

Hausaufgabe 12 Diskrete Symmetrien der Dirac-Theorie I: Parität

Hier sollen diskrete Lorentz-Symmetrien diskutiert werden, die das Minkowski-Produkt $x_\mu x^\mu = (x^0)^2 - \vec{x}^2$ erhalten, aber nicht durch eine kontinuierliche Transformation aus der Identität hervorgehen.

- (a) Eine davon ist die Paritätstransformation, $P : (x^0, \vec{x}) \rightarrow (x^0, -\vec{x})$, welche die Händigkeit des Raumes ändert, ohne Spins abzuändern (warum ändern sich Drehimpulse unter P nicht?). Die Implementierung auf dem Hilbert-Raum der Dirac-Quantenfeldtheorie erfordert daher einen unitären Operator, der die Erzeuger und Vernichter (bis auf eine Phase) in solche für negativen Impuls abändert:

$$P b_{\vec{p}}^s P = \eta_b b_{-\vec{p}}^s \quad P d_{\vec{p}}^s P = \eta_d d_{-\vec{p}}^s$$

Die Notation ist hier so, dass der Dirac-Feldoperator die Form

$$\psi(x) = \int \widetilde{d}p \sum_{s=1}^2 \left[b_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ipx} + d_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{+ipx} \right] \quad (1)$$

besitzt. Warum müssen Observablen unter zweimaliger Anwendung der Transformation ungeändert bleiben? Zeigen Sie, dass dies $P^\dagger = P$ impliziert, sowie für die Phasen $\eta_b^2 = \pm 1$, $\eta_d^2 = \pm 1$ (weshalb kann auch -1 auftreten?). Mittels der Notation $\tilde{x} = (x^0, -\vec{x})$ und $\tilde{p} = (p^0, -\vec{p})$ und der expliziten Gestalt der Spinoren in der chiralen Darstellung $u^s(p)$, $v^s(p)$, bestätigen Sie, dass $u^s(p) = \gamma^0 u^s(\tilde{p})$ und $v^s(p) = -\gamma^0 v^s(\tilde{p})$. Leiten Sie daraus eine Forderung an die Phasen ab, so dass der paritätstransformierte Feldoperator (mittels einer Substitution im Integral!) geschrieben werden kann als

$$P\psi(x)P \equiv P\psi(t, \vec{x})P = \eta_b \gamma^0 \psi(\tilde{x}) \equiv \eta_b \gamma^0 \psi(t, -\vec{x}). \quad (2)$$

[5 Punkte]

- (b) Wie lautet die Transformation für $\bar{\psi}(x)$?

[2 Punkte]

- (c) Bestimmen Sie das Transformationsverhalten für Skalar $\bar{\psi}(x)\psi(x) = \bar{\psi}\psi$, Vektor $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, Tensor $i\bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi$, Pseudovektor $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ und Pseudoskalar $\bar{\psi}\gamma^5\psi$. Welche Bedeutung bekommt nun die Vorsilbe Pseudo?

[5 Punkte]

- (d) Zeigen Sie mittels der Bedingung an die Phasen, dass ein Zustand aus einem Dirac-Teilchen und -Antiteilchen $(b_{\vec{p}}^{s\dagger} d_{\vec{p}}^{s\dagger}) |0\rangle$ negative intrinsische Parität besitzt. Sie können die Impulse hierfür ignorieren.

[2 Punkte]

Hausaufgabe 13 Diskrete Symmetrien der Dirac-Theorie II: Ladungskonjugation

Diese Symmetrie (nicht Bestandteil der Lorentz-Gruppe) tauscht definitionsgemäß Teilchen und Antiteilchen gegeneinander aus:

$$Cb_{\vec{p}}^s C = d_{\vec{p}}^s \quad Cd_{\vec{p}}^s C = b_{\vec{p}}^s$$

- (a) Warum gilt wieder $C^\dagger = C$? Phasen dürfen hier ignoriert werden.

Benutzen Sie wieder die chirale Darstellung, um

$$u^s(p) = i\gamma^2 (v^s(p))^* \quad v^s(p) = i\gamma^2 (u^s(p))^* \quad (3)$$

zu zeigen. (Benutzen Sie Hausaufgabe 8 sowie die Ergebnisse aus der Vorlesung für den Zusammenhang zwischen den Spinoren in u^s und v^s : $-i\sigma^2(\eta^s)^* = \xi^s$.)

Schreiben Sie dies dann als

$$u^s(p) = C \bar{v}^{sT}(p) \quad v^s(p) = C \bar{u}^{sT}(p)$$

mit der Ladungskonjugationsmatrix $C = i\gamma^2\gamma^0$. Zeigen Sie, dass $C^T = C^{-1} = C^\dagger = -C$.

Vorsicht Notationskonfusionsoption: C ist ein Operator auf dem Hilbertraum unserer Quanten(feld)theorie, \mathcal{C} eine Matrix, die auf die Spinorindizes wirkt.

[5 Punkte]

- (b) Damit zeigen Sie dann, dass

$$C\psi(x)C = \mathcal{C}\bar{\psi}^T(x).$$

[3 Punkte]

- (c) Bestimmen Sie das Transformationsverhalten von $\bar{\psi}(x)$.

[2 Punkte]

- (d) Zeigen Sie, dass $C\bar{\psi}\psi C = \bar{\psi}\psi$. Es hilft, Spinorindizes explizit auszuschreiben. Passen Sie mit dem Vertauschen von Fermionen auf!

[3 Punkte]

- (e) Wie transformieren Vektor, Tensor, Pseudovektor und Pseudoskalar unter Ladungskonjugation?

[4 Punkte]