Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Übungen zur Vorlesung

# Quantenfeldtheorie

SS 07

Prof. Dr. J. Reuter
(Westbau/02.007), 8047

Blatt 7

---

**Präsenz-Aufgabe 3 Zeitentwicklung im Wechselwirkungsbild**

Philosophie der Störungstheorie ist die Existenz eines kleinen Parameters $\lambda$, nach dem entwickelt werden kann. Der Hamiltonian sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}_{int}$, wobei $H_0$ der Hamiltonian der freien Theorie ist und $\mathcal{H}_{int}$ die Wechselwirkungsterme enthält.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}$, wobei die entsprechende Lagrangefunktion (bzw. -dichte) eine zu $\mathcal{H}$ analoge Zerlegung in $\mathcal{L}_0$ und $\mathcal{L}_{int}$ besitzen möge, für den Fall, dass es in $\mathcal{L}_{int}$ keinerlei Terme mit Ableitungen der Felder gibt. Weshalb zerstören Ableitungen den einfachen Zusammenhang oben? (In der Tat kann man zeigen, dass dieser Zusammenhang auch für Ableitungskopplungen besteht, wobei die Komplikationen durch die Zeitableitungen durch eine Umdefinition des zeitgeordneten Produktes aufgefangen werden können, s.z.B. Itzykson/Zuber, S. 282-285).

(b) Für die Lagrangedichte eines massiven reellen skalaren Feldes und eines Dirac-Feldes,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \overline{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - g\overline{\psi}\psi\phi \tag{1}$$

leiten Sie $\mathcal{L}_{int}$ und $\mathcal{H}_{int}$ ab, und identifizieren Sie Parameter, die klein sein müssen, um einen störungstheoretischen Zugang zu erlauben.

Annahme des WW-Bildes ist, dass zu einem Zeitpunkt $t_0$ eine Störung adiabatisch eingeschaltet wird, d.h. $\mathcal{H}(\pi, \phi, t) = \mathcal{H}_0(\pi_{in}, \phi_{in}, t)$ für alle $t \leq t_0$ und vor $t_0$ sind alle Observablen Funktionen der freien Felder $\mathcal{O}(\pi_{in}, \phi_{in})$ im Heisenberg-Bild bzgl. $\mathcal{H}_0$, nach $t_0$ Funktionen der wechselwirkenden Felder $\mathcal{O}(\pi, \phi)$ im Heisenberg-Bild bzgl. $\mathcal{H}$. Für alle Observablen gilt dann $\mathcal{O}(\pi, \phi) = \mathcal{O}(\pi_{in}, \phi_{in})$ für alle $t \leq t_0$.

(c) Stellen Sie die Schrödingergleichung für die beiden Zeitentwickler $U_{\mathcal{H}}(t, t_0)$ und $U_{\mathcal{H}_0}(t, t_0)$ auf. Betrachten Sie den sogenannten Zeitentwickler im Wechselwirkungsbild $U(t) := \left(U_{\mathcal{H}_0}(t, t_0)\right)^{-1} U_{\mathcal{H}}(t, t_0)$. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen Observablen als Funktionen der *in*- und der wechselwirkenden Felder. Welche Randbedingung bei $t_0$ besitzt $U(t)$?

(d) Zeigen Sie, dass sich die Schrödingergleichung für $U(t)$ in der Form

$$i\frac{d}{dt}U(t) = H_I(t)U(t) \tag{2}$$

schreiben läßt. Bestimmen und interpretieren Sie $H_I(t)$.

(e) Integrieren Sie die Schrödingergleichung für $U(t)$. Weshalb dürfen Sie im verbleibenden Integral die untere Integrationsgrenze auf $-\infty$ setzen?

(f) Lösen Sie diese Integralgleichung formal durch Iteration. Wie können Sie alle Integrale auf denselben Integrationsbereich umschreiben?

(g) Zum Schluss: Wie können Sie nun den $S$-Operator formal schreiben?

**Hausaufgabe 14 Erzeuger und Vernichter des Dirac-Feldes**

Benutzen Sie die Fourier-Zerlegung des Dirac-Feldoperators

$$\psi(x) = \int \widetilde{dp} \sum_{s=1}^{2} \left( b_p^s u^s(p) e^{-ipx} + d_p^{s\dagger} v^s(p) e^{+ipx} \right)$$

sowie des adjungierten Feldoperators $\overline{\psi}(x)$, um folgende Formeln für das Herausprojizieren der Erzeuger und Vernichter für Dirac-Teilchen und -Antiteilchen zu beweisen:

$$b_k^s = \int d^3x \, \overline{u^s}(k) \, e^{ikx} \, \gamma^0 \psi(x) \tag{3a}$$

$$d_k^s = \int d^3x \, \overline{\psi}(x) \, e^{ikx} \, \gamma^0 v^s(k) \tag{3b}$$

$$b_k^{s\dagger} = \int d^3x \, \overline{\psi}(x) \, e^{-ikx} \, \gamma^0 u^s(k) \tag{3c}$$

$$d_k^{s\dagger} = \int d^3x \, \overline{v^s}(k) \, e^{-ikx} \, \gamma^0 \psi(x) \tag{3d}$$

[**8 Punkte**]

**Hausaufgabe 15 Kinematik: Mandelstam-Variablen**

Für Elementarteilchen-Reaktionen mit je zwei Teilchen im Anfangs- und im Endzustand (sogenannte $2 \to 2$–Prozesse) mit der Prozesskinematik

$$p_1 + p_2 \to q_1 + q_2, \quad p_1^2 = m_1^2, p_2^2 = m_2^2, q_1^2 = m_3^2, q_2^2 = m_4^2 \tag{4}$$

ist die Einführung der relativistisch invarianten Mandelstam-Variablen nützlich:

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (q_1 + q_2)^2 \tag{5a}$$

$$t \equiv (q_1 - p_1)^2 = (p_2 - q_2)^2 \tag{5b}$$

$$u \equiv (q_1 - p_2)^2 = (p_1 - q_2)^2 \tag{5c}$$

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \tag{6}$$

(b) Es sei

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca. \tag{7}$$

Weisen Sie nach, dass der Impuls im Schwerpunktsystem geschrieben werden kann als

$$\vec{p}_{\mathrm{CMS}}^{\,2} = \frac{1}{4s} \lambda(s, m_1^2, m_2^2). \tag{8}$$

[**8 Punkte**]