Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Übungen zur Vorlesung

Theoretische Teilchenphysik

SS 08

Prof. Dr. J. Reuter
(Hochhaus/803), 8407

Blatt 1
23.04.08

Präsenz-Aufgabe 1 $2 \to 2$**– Prozesse, Mandelstam-Variablen**

Für Elementarteilchen-Reaktionen mit je zwei Teilchen im Anfangs- und im Endzustand (sogenannte $2 \to 2$–Prozesse) mit

$$p_1 + p_2 \to q_1 + q_2, \quad p_1^2 = m_1^2,\ p_2^2 = m_2^2,\ q_1^2 = m_3^2,\ q_2^2 = m_4^2 \tag{1}$$

ist die Einführung der relativistisch invarianten Mandelstam-Variablen nützlich:

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (q_1 + q_2)^2 \tag{2a}$$
$$t \equiv (q_1 - p_1)^2 = (p_2 - q_2)^2 \tag{2b}$$
$$u \equiv (q_1 - p_2)^2 = (p_1 - q_2)^2 \tag{2c}$$

a) Zeigen Sie, daß gilt:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \tag{3}$$

b) Es sei $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$. Weisen Sie nach, daß der Impuls im Schwerpunktsystem geschrieben werden kann als

$$\vec{p}^{\,2}_{\text{CMS}} = \frac{1}{4s}\lambda(s, m_1^2, m_2^2). \tag{4}$$

Präsenz-Aufgabe 2 Zwei-Teilchen-Phasenraum

Betrachten Sie einen beliebigen $2 \to 2$–Prozeß mit der üblichen Kinematik: $p_1 + p_2 \to q_1 + q_2$, dem differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2}}(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)\widetilde{dq_1}\widetilde{dq_2}\,|\mathcal{M}|^2 \tag{5}$$

und dem invarianten Integrationsmaß

$$\widetilde{dk} \equiv \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Theta(k_0)(2\pi)\delta(k^2 - m^2) = \left.\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0}\right|_{k_0=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}}. \tag{6}$$

a) Zeigen Sie, daß aus Gl.(5) im Schwerpunktsystem

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{CMS}}} = \frac{|\vec{q}_{\text{CMS}}|}{|\vec{p}_{\text{CMS}}|}\frac{1}{64\pi^2 s}\,|\mathcal{M}|^2 \tag{7a}$$
$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s \vec{p}^{\,2}_{\text{CMS}}}\,|\mathcal{M}|^2 \tag{7b}$$

folgt. Hierbei ist $t \equiv (p_1 - q_1)^2 = (p_2 - q_2)^2$ eine der oben definierten Mandelstam-Variablen.

b) Wie vereinfachen sich die Formeln (3) im Fall von vier masselosen Reaktionspartnern?

c) Welche Komplikationen ergeben sich, wenn zwei identische Teilchen im Endzustand vorliegen?

Hausaufgabe 1 Flugzeit-Spektrometer

Teilchen mit gleichem Impuls, aber verschiedenen Massen lassen sich dadurch trennen, dass man die Zeit misst, die die Teilchen für eine bestimmte Wegstrecke brauchen. Wie groß muss die Wegstrecke sein, damit sich bei einem Impuls von 1.5 GeV ein K-Meson und ein π-Meson in der Flugzeit um 10^{-9} s unterscheiden?
$(m_\pi = 134.97\,\text{MeV},\ m_K = 497.67\,\text{MeV},\ c \equiv 1)$

Hausaufgabe 2 Labor- vs. Schwerpunktssystem am Beispiel HERA

Im Speicherring HERA wurden Elektronen von 30 GeV und Protonen von 820 GeV zur Kollision gebracht.

a) Welches ist die größte Masse M_X, die bei der Reaktion $e\ +\ p\ \rightarrow\ e\ +\ X$ erzeugt werden kann?

b) Welche Elektronenenergie wäre nötig, um ein System gleicher Masse M_X durch Streuung an einem ruhenden Proton zu erzeugen?

c) Aus der Messung des gestreuten Elektrons (p'_e) kann die dimensionslose Größe

$$x = -\frac{(p_e - p'_e)^2}{2p_p\,(p_e - p'_e)} \tag{8}$$

bestimmt werden. Man zeige, dass für gegebenes x die Quadrate der hadronischen Masse M_X^2 und des Vierer–Impulsübertrags $(Q^2 = -t = (p_e - p'_e)^2)$ folgender linearer Beziehung genügen:

$$M_X^2 = M_p^2 + \frac{1-x}{x}Q^2 \quad (M_p = \text{Protonenmasse}). \tag{9}$$

Hausaufgabe 3 Kosmische Protonen

Protonen der kosmischen Strahlung können an der kosmischen Hintergrundstrahlung (Temperatur 2.7 K, entsprechend einer Energie von etwa 3×10^{-4} eV) streuen. Welche Energie muss ein Proton haben, damit die Reaktion

$$p\ +\ \gamma\ \rightarrow\ p\ +\ \pi^0$$

kinematisch möglich ist?