Übungen zur Vorlesung

Quantenfeldtheorie

SS 07

Prof. Dr. J. Reuter
(Westbau/02.007), 8047

Blatt 8

Präsenz-Aufgabe 4 Zwei-Teilchen-Phasenraum

Der differentielle Streuquerschnitt für den Prozess $q_1 q_2 \to p_1 p_2$ ist gegeben durch

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(q_1 q_2)^2 - q_1^2 q_2^2}} (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_1 - p_2) \widetilde{dp_1} \widetilde{dp_2} |\mathcal{M}|^2 \qquad (1)$$

mit dem üblichen invarianten Integrationsmaß $\widetilde{dp} = d^3\vec{p}/((2\pi)^3 2p^0)\big|_{p^0=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}$ und dem invarianten S-Matrixelement $\mathcal{M}$.

Zeigen Sie, dass der Zweiteilchen-Phasenraum im Schwerpunktsystem gegeben ist durch

$$\int (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_1 - p_2) \widetilde{dp_1} \widetilde{dp_2} = \int \frac{d\Omega_{\text{CMS}}}{4\pi} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{2|\vec{p}_{\text{CMS}}|}{E_{\text{CMS}}} \right) . \qquad (2)$$

Leiten Sie damit dann die folgenden Identitäten her:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{CMS}}} = \frac{|\vec{p}_{\text{CMS}}|}{|\vec{q}_{\text{CMS}}|} \frac{1}{64\pi^2 s} |\mathcal{M}|^2 \qquad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s \vec{q}^{\,2}_{\text{CMS}}} |\mathcal{M}|^2 \qquad (3)$$

mit $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - q_1)^2$. Wie vereinfachen sich diese Formeln für den Fall von vier identischen bzw. vier masselosen Teilchen?

Präsenz-Aufgabe 5 Yukawa-Theorie: Zerfall und Streuung (I)

Betrachten Sie die Yukawa-Theorie mit einem Dirac-Fermion und einem ungeladenen Skalar:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - g\phi(\overline{\psi}\psi) . \qquad (4)$$

(a) Bestimmen Sie die Zerfallsbreite für den Zerfall des Skalars in ein Fermion-Antifermion-Paar (Annahme $M > 2m$). Zeichnen Sie dazu das Feynman-Diagramm und schreiben den zugehörigen analytischen Ausdruck auf. Um das über die Spins der Fermionen summierte Betragsquadrat des Matrixelementes zu berechnen, zeigen Sie folgende Identität ($w \equiv u$ oder v):

$$\left(\overline{w^s}(q)\Gamma w^{s'}(q')\right) \left(\overline{w^s}(q)\Gamma w^{s'}(q')\right)^* = \text{tr}\left[w^s(q)\overline{w^s}(q)\Gamma w^{s'}(q')\overline{w^{s'}}(q')(\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0)\right] \qquad (5)$$

Benutzen Sie dimensionale Analyse, um die Struktur der Formel für die totale Breite abzuschätzen.

Verwenden Sie nun die Formel

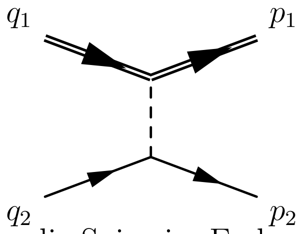
$$\Gamma = \int d\Gamma = \frac{1}{2M} \int (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_1 - p_2) \widetilde{dp_1} \widetilde{dp_2} |\mathcal{M}|^2 \quad , \qquad (6)$$

um die Breite explizit auszurechnen und bestimmen Sie den Limes masseloser Fermionen im Endzustand.

(b) Betrachten Sie die Yukawa-Theorie mit zwei unterschiedlichen Fermionen, ψ_1 und ψ_2:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + \sum_{i=1}^{2}\overline{\psi_i}(i\partial\!\!\!/ - m_i)\psi_i - \sum_{i=1}^{2} g\phi(\overline{\psi_i}\psi_i)\ . \tag{7}$$

Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung der beiden Fermionen aneinander mit folgendem Feynman-Diagramm:



(8)

Summieren Sie dazu über die Spins im Endzustand, und mitteln über den Anfangszustand. Ersetzen Sie die Impulse durch die Mandelstam-Variablen s, t, u.

Für den Fall, dass alle Teilchen masselos sind, berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt.

Hausaufgabe 16 Yukawa-Theorie: Streuung (II)

(a) Zeichnen Sie für die Streuung der jeweiligen Antifermionen der Teilchensorten 1 und 2 in der Theorie in Gleichung (7) das Feynmandiagramm und berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt. Benutzen Sie wieder s, t, u.

[**8 Punkte**]

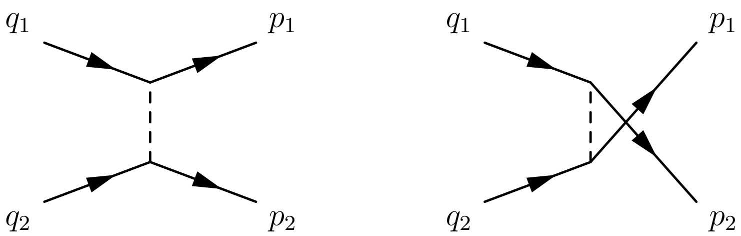
(b) Wie in a), nur für die Vernichtung eines Fermion-Antifermion-Paares der Sorte 1 in Sorte 2.

[**8 Punkte**]

(c) Verwenden Sie die in der Vorlesung hergeleiteten Crossing-Regeln, um die Ergebnisse von a) und b) aus dem Resultat der Präsenzaufgabe 5 zu erhalten.

[**8 Punkte**]

Betrachten Sie jetzt die Streuung von Fermion 1 an einem weiteren Fermion der Sorte 1:



(9)

Berechnen Sie für den masselosen Grenzfall differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitt. Was müssen Sie dabei beachten (Minuszeichen, Faktor 2)?

[**12 Punkte**]