Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Übungen zur Vorlesung

Quantenfeldtheorie

SS 07

Prof. Dr. J. Reuter
(Westbau/02.007), 8047

Blatt 9

Präsenz-Aufgabe 6 Polarisationsvektoren, Hamiltonian, Photonpropagator

Betrachten Sie die Polarisationsvektoren für transversale, longitudinale und skalare Polarisation der Photonen für allgemeine Zeitachse n^μ und Impulsrichtung k^μ, für welche gilt (off-shell $k^2 \neq 0$, on-shell $k^2 = 0$):

$$\epsilon^{(0)}_\mu(k) = n_\mu \qquad \epsilon^{(3)}_\mu(k) = \frac{k_\mu - (k\cdot n)n_\mu}{\sqrt{(k\cdot n)^2 - k^2}}$$

$$\epsilon^{(i)}(k)\cdot k = 0 \qquad \epsilon^{(i)}(k)\cdot\epsilon^{(j)}(k) = -\delta_{ij} \qquad i,j = 1,2$$

(a) Betrachten Sie ein Matrixelement mit einem äußeren Photon der Polarisation λ, $\mathcal{M}_\lambda(k) = \epsilon^\mu_{(\lambda)}(k)\mathcal{M}_\mu(k)$. Was folgt aus der Invarianz unter Eichtransformationen für $k^\mu\mathcal{M}_\mu(k)$? Benutzen Sie die allgemeinen Polarisationen oben, um zu zeigen, dass Sie stets, auch wenn nur physikalische (d.h. transversale) externe Photonen betrachtet werden, die Polarisationssumme im quadrierten spin-summierten Matrixelement durch den kovarianten Ausdruck $-g_{\mu\nu}$ ersetzen dürfen:

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon^{(\lambda),\mu}(k)\epsilon^{(\lambda),\nu\,*}(k) \to -g^{\mu\nu} \tag{1}$$

Welche Bedingung spielt hier eine wesentliche Rolle?

(b) Zeigen Sie, dass der Hamiltonian mit den kanonisch konjugierten Impulsen $\pi^0 = -\partial_\mu A^\mu$ und $\pi^i = -\dot{A}^i - \partial_i A^0$ die Form

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x : \left(\sum_{i=1}^{3} \dot{A}_i^2 + (\vec{\nabla}A_i)^2\right) - \dot{A}_0^2 - (\vec{\nabla}A_0)^2 : \tag{2}$$

annimmt. Bestätigen Sie die Fourierentwicklung

$$H = \int \widetilde{dp}\,\omega_p \left(\sum_{i=1}^{3} a^\dagger_{(i),p}a_{(i),p} - a^\dagger_{(0),p}a_{(0),p}\right) . \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie, dass sich der Feynman-Propagator schreiben lässt als

$$D_F^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{D}_F^{\mu\nu}e^{-ik(x-y)} \qquad \tilde{D}_F^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=0}^{3}\frac{\epsilon^{(\lambda),\mu}(k)\epsilon^{(\lambda),\nu\,*}(k)}{\epsilon^{(\lambda)}(k)\cdot\epsilon^{(\lambda)\,*}(k)}\frac{i}{k^2+i\epsilon} \tag{4}$$

(d) Schreiben Sie den Feynman-Propagator um in die drei Teile

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu} = \tilde{D}_F^{T,\mu\nu} + \tilde{D}_F^{C,\mu\nu} + \tilde{D}_F^{V,\mu\nu}, \tag{5}$$

wobei $\tilde{D}_F^{T,\mu\nu}$ aus der Summe der beiden transversalen Polarisationen stammt, und $\tilde{D}_F^{C,\mu\nu} = n^\mu n^\nu / \left[(k\cdot n)^2 - k^2\right]$ sei.

bitte wenden

Bestimmen Sie $\tilde{D}_F^{V,\mu\nu}$ und zeigen Sie mittels der Tatsache, dass das elektromagnetische Feld an erhaltene Ströme koppelt, dass dieser Term nicht beiträgt.

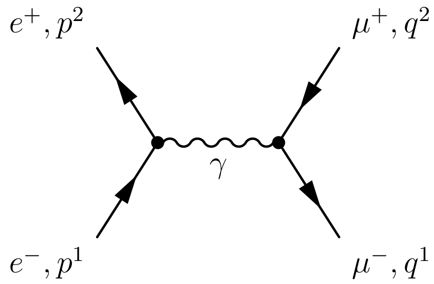
Benutzen Sie nun die explizite Basis für die Zeitachse, $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$, um zu zeigen, dass der Austausch skalarer Photonen ein instantanes Coulomb-Potential erzeugt. Zur Berechnung betrachten Sie am besten das Integral

$$I(\alpha) = \int_0^\infty dk\, e^{-\alpha k} \frac{\sin k}{k}, \tag{6}$$

und den anschließenden Limes $\alpha \to 0$.

Hausaufgabe 17 $\quad e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ in QED

Betrachten Sie die Produktion von $\mu^+\mu^-$-Paaren in der e^+e^--Vernichtung bei Energien des früheren Colliders PETRA (23.4 GeV). Hier dominiert der Photonaustausch und der Austausch des schwachen Eichbosons Z^0 ($M_Z = 91.18$ GeV) kann vernachlässigt werden:



(a) Schreiben Sie die Streuamplitude aufgrund der Regeln der Quantenelektrodynamik, sodann das spin-gemittelte Quadrat des Matrixelements mit Hilfe der Spinsummen als Spur über Dirac-Matrizen. Berechnen Sie diese Spur nach den auf Blatt 5 hergeleiteten Regeln.

[**8 Punkte**]

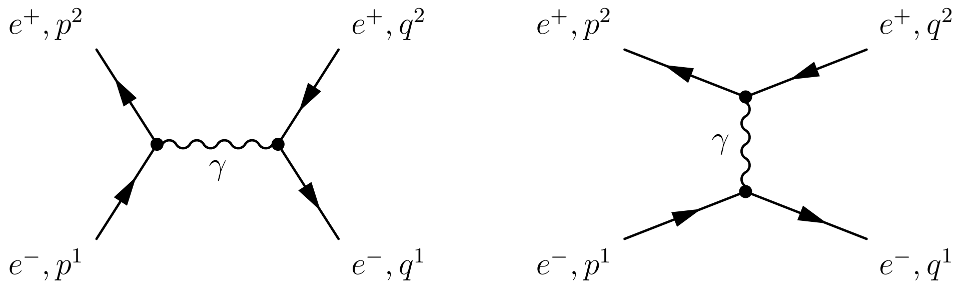
(b) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ und $d\sigma/dt$ im Grenzfall hoher Energien: $E \gg m_\mu \gg m_e$. Ersetzen Sie die Elektronenladung durch die Feinstrukturkonstante, $\alpha = e^2/(4\pi)$. Bestimmen Sie aus $d\sigma/dt$ den totalen Wirkungsquerschnitt (was sind die Integrationsgrenzen von t?).

[**4 Punkte**]

bitte wenden

(Freiwillige) Zusatz-Aufgabe 18 Bhabha-Streuung

Betrachten Sie die Bhabha-Streuung, die Streuung eines Elektrons an einem Positron, $e^+e^- \to e^+e^-$. Hier gibt es zwei Feynman-Diagramme:



(a) Bestimmen Sie die Amplitude nach den Feynman-Regeln der QED. Berechnen Sie dann das quadrierte spin-gemittelte Matrixelement. Verwenden Sie die Näherung $\sqrt{s} \gg m_e$.

[8 Punkte]

(b) Setzen Sie Mandelstam-Variablen ein, um zu zeigen, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt geschrieben werden kann als

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{s}\left[u^2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{t}{s}\right)^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2\right] \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass die quadrierte Amplitude symmetrisch ist unter dem Austausch $s \leftrightarrow t$. Weshalb?

[6 Punkte]

(c) Drücken Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt durch $\cos\theta$ aus und plotten Sie diesen als Funktion von $\cos\theta$. Welche Eigenschaft der Diagramme verursacht die Divergenz des Wirkungsquerschnitts für $\cos\theta \to 0$?

[4 Punkte]