Reuter, M.Sc. Felix Braam
(Hochhaus/803), 8047

Blatt 10

Präsenz-Aufgabe 9 Yukawa-Theorie: Zerfall und Streuung (I)

Betrachten Sie die Yukawa-Theorie mit einem Dirac-Fermion und einem ungeladenen Skalar:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - g\phi(\overline{\psi}\psi)\ . \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die Zerfallsbreite für den Zerfall des Skalars in ein Fermion-Antifermion-Paar (Annahme $M > 2m$). Zeichnen Sie dazu das Feynman-Diagramm und schreiben den zugehörigen analytischen Ausdruck auf. Um das über die Spins der Fermionen summierte Betragsquadrat des Matrixelementes zu berechnen, zeigen Sie folgende Identität ($w \equiv u$ oder v):

$$\left(\overline{w^s}(q)\Gamma w^{s'}(q')\right)\left(\overline{w^s}(q)\Gamma w^{s'}(q')\right)^* = \mathrm{tr}\left[w^s(q)\overline{w^s}(q)\Gamma w^{s'}(q')\overline{w^{s'}}(q')(\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0)\right] \tag{2}$$

Benutzen Sie dimensionale Analyse, um die Struktur der Formel für die totale Breite abzuschätzen.

Verwenden Sie nun die Formel

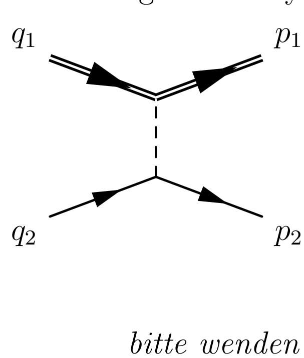
$$\Gamma = \int d\Gamma = \frac{1}{2M}\int (2\pi)^4\delta^4(q_1+q_2-p_1-p_2)\widetilde{dp_1}\widetilde{dp_2}|\mathcal{M}|^2 \quad , \tag{3}$$

um die Breite explizit auszurechnen und bestimmen Sie den Limes masseloser Fermionen im Endzustand.

(b) Betrachten Sie die Yukawa-Theorie mit zwei unterschiedlichen Fermionen, ψ_1 und ψ_2:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + \sum_{i=1}^{2}\overline{\psi_i}(i\partial\!\!\!/ - m_i)\psi_i - \sum_{i=1}^{2} g\phi(\overline{\psi_i}\psi_i)\ . \tag{4}$$

Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung der beiden Fermionen aneinander mit folgendem Feynman-Diagramm:



(5)

bitte wenden

Summieren Sie dazu über die Spins im Endzustand, und mitteln über den Anfangszustand. Ersetzen Sie die Impulse durch die Mandelstam-Variablen s, t, u.

Für den Fall, dass alle Teilchen masselos sind, berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt.

Hausaufgabe 15 Yukawa-Theorie: Streuung (II)

(a) Zeichnen Sie für die Streuung der jeweiligen Antifermionen der Teilchensorten 1 und 2 in der Theorie in Gleichung (4) das Feynmandiagramm und berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt. Benutzen Sie wieder s, t, u.

[**8 Punkte**]

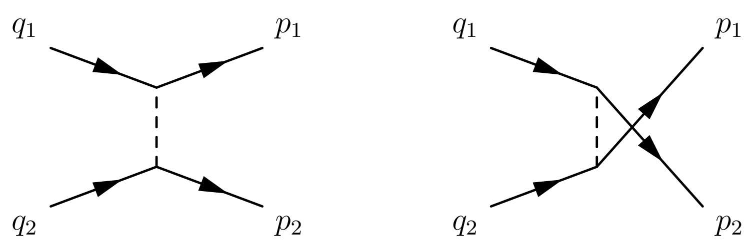
(b) Wie in a), nur für die Vernichtung eines Fermion-Antifermion-Paares der Sorte 1 in Sorte 2.

[**8 Punkte**]

(c) Verwenden Sie die in der Vorlesung hergeleiteten Crossing-Regeln, um die Ergebnisse von a) und b) aus dem Resultat der Präsenzaufgabe 5 zu erhalten.

[**8 Punkte**]

Betrachten Sie jetzt die Streuung von Fermion 1 an einem weiteren Fermion der Sorte 1:



(6)

Berechnen Sie für den masselosen Grenzfall differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitt. Was müssen Sie dabei beachten (Minuszeichen, Faktor 2)?

[**12 Punkte**]

Hausaufgabe 16 Polarisationsvektoren, Hamiltonian, Photonpropagator

Betrachten Sie die Polarisationsvektoren für transversale, longitudinale und skalare Polarisation der Photonen für allgemeine Zeitachse n^μ und Impulsrichtung k^μ, für welche gilt (off-shell $k^2 \neq 0$, on-shell $k^2 = 0$):

$$\epsilon^{(0)}_\mu(k) = n_\mu \qquad \epsilon^{(3)}_\mu(k) = \frac{k_\mu - (k\cdot n)n_\mu}{\sqrt{(k\cdot n)^2 - k^2}}$$

$$\epsilon^{(i)}(k)\cdot k = 0 \qquad \epsilon^{(i)}(k)\cdot\epsilon^{(j)}(k) = -\delta_{ij} \qquad i,j = 1,2$$

(a) Betrachten Sie ein Matrixelement mit einem äußeren Photon der Polarisation λ, $\mathcal{M}_\lambda(k) = \epsilon^\mu_{(\lambda)}(k)\mathcal{M}_\mu(k)$. Was folgt aus der Invarianz unter Eichtransformationen für $k^\mu\mathcal{M}_\mu(k)$? Benutzen Sie die allgemeinen Polarisationen oben, um zu zeigen, dass Sie stets, auch wenn nur physikalische (d.h. transversale) externe Photonen betrachtet werden, die Polarisationssumme im quadrierten spin-summierten Matrixelement durch den kovarianten Ausdruck $-g_{\mu\nu}$ ersetzen dürfen:

$$\sum_{\lambda=1}^{2}\epsilon^{(\lambda),\mu}(k)\epsilon^{(\lambda),\nu\,*}(k) \to -g^{\mu\nu} \tag{7}$$

Welche Bedingung spielt hier eine wesentliche Rolle?

(b) Zeigen Sie, dass der Hamiltonian mit den kanonisch konjugierten Impulsen $\pi^0 = -\partial_\mu A^\mu$ und $\pi^i = -\dot{A}^i - \partial_i A^0$ die Form

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x : \left(\sum_{i=1}^{3}\dot{A}_i^2 + (\vec{\nabla}A_i)^2\right) - \dot{A}_0^2 - (\vec{\nabla}A_0)^2 : \tag{8}$$

annimmt. Bestätigen Sie die Fourierentwicklung

$$H = \int \widetilde{dp}\,\omega_p\left(\sum_{i=1}^{3}a^\dagger_{(i),p}a_{(i),p} - a^\dagger_{(0),p}a_{(0),p}\right) . \tag{9}$$